

# Phase-Type 분포를 이용한 보증서비스 비용 분석\*

김호균\*\* · 백천현\*\* · 조형수\*\*

## Warranty Servicing Cost Analysis Using Phase-Type Lifetime Distributions\*

Ho-Gyun Kim\*\* · Chun-Hyun Paik\*\* · Hyung-Soo Cho\*\*

### ■ Abstract ■

We consider the question of servicing warranties for repairable items. During the warranty period, each time an item fails the manufacturer has the obligation to restore the item to operational condition either by repairing the item or by replacing it by a new item. In this paper, we consider a warranty policy for making this decision based on the condition of the failed item. For products with phase-type lifetime distributions where the phases represent the condition of the item, we develop algorithms to determine the expected cost of servicing a warranty and use it in making the repair/replacement decision. Illustrative numerical examples are presented.

## 1. 서론

기업의 사회적 책임 및 소비자 중심주의(consumerism)의 대두로 인하여 생산자는 소비자가 요구하는 품질이 충분히 충족되고 있음을 보증해 주어야 한다. 제품보증(warranty)제도는 생산자가 제품을 판매한 후 보증기간동안 발생하는 고장에 대하여 수리 또는 교체 등의 조치를 해준다는 소비자와의 약정이다.

보증하의 제품이 고장날 때, 소비자는 생산자에게 보증서비스를 요구한다. 생산자는 고장난 제품이 수리가 불가능할 경우 새로운 제품으로 교체를 해주어야 한다. 수리 가능한 제품일 경우 고장난 제품의 조건(condition)을 조사한 후 새 제품으로 교체하거나 수리를 통해 운용(operating)조건으로 회복시킬지를 결정한다. 이러한 교체/수리 의사결정은 고장시점[2, 8]과 고장시점의 수리비용[5]에 의해서 이루어져 왔다. Nguyen & Murthy[8]는 수리 또

\* 본 연구는 1999년도 동의대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음

\*\* 동의대학교 기계산업시스템공학부

는 교체를 수행하는 비교적 간단한 두 가지 전략을 고려하여 보증서비스비용을 최소화하는 고장시점의 한계값을 결정하였다. Kim[2]은 제품의 수명이 phase-type 분포를 따를 때 고장율의 형태에 따라 위의 두 가지 전략을 다양하게 연구하였다. Murthy & Nguyen[5]은 제품의 고장비용이 설정된 비용한계값보다 작을 때 수리가 이루어지는 수리비용 한계 정책을 제시하고 주어진 고장분포에 대한 보증서비스비용을 최소화하는 비용한계값을 결정하였다.

일반적으로 제품의 운용조건은 운용년수에 따라 퇴화되고 수리비용은 증가하게 된다. 교체/수리의 사결정 규칙으로 고장난 제품의 운용조건에 대한 한계조건으로써 표현 가능한 조건기반(condition-based)정책을 고려할 수 있다. 이를 위해서 제품의 상태(state) 및 대응되는 고장특성을 기술함에 있어 제품의 운용조건을 포함시키는 방법이 필요하게 된다. PH(phase-type) 분포는 제품의 운용조건을 추적할 때 제품의 수명을 기술하는데 적합한 확률분포로서, 유한 마코프체인(Markov chain)에서 흡수상태로 빠질 때까지 경과한 시간으로 정의된다[6]. 제품의 운용조건을 유한 마코프체인의 상태로 나타냄으로써, 시간경과에 따른 제품의 퇴화는 유한 마코프체인의 상태변화로 표현될 수 있다.

생산자가 결정해야 할 또 다른 문제는 수리가 수행될 때 고장난 제품의 조건을 어느 정도까지 회복시킬 지를 결정하는 수리의 정도 문제인데 본 연구에서는 고장나기 전의 운용조건으로 회복시켜주는 최소수리(minimal repair)만을 고려하기로 한다.

본 연구에서는 PH분포를 이용하여 수리가능한 제품에 대한 교체/수리 내력을 마코프체인으로 특성화하고, 기대 보증서비스 비용을 결정하기 위한 알고리즘을 개발하여 교체/수리 의사결정에 활용하고자 한다. 이후 본 논문의 구성은 다음과 같다. PH 분포와 관련된 마코비안 도착과정(MAP : Markovian arrival process)을 2장에서 간략히 설명하고, 3장에서는 조건기반 정책하에서의 기대 총 보증서비스비용을 계산하기 위해 개발된 알고리즘과 최적 의사결정규칙을 소개한다. 4장에서는 MATLAB으

로 구현된 수치예제의 결과를 그리고 5장에서 결론을 제시한다.

## 2. PH 확률분포

다음과 같은 전이율행렬(infinitesimal generator)  $Q$ 와 초기확률 열벡터  $\alpha$ 를 갖는  $m+1$ 개의 상태를 가진 연속시간 마코프체인(CTMC : continuous time Markov chain)을 고려하자. 본 논문에서 나타나는 굵은 문자는 벡터를 의미한다.

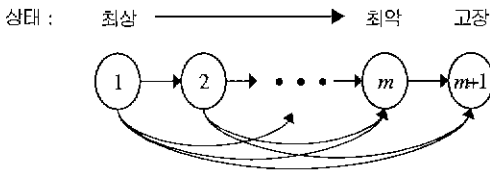
$$Q = \begin{bmatrix} T_m & \mathbf{T}^0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

여기서,  $\mathbf{T}^0 = -T_m \mathbf{e}$ 이고  $\mathbf{e}$ 는 모든 요소가 1인 열벡터이다. 만약  $m$ 차원인 정방행렬  $T_m$ 이 정칙(nonsingular)행렬이면, 임의의 초기상태에서 결국은 상태  $m+1$ 로 흡수될 것이다. PH분포는 흡수상태로 빠질 때까지 경과한 시간의 분포로 정의되며,  $(\alpha, T_m)$ 로 표현된다.  $\alpha_{m+1} = 0$ 이라고 가정하자. 이는 흡수되는 시간이 항상 0보다 크다는 것을 의미한다[6].

재생(renewal)간의 시간이 PH분포인 재생과정을 PH 재생과정(phase type renewal process)이라 한다. 단계(phase) 개념의 확장으로 Neuts[7]에 의해 소개된 마코비안 도착과정(MAP)을 들 수 있다. MAP은 기본(underlying) 마코프체인의 전이시점에서의 포인트과정(point process)이다. 전이율행렬  $D$ 를 갖는 기본 마코프체인이 시간 0에서 상태  $i$ 에 있다고 가정한다. 상태  $i$ 에서 지수(exponential)시간 만큼 머무른 후 다른 상태  $j$ 로 전이하고, 이 때 각 전이는 상태  $i$ 와  $j$ 에 종속적으로 주어진 확률로써 도착을 생성하게 된다. 이 도착과정을 MAP이라 한다. MAP는  $D = D_0 + D_1$ 인 두 개의 행렬  $D_0$ 와  $D_1$ 에 의해 특성화될 수 있다. 행렬  $D_0$ 는 도착이 없는 마코프체인의 전이를 나타내고, 행렬  $D_1$ 은 도착이 있는 마코프체인의 전이를 나타

낸다. 마코프변조 포아송과정(Markov modulated Poisson process)과 PH재생과정은 보편적으로 사용되는 MAP의 경우이다[3]. 아래에서는 PH분포를 이용하여 제품의 수명을 기술한다.

제품의 운용조건을 이산적이고 순차적인 상태 즉, '아주 좋음', ' 좋음', '보통', '나쁨' 등으로 구분할 수 있다. 상태의 구분은 주관적일 수 있지만, 제조설비의 경우 불량률은 상태를 구분할 수 있는 객관적인 방법이 될 수 있다. 어떤 시점에서 제품의 운용조건이 1에서  $m$ 까지 순서화되어 있는  $m$ 개의 상태중 하나로 모형화될 수 있다고 가정한다. 여기서 상태 1은 최상(best possible)의 운용조건, 상태  $m$ 은 최악(worst possible)의 운용조건을 나타내며, 제품은 상태 1에서 상태  $m$ 까지 운용될 수 있다([그림 1] 참조).



[그림 1] 제품의 조건

사용 중에 있는 제품은 더 나쁜(퇴화된) 상태로 전이되기 전까지 각 단계에서 지수시간만큼 머무르고, 전이는 고장을 수반하기도 한다. 따라서 제품의 퇴화과정 즉 상태의 변화는 상태공간  $S = \{1, \dots, m, m+1\}$ 을 갖는 마코프체인으로 특성화될 수 있다. 여기서 상태  $m+1$ 은 비운용 상태 즉 고장상태를 나타낸다. 사용중인 제품의 운용조건이 개선되지 못한다고 가정한다면, 사용중인 제품의 상태변화는 상부삼각행렬(upper triangular matrix)  $T_m$ 이 된다. 새로운 제품의 초기상태를 나타내는 벡터  $\alpha$ 는 새로운 제품이 상태 1이 아닌 다른 상태에서도 시작될 수 있는 확률을 할당한다.

예를 들면 4개의 운용상태 ( $m=4$ ) 및 고장상태를 갖는 제품은 다음과 같은 전이행렬을 갖는다.

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & T^0(1) \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_{23} & \lambda_{24} & T^0(2) \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_{34} & T^0(3) \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & T^0(4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, m$ 은 더 나쁜 상태로 전이되기 전까지 상태  $i$ 에서 머무르는 지수시간의 파라미터이다.  $\lambda_{ij}, 1 \leq i < j \leq m$ 은 상태  $i$ 에 있는 제품이 상태  $j$ 로 퇴화되는 비율을 나타내고,  $T^0(i) = \lambda_i - \sum_{j=i+1}^m \lambda_{ij}, i=1, 2, \dots, m$ 은 상태  $i$ 에 있는 제품의 고장율을 나타낸다. 상태  $i$ 에서 고장난 제품이 최소수리(minimal repair)되었다면 고장난 제품은 상태  $i$ 의 운용조건으로 회복된다. 그러나 새로운 제품으로 교체되었다면, 초기확률 벡터  $\alpha$ 에 의해 상태가 결정될 것이다.

### 3. 수리적 모형

먼저 분석을 위하여 다음과 같이 가정한다

- 생산자는 고장난 제품의 수리시 최소수리만을 수행한다.
- 제품이 나쁜 운용상태에서 고장날수록 최소수리 비용은 더 증가하며, 제품 수리비용은 교체비용보다 더 적게 든다.
- 고장난 제품의 조건은 보증서비스 시점에서 결정되어지며, 이는 교체/수리 의사결정에 활용된다.
- 제품이 상태  $m$ 에서 고장나면 교체하여 주고, 다른 상태들에서 고장나면 최소수리를 수행한다.
- 교체 혹은 최소수리를 수행하는 시간은 무시될 수 있다.
- 제품수명은  $m$ 개의 상태를 갖는 PH분포를 가지며,  $(\alpha, T_m)$ 로 표현된다.

PH 확률분포 즉 제품수명분포에서의 단계는 제품의 상태를 표현한다. 보증기간 동안의 보증서비스 비용을 구하기 위하여, 교체 및 수리내력에

관한 정보를 유지하는 매크로상태가 필요하게 되며, 매크로상태를 다음과 같이 정의한다

$$(i : s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}); i=0, 1, \dots, 0 \leq s_{ij} \leq i,$$

여기서  $s_{ij}$ 는 단계  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ 에서 이루어진 교체 및 수리 횟수를 나타내고,  $i$ 는 교체 및 수리의 총 횟수를 나타내며 즉,  $i = \sum_{j=1}^m s_{ij}$  이다. 주어진  $i$ 에 대하여,  $s_{ij}$ 의 가능한 조합의 수,  $n_i$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$n_i = \binom{i+m-1}{m-1}, \quad i=0, 1, \dots$$

$i$ 를 수준(level)이라 하면, 각 수준에서는  $n_i$ 개의 서로 다른 매크로상태가 있다. 각 매크로상태에서는 제품수명 분포의  $m$ 개 단계에 대응되는  $m$ 개 개별 상태가 있게 된다.

제품의 매크로상태 변화는 상태공간이  $\{(i : s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}) : i=0, 1, \dots, 0 \leq s_{ij} \leq i\}$ 인 연속시간 마코프체인(CTMC)으로 표현된다. [그림 2]에는  $m=3$ 인 경우, CTMC에 대한 전이율행렬  $S(m)$ 이 나타나 있으며, 수준  $i$ 에서의  $n_i$ 개 매크로상태가 사전편집식(lexicographic) 순서로 배열되어 있다. [그림 2]에서  $m \times m$ 행렬  $A_1, A_2, A_3$ 은 아래와 같이 주어지며,  $j=1, \dots, m$ 에 대해서  $T^0(j)$ 와  $\alpha(j)$ 는 벡터  $\mathbf{T}^0$ 와  $\boldsymbol{\alpha}$ 의  $j$ 번째 요소를 나타낸다.

$$A_1 = \begin{pmatrix} T^0(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T^0(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T^0(3)\alpha(1) & T^0(3)\alpha(2) & T^0(3)\alpha(3) \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\pi}(t)$ 를  $t$ 시간에서 시스템의 상태를 나타내는 확률벡터라 하자. 벡터  $\boldsymbol{\pi}(t)$ 는 서브벡터  $\boldsymbol{\pi}_{ik}(t)$ 들로 구분될 수 있다 ( $i=0, 1, \dots, k=1, 2, \dots, n_i$ ). 각 서브벡터  $\boldsymbol{\pi}_{ik}(t)$ 는 수명분포의 단계에 따라

$m$ 차원을 갖는다.  $\boldsymbol{\pi}(0)$ 는  $[\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots]$ 에 의해 주어지는 초기 확률벡터이고, 보증기간  $W$ 동안의 기대 총 보증서비스 비용을 계산하기 위해 다음과 같이  $\boldsymbol{\pi}(W)$ 가 계산되어야 한다.

$$\boldsymbol{\pi}(W) = \boldsymbol{\pi}(0) e^{S(m)W}. \tag{1}$$

	1	2	3	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
(0,000)	1																			
(1,100)		1																		
(1,010)			1																	
(1,001)				1																
(2,200)					1															
(2,110)						1														
(2,101)							1													
(2,020)								1												
(2,011)									1											
(2,002)										1										
(3,300)											1									
(3,210)												1								
(3,201)													1							
(3,120)														1						
(3,111)															1					
(3,102)																1				
(3,030)																	1			
(3,021)																		1		
(3,012)																			1	
(3,003)																				1

[그림 2] 전이율행렬  $S(3)$

### 3.1 기대 보증서비스 비용

$C_j$  ( $j=1, \dots, m-1$ )를 생산자의 최소수리 비용이라 하고,  $c_m$ 을 고장난 제품을 새 제품으로 교체하는 비용이라 하자. 그러면, 보증기간  $W$ 동안 총 보증서비스 비용의 기대값,  $TC(W)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$TC(W) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s_{i1}=0}^i \sum_{s_{i2}=0}^{i-s_{i1}} \dots \sum_{s_{im}=0}^{i-s_{i1}-s_{i2}-\dots-s_{i,m-1}} \sum_{j=1}^m s_{ij} C_j \pi[(i : s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}); W] \tag{2}$$

여기서,  $\pi[(i : s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}); W]$ 는 시간  $W$

에서 매크로상태 ( $i: s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}$ )에 있을 확률이다.

### 3.2 계산 과정

식 (1)에서 지수행렬  $e^{S(m)W}$ 를 계산하기 위해서 랜덤화(randomization) 알고리즘을 채택한다. 이는 수리적 안정성, 오차 제어 및 실행의 용이성 때문에 마코프체인의 시간종속 분석에 많이 사용되는 방법이다 [1, 4, 9]. 랜덤화 알고리즘은 비율  $\tau$ 를 갖는 포아송과정에 종속되는 이산시간 마코프체인으로 수행된다.  $\tau$ 는 전이율행렬  $S(m)$ 의 음의 대각 요소중 최대 절대값이상의 일정한 값으로써 여기서는 최대 절대값으로 고정한다. 그러면,  $\pi(W)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\pi(W) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\tau W)(\tau W)^n}{n!} \pi(0) \cdot \mathbf{P}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n) a_n \quad (3)$$

여기서,  $\mathbf{P} = (1/\tau)S(m) + I$ 는 전이확률 행렬이고  $\phi(n) = \pi(0) \mathbf{P}^n$ 은  $n$ 번 전이후의 확률벡터이며  $a_n = \exp(-\tau W)(\tau W)^n/n!$ 은  $n$ 번 포아송전이 발생할 확률이다.

랜덤화 알고리즘을 실행하기 위하여 행렬  $S(m)$ 의 무한 상태공간과 식 (3)에서의 무한급수(infinite series)가 적절한 수준에서 절단되어야 한다. 식 (3)에서 무한급수를  $N$ 번째 항에서 절단하였다고 하자. 만약  $N$ 이 다음과 같이 결정되었다면, 무한급수에 대한 절단오차는  $\varepsilon_1$ 에 의해 제한된다[9].

$$\sum_{n=0}^N \frac{\exp(-\tau W)(\tau W)^n}{n!} \geq 1 - \varepsilon_1.$$

무한행렬  $S(m)$ 의 상태공간은  $\pi(W)$ 에서 절단에 의한 손실이 미리 설정된 확률값,  $\varepsilon_2$ 보다 작게 되는 수준  $L$ 에서 절단될 수 있다. 수준  $L$ 의 범위를 넘는 매크로상태로의 전이를 무시하여  $L$ 의 범

위를 넘는 매크로상태를 제거하는 것이다. 이는 교체 및 수리횟수가  $L$ 을 초과할 확률이 무시할 수 있을 정도로 작기 때문에 교체 및 수리의 총 횟수를  $L$ 까지로 제한함을 의미한다. Gross & Miller[1]은 절단된 모든 상태들을 단일 흡수상태로 단일화(collapsing)시키는 개념을 제안하였다. 더구나, 시스템이 흡수상태에 있을 최종 확률은 무한 상태공간에 대한 절단의 오차한계를 산출하여 준다. 본 연구에서는, 이러한 접근법을 채택하였다.  $\varepsilon_1$ 과  $\varepsilon_2$ 는 무한급수 및 무한 상태공간의 절단에 의해 도입된 독립적인 오차한계를 제공한다. 통합 오차  $\varepsilon$ 에 대한 한계는  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 가 됨을 알 수 있다.

**보조정리 1.** 통합오차  $\varepsilon$ 에 대한 한계는  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 이다.

**증명.** 무한행렬  $S(m)$ 을 절단하여 얻어진  $\phi(n)$ 의 유한 근사값을  $\phi^*(n)$ ,  $n=1, 2, \dots, N$ 이라 하면,  $\theta(n) = \phi(n) - \phi^*(n)$ 은 오류(error) 벡터가 된다. 무한벡터  $\pi(W)$ 에 대한 근사값으로 차원  $m \sum_{i=0}^L n_i = m \binom{L+m}{m}$ 를 갖는 유한벡터  $\pi^*(W)$ 라고 하자.

$$\begin{aligned} & \| \pi(W) - \pi^*(W) \|_{\infty} \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n) a_n - \sum_{n=0}^N \phi^*(n) a_n \right\|_{\infty} \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n) a_n - \sum_{n=0}^N \phi(n) a_n + \sum_{n=0}^N \theta(n) a_n \right\|_{\infty} \\ &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \phi(n) a_n + \sum_{n=0}^N \theta(n) a_n \right\|_{\infty} \\ &\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \phi(n) a_n \right\|_{\infty} + \left\| \sum_{n=0}^N \theta(n) a_n \right\|_{\infty} \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^N \varepsilon_2 a_n \\ &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad \square \end{aligned}$$

따라서, 오차 한계  $\varepsilon$ 을 보증하기 위해서는 근사적으로  $\varepsilon/2$ 가 되는  $\varepsilon_1$ 과  $\varepsilon_2$ 가 주어져야 한다.

일반적으로, 실제 계산이 이루어지기 전에  $\pi(W)$ 에서의 손실을 미리 설정된 확률값  $\varepsilon_2$ 에 제

한시켜주는 수준  $L$ 을 결정하는 일은 쉽지 않다. 그러나, 여기서는  $\epsilon_2$ 를 엄격하게 보장하는  $L$ 을 미리 결정할 수 있다. 각 수준  $i$ 에서 모든  $n_i$ 개 매크로 상태를 하나의 통합된 상태로 총괄시킴으로써, 그 결과 과정(resulting process)은 특성 행렬  $D_0 = T_m$ 와  $D_1 = A_1 + A_2 + \dots + A_m$ 을 갖는 MAP가 됨을 알 수 있다. 예를 들어,  $m=3$ 에 대해서  $D_1$ 은 다음과 같게 된다.

$$D_1 = A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} T^0(1) & 0 & 0 \\ 0 & T^0(2) & 0 \\ T^0(3)a(1) & T^0(3)a(2) & T^0(3)a(3) \end{pmatrix}.$$

따라서, 원래의 전이율행렬  $S(m)$ 은 [그림 3]에서와 같이  $\tilde{S}(m)$ 로 간결화될 수 있다. 만약 두 개의 마코프체인이 수준  $L$ 에서 절단되었다면, 상태공간은  $m \sum_{i=0}^L \binom{i+m-1}{m-1} = m \binom{L+m}{m}$ 에서  $m(L+1)$ 로 감소하게 된다.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	$D_0$	$D_1$								...
1		$D_0$	$D_1$							...
2			$D_0$	$D_1$						...
3				$D_0$	$D_1$					...
4					$D_0$	$D_1$				...
5						$D_0$	$D_1$			...
6							$D_0$	$D_1$		...
7								$D_0$	$D_1$	...
8									$D_0$	$D_1$ ...
⋮										...
⋮										...

[그림 3] 간결화된 전이율행렬  $\tilde{S}(3)$

$\tilde{\pi}(W)$ 를 시간  $W$ 에서 마코프체인  $\tilde{S}(m)$ 에 대한 확률벡터라고 하면,  $\tilde{S}(m)$ 의 상태공간이 규모가 상당히 간결화되었기 때문에  $L$ 을 결정하기 위해 요구되는 계산량은 그다지 많지 않을 것이다.  $\tilde{\pi}(W)$ 를 통해 근사적으로  $\pi(W)$ 의 계산에서 요

구되는 정도  $\epsilon_2$ 를 만족시켜주는  $L$ 을 결정할 수 있다.

### 3.3 단계의 최적 그룹화

교체/수리 의사결정을 위해  $m$ 개의 단계를 두 그룹으로 나눌 수 있다. 좋은 단계들로 구성된 첫 번째 그룹(그룹 I)에서는 고장이 발생하면 보증서비서 최소수리만을 수행하고, 나쁜 단계들로 구성된 두 번째 그룹(그룹 II)에서는 새 제품으로 교체가 이루어진다. 먼저 그룹 II가 단계  $m$ 만으로 구성되었다고 하고, 기대 총보증비용을 계산한다. 반복적으로 단계  $m-1$  및  $m$ 에서 고장이 발생하여 새 제품으로 교체해 준다면, 그룹 II는 단계  $m-1$  및  $m$ 으로 구성되며 단계  $m-1$  및  $m$ 을 단일 단계 즉,  $(m-1)'$ 로 통합할 수 있다. 이는 알고리즘 면에서는 아무런 정보손실없이 이루어질 수 있다. 이러한 과정들은 순차적으로 단계들을 통합하여 간다. 모든 운용단계들이 단일 단계  $1'$ 로 통합되었을 때, 이는 항상 교체만을 해준다는 것을 의미한다. 기대 총 보증서비서 비용이 최소가 되도록 단계들의 그룹화를 최적화 함으로써 교체/수리 의사결정에 활용할 수 있게 된다.

$\alpha$ .  $T_m, c_j, j=1, 2, \dots, m$ 과  $W$ 가 주어질 때, 단계들의 그룹화를 최적화하기 위한 알고리즘은 다음과 같이 요약된다.

- Step 1:  $p = m$ 을 설정하고, 간결화된 전이율행렬  $\tilde{S}(p)$ 를 도출한다.
- Step 2: 요구된 정도  $\epsilon_2$ 를 만족하는 수준  $L$ 을 결정한다.
- Step 3: 수준  $L$ 에서 절단된 전이율행렬  $S(p)$ 를 사용하여  $\pi^*(W)$ 를 계산한다.
- Step 4: 식(2)를 사용하여 기대 총 보증서비서 비용을 계산한다.
- Step 5: 상태  $(p-1)$ 과  $p$ 를 단일 단계  $(p-1)'$ 로 통합한다. 만약  $p \neq 1$ 이면,  $m = m-1$ 로 설정하고, Step 1로 간다.

Step 6 : 각 그룹화별 기대 총 보증서비스 비용을 비교하여 최적그룹화를 선택한다.

#### 4. 수치 예제

본 연구에서 개발된 알고리즘의 실행을 예시하기 위해서, 4-상태 수명분포를 사용한다.  $\alpha = [0.97, 0.02, 0.01, 0.00]$  그리고 전이율행렬은 다음과 같다.

$$T_4 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.5 & 0.3 & 0.15 \\ 0 & -1.5 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -2.0 & 1.75 \\ 0 & 0 & 0 & -3.5 \end{bmatrix}$$

수리비용 즉,  $c_1, c_2$  및  $c_3$ 는 각각 \$10, \$20, \$30이다. 보증기간은 1, 2년 즉,  $W=1$ 과  $W=2$ 인 경우이고, 수치계산은 MATLAB으로 수행되었다. <표 1>은 오차한계  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$ 을 사용하여,  $W=2$ ,  $c_m = \$100$ 일 때  $L, N$  및  $TC(W)$  값을 보여주고 있다. 예를 들어, 운용단계의 수  $m=4$ 일 때,  $\hat{S}(4)$ 에서  $\epsilon_2$ 를 만족하는 총 교체/수리 횟수  $L$ 은 5로 결정되었고, 차원이  $504 \times 504$ 인 전이율행렬  $S(4)$ 를 사용하여 무한급수의 절대오차가  $\epsilon_1$ 보다 작게 하기 위하여 20번째 항에서 절단되었으며, 이때의 기대 총 보증서비스 비용,  $TC(W)$ 는  $\$0.6806 \times 10^2$ 로 계산되었다.

<표 1>  $W=2, c_m = \$100$ 일 때  $L, N$  및  $TC(W)$  값

	Number of operational phases			
	4	3	2	1
L	5	5	6	21
N	20	21	21	20
TC(W)	$0.6806 \times 10^2$	$0.9986 \times 10^2$	$0.1427 \times 10^3$	$0.7799 \times 10^3$

운용단계들이 통합되면 될수록 총 교체/수리 횟수는 증가되는 것을 알 수 있으며, 기대 총 보증서비스 비용을 비교함으로써, 최적 교체/수리 의사결정을 내릴 수 있다. 입력 파라미터들의 값에 따라 교체 또는 수리가 결정된다. <표 2>는 2가지 보증

기간에 대한 기대 총 보증서비스 비용을 보여주고 있다. 주어진 4-상태 수명분포의 경우 최적 보증서비스정책은 단계 4에서 고장이 발생하면 제품을 교체해주고 다른 단계에서 고장이 발생하면 최소 수리만을 해주는 것이다. 상태변화 즉 전이율행렬이 정상적이기 때문에, 그 결과는 최소수리를 선호하는 것으로 나타났다.

<표 2> 기대 총 보증비용( $c_m = \$100$ )

W	Number of operational phases			
	4	3	2	1
1	$0.2467 \times 10^2$	$0.4099 \times 10^2$	$0.6436 \times 10^2$	$0.3899 \times 10^3$
2	$0.6806 \times 10^2$	$0.9986 \times 10^2$	$0.1427 \times 10^3$	$0.7799 \times 10^3$

#### 5. 결론

본 연구에서는 PH 수명분포를 갖는 제품에 대한 조건기반 정책을 알고리즘적인 관점에서 연구하였다. 교체/수리 내력에 대한 정보를 유지시키는 매크로상태를 정의하였으며, 매크로상태 변화를 연속 시간 마코프체인으로 기술하였다. 또한 보증기간동안의 기대 총 보증서비스 비용을 계산하기 위한 알고리즘을 개발하였다. 이를 교체/수리 의사결정에 반영할 수 있는 단계의 최적 그룹화에 사용하였다.

조건기반정책은 앞선 고장시점과 고장시점의 수리비용에 의한 보증서비스정책을 통합한 것이다. 잔여 보증기간을 고려한 보다 더 통합적인 정책이 고려될 수 있다. 또한 본 연구에서는 수리시 최소 수리로만 한정되었는데, 다양한 수리형태가 고려되어야 할 것이다.

#### 참고 문헌

- [1] Gross, D. and D.R. Miller, "The Randomization Technique as a Modeling Tool and Solution Procedure for Transient Markov Processes", *Operations Research*, Vol.32 (1984), pp.343-361.
- [2] Kim, H.G., "The Optimal Warranty Servicing

- for Repairable Products with Phase-Type Lifetime Distributions”, *J. Korean OR/MS Society*, Vol.22(1997), pp.87-99.
- [3] Lucantoni, D.M., “New Results on the Single Server Queue with a Batch Markovian Arrival Process”, *Stochastic Models*, Vol.7 (1994), pp.1-46.
- [4] Melamed, B. and M. Yadin, “The Randomization Procedure in the Computation of Cumulative Time Distributions over Discrete State Markov Processes”, *Operations Research*, Vol.32(1984), pp.929-943.
- [5] Murthy, D.N.P., and D.G. Nguyen, “An Optimal Repair Cost Limit Policy for Servicing Warranty”, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.11(1988), pp.595-599.
- [6] Neuts, M.F., *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models - An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [7] Neuts, M.F., *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*, Marcel Dekker Inc, New York, 1989.
- [8] Nguyen, D.G., and D.N.P. Murthy, “An Optimal Policy for Servicing Warranty”, *Journal of the Operational Research Society*, Vol.37(1986), pp.1081-1088.
- [9] Stewart, W.J., *Introduction to the numerical solution of Markov Chains*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.