

진화적 구조 최적화를 위한 요소 제거법의 비교 연구

한석영*, 이동진**

Comparative Study on Element Removal Methods for ESO

Seog-Young Han*, Dong-Jin Lee**

Abstract

In case of ESO(evolutionary structural optimization) which is one of topology optimization methods, the element removal ratio is fixed throughout topology optimization by 1 or 2%. As a result it has no flexibility for various types of structures and thus the rate of convergence might not be efficient. Thus various element removal methods were developed in order to improve the efficiency of ESO. In this paper, various element removal methods for ESO are compared with each other for a bracket and a short cantilever. In addition, a new improved bi-directional element removal method is suggested in order to obtain much better optimized topology. From the comparative results of the examples, it is verified that all of the developed various element removal methods are very effective, and the suggested element removal method is the most effective.

Key Words : Element Removal Method(요소 제거법), Convergence Rate(수렴속도), Evolutionary Structural Optimization(진화적 구조 최적화), Topology Optimization(위상 최적화)

1. 서론

최근 기계 및 자동차 산업의 구조 경량화의 추세와 컴퓨터 하드웨어의 놀라운 발전으로 보다 적은 무게를 가지면서도 주어진 하중이나 구속조건을 만족시킬 수 있는 구조물의 치수, 형상 및 위상 최적화에 대한 알고리즘의 개

발이 활발히 이루어지고 있다. 특히 위상 최적화 문제는 초기 형상이 결정되지 않은 구조물의 시제품을 개념 설계할 수 있다는 점에서 흥미있는 연구 대상이 되어왔다.

최근에는 Chu 등에 의해 보다 수치해석적으로 사용하기에 편리한 ESO법⁽¹⁻³⁾(Evolutionary Structural Optimization method)이 개발되었다. 그런데 이 방법에서는 매 반복 시

* 한양대학교 기계공학부

** 한양대학원 자동차공학과

요소 제거율을 초기 요소수의 1 또는 2%로 고정하여 제거함으로써 구조물에 따른 다양한 최적 제거율에 유연성 있게 대처하지 못하고, 그 결과 최적화된 위상을 얻을 때까지의 수렴속도가 느려지는 단점이 있다. 이러한 단점을 해결하기 위해서 여러 가지 요소 제거법이 개발되었다.

본 연구에서는 위상 최적화의 수렴속도를 향상시키기 위해 제안된 요소 제거법들^(4,5)과 양방향 요소 제거법을 개선하여 제안된 새로운 요소 제거법을 적용하여 위상 최적화를 수행하였다. 위상 최적화의 예로는 브라켓과 굽힘 하중을 받는 짧은 외팔보를 사용하였으며, 동일한 질량조건 하에서 최적화된 위상으로부터 응력, 변위 및 수렴속도 등을 비교하여 이 요소 제거법들의 효율성을 비교하였다. 기존의 ESO법에서는 요소 제거율을 1%로 고정하여 적용하였으며, 그 외의 비교되는 요소 제거법들에서는 약 6-7%를 적용하였다.

2. ESO법⁽¹⁾

ESO법은 구조물의 설계영역을 설정하고 하중조건에 따라 발생하는 처짐량이나 설계자가 요구하는 한계 질량을 구속조건으로 하여 각 요소당의 변형률 에너지(strain energy)의 변화량으로 정의되는 민감도 수(sensitivity number)들을 비교함으로써 작은 값 순으로 해당 요소를 제거하는 알고리즘을 반복해서 최적화된 위상을 구하는 방법이다.

전 강성 제한조건을 갖는 구조물에 대한 민감도 수는 다음과 같이 정의된다. 유한요소법에서 구조물의 정적거동은 다음과 같이 표현된다.

$$[K]\{u\} = \{P\} \quad (1)$$

여기서, $[K]$: 전 강성행렬
 $\{u\}$: 전 노드 변위 벡터
 $\{P\}$: 노드 하중 벡터

또, 구조물의 변형률 에너지는 다음 식 (2)와 같이 정의되며 이는 구조물의 전 강성을 역으로 평가할 때 사용된다.

$$C = (1/2)\{P\}^T \{u\} \quad (2)$$

이 식으로부터 전 강성을 최대화시키는 것은 변형률 에너지를 최소화시키는 것과 같다는 사실을 알 수 있다.

n 개의 유한요소들로 이루어진 구조물로부터 i 번째의 요소를 제거한다면, 강성행렬은 $[\Delta K] = [K^*] - [K] = -[K^i]$

에 의해 변화될 것이다. 강성행렬에서 $[K^*]$ 는 i 번째 요소를 제거한 후에 생긴 구조물의 강성행렬이고 $[K^i]$ 는 i 번째 요소의 강성행렬이다. 요소의 제거가 하중벡터 $\{P\}$ 에는 아무런 영향을 주지 않는다고 가정하고 고차항을 무시하면 식 (1)로부터 변위 벡터의 변화는 다음과 같이 구해진다.

$$\{\Delta u\} = -[K]^{-1}[\Delta K]\{u\} \quad (3)$$

또, 식 (2)와 (3)으로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Delta C &= \frac{1}{2}\{P\}^T \{\Delta u\} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)\{P\}^T [K]^{-1}[\Delta K]\{u\} \\ &= \frac{1}{2}\{u^i\}^T [K^i]\{u^i\} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, $\{u^i\}$ 는 i 번째 요소의 변위 벡터이다. 따라서, 전 강성 구속조건을 가진 문제에 있어서의 민감도 수는 식 (5)와 같이 정의할 수 있다.

$$\alpha_i = \left(\frac{1}{2}\right)\{u^i\}^T [K^i]\{u^i\} \quad (i = 1, n) \quad (5)$$

이것은 i 번째 요소의 제거에 따른 변형률 에너지의 변화를 나타내며, C 와 α_i 는 항상 양의 값을 가진다.

일반적으로 한 요소가 제거될 때, 구조물의 강성은 감소하며 따라서 변형률 에너지는 증가한다. 요소를 제거함으로써 이러한 목적을 달성하기 위한 가장 효과적인 방법은 C 의 증가를 최소화할 수 있도록 가장 작은 α_i 의 값을 가지는 요소를 제거하는 것이다.

이러한 민감도 수를 이용한 구조물의 위상 최적화는 Fig. 1과 같이 구조물에 대한 유한요소 해석과 요소 제거의 과정을 반복하여 구해지는데 ESO법에서는 1 또는 2%의 고정된 요소 제거율을 도입하였다.

3. 요소 제거법

3.1 양방향 요소 제거법⁽⁴⁾

양방향 요소 제거법(bi-directional element removal method, BERM)은 다음과 같은 과정을 통해 수행된다. 기존의 ESO법에서는 한 번의 유한요소 해석을 통하여 민감도 수를 구한 후, 작은 값을 갖는 요소부터 순서대로 제거하였다. 양방향 요소 제거법에서는 이 과정을 두 단계로

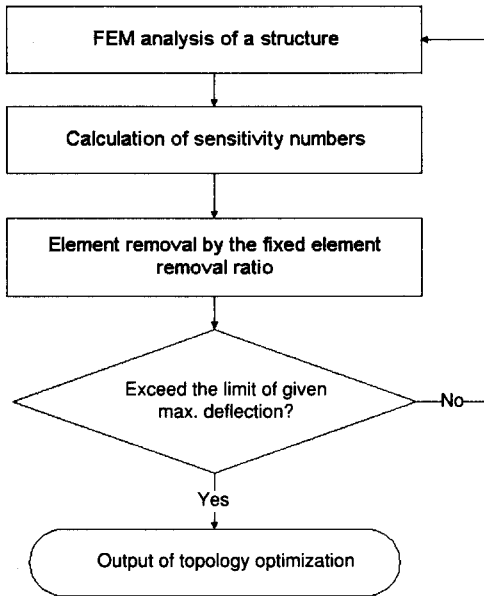


Fig. 1 Topology optimization procedure of ESO

나누었다.

제1단계로 전 과정에서 얻어진 위상에 대해 유한요소 해석을 한다. 이 유한요소 해석에서 계산된 민감도 수를 기준으로 민감도 수가 작은 것부터 요소를 제거한다. 이때 적용되는 요소 제거율은 약 6-7% 정도로 기존의 방법보다는 매우 큰 값이다. 제2단계는 제1단계에서 가상으로 요소를 제거한 위상을 다시 유한요소 해석하는 것으로 시작된다. 제1단계에서 작은 민감도 수순으로 요소를 제거하였기 때문에 유한요소 해석에 의한 민감도 수는 일반적으로 제1단계의 것보다 더 커야된다. 그러나 실제로 유한요소 해석의 결과 얻어진 민감도 수는 제1단계에서 제거 기준으로 삼았던 민감도 수보다 작은 민감도 수가 발생한다. 따라서, 이들 요소는 전 과정에서 얻은 위상에서 제1단계 해석에서 제거된 요소보다 우선적으로 제거되어야 한다.

결과적으로 제2단계에서 제1단계의 민감도 수 보다 작은 민감도 수를 가지는 요소와 제1단계에서 구한 민감도 수가 작은 요소를 합해 전 과정의 위상에서 제거해야 할 요소 약 6-7%를 정하게 된다. 이렇게 이들 요소를 전 위상에서 제거하고 다음 최적화 과정으로 진행된다. 만일 제2단계에서 제1단계보다 작은 값을 가지는 민감도 수의

요소가 더 많다면 과도하게 제거된 것으로 보고 제거율을 1%씩 낮추어가며 반복 수행한다.

3.2 개선된 양방향 요소 제거법

양방향 요소 제거법은 제2단계에서 제1단계보다 작은 민감도 수의 값을 가지는 요소가 거의 비슷하거나 더 많은 경우 즉, 50% 이상인 경우에는 수치 실험결과 최적화된 더 나은 결과가 있다는 것을 확인하였다. 그러나, 허용하는 범위가 넓을수록 수렴속도는 느리게 되므로 가능한 좁은 범위내에서 설정되어야 한다. 따라서, 이러한 경우가 발생할 때는 약 10%까지 허용하는 것이 더 좋은 결과를 보인다는 것을 수치해석적으로 확인하였다. 이 방법을 본 논문에서는 개선된 양방향 요소 제거법 (improved bi-directional element removal method, IBERM)이라 한다. 이 방법은 수렴속도면에서는 양방향 요소 제거법에 비해 떨어지나 변위면에서는 매우 우수한 최적 위상을 보인다.

3.3 제거선(cut-line)을 도입한 요소 제거법⁽⁵⁾

요소 제거법을 설명하기 위해 짧은 외팔보에 적용하였다. Fig. 2는 첫 번째 반복 즉 요소 제거하기 전 유한요소 법으로 해석된 상태에서 구조물 요소 각각의 민감도 수 α 값을 나타낸 것이고, Fig. 3은 요소가 제거되어 최적화된 형상의 요소별 α 값을 나타낸 것이다.

이 제거법에서는 Fig. 2에서 보이는 초기 구축 α 값 그룹 A와 Fig. 3에서 보이는 제거된 요소의 α 값 그룹 B를 제외한 나머지 요소의 α 값을 분석, 적합한 제거선을 결정 한 다음, 요소를 제거한다. 이렇게 하는 이유는 α 값이

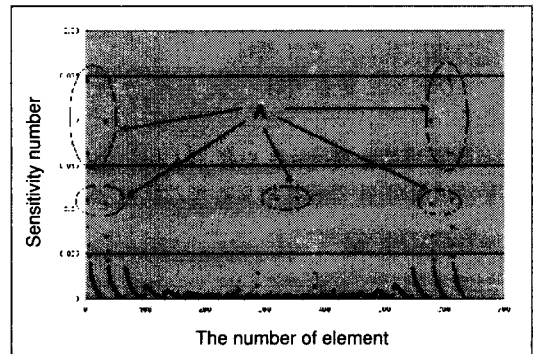


Fig. 2 Distribution of sensitivity numbers at initial stage

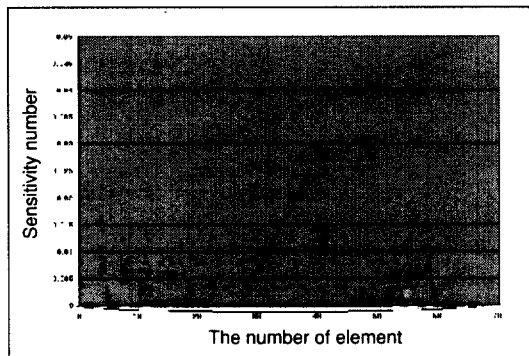


Fig. 3 Distribution of sensitivity numbers at final stage

Fig. 2나 3에서 볼 수 있듯이 구속된 요소나 제거된 요소는 그렇지 않은 요소의 α 값에 비하여 값의 범위가 너무 커서 정확한 제거선을 결정하는데 도움이 되지 않기 때문이다.

초기 구속 α 값 그룹 A의 수는 식 (6)을 기본으로 하여 정의된다.

$$N^{max} = N^{element} - (N^{DE} * 2 + N^{SE} * 3) \quad (6)$$

N^{max} 는 그룹A에 포함되는 요소 수, $N^{element}$ 는 전체 요소 수, N^{DE} 는 구속되는 절점이 두 개의 요소에 걸쳐져 있는 수, N^{SE} 는 하나의 요소에 걸쳐져 있는 수를 말한다. 여기서 N^{DE} 와 N^{SE} 에 곱해지는 2와 3은 각각 구속되는 하나의 절점과 연관되는 요소 수를 말한다.

제거된 요소의 α 값 그룹 B를 제외한 최소값은 식 (2)로 정의된다.

$$\alpha^{min} = \alpha^i \quad (7)$$

(i는 1부터 요소 수까지; $\alpha > 1.0e^{-13}$ 을 만족하는 최소값)

아래의 공식으로 계산된 제거선(CL; cut line)을 기준으로 요소의 민감도 수 값에 따라 해당 요소의 제거 여부가 판별된다. 다시 말하면, CL보다 작은 α 값을 가진 요소는 제거된다.

$$CL = \frac{\alpha^{N^{max}} - \alpha^{min}}{\Gamma} + \alpha^{min} \quad (8)$$

여기서, $\alpha^{N^{max}}$ 은 초기 구속된 요소 그룹을 제외한 α 의 최대값, Γ 는 CL의 폭을 결정하는 상수이다. 수치가 커질수록 정확도는 높아지나 제거되는 폭은 감소된다.

4. 요소 제거법의 비교

4.1 브라켓

Fig. 4와 같이 가로 0.3 m, 세로 0.4 m, 두께 0.001 m, $E=207$ GPa, 포아송비=0.3을 가진 브라켓에 각각 3.75 kN, 7.5 kN의 힘을 받고 아래 두 구멍이 고정되어 있는 문제에 대하여 양방향 요소 제거법(BERM), 제거선을 도입한 요소 제거법(CLM) 그리고 개선된 양방향 요소 제거법(IBERM)을 이용하여 최적화를 수행하였다. 고정 요소 제거율을 1%, 격자의 크기는 4변형 요소 64×64 개로 나누어 계산하였다. 제한조건은 모든 경우에 대해 초기 질량의 20%로 하였다.

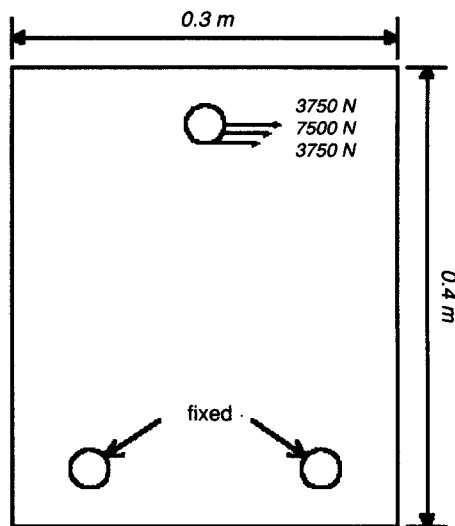


Fig. 4 Design conditions of a bracket

Fig. 5(a)는 기존의 ESO법을, Fig. 5(b)는 양방향 요소 제거법을, Fig. 5(c)는 제거선을 도입한 요소 제거법을, 그리고 Fig. 5(d)는 개선된 양방향 요소 제거법을 적용한 결과를 나타내었으며, Fig. 6에는 각 요소 제거법에 대한 반복수에 따른 질량의 변화를 나타내었다.

기존의 ESO법을 이용한 경우는 최종 최적단계까지 유한요소 해석을 80회 수행하였으며, 최대 Mises 응력은 $1.08E+06$ MPa, 변위는 2.4 mm가 얻어졌다. 양방향 요소 제거법의 경우는 유한요소 해석을 30회, 최대 Mises 응력은 $1.08E+06$ MPa, 변위는 2.4 mm가 얻어졌으며,

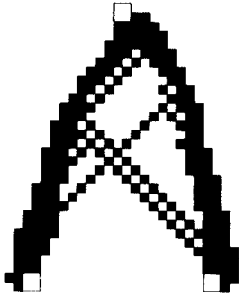


Fig. 5 (a) Optimized topology by ESO

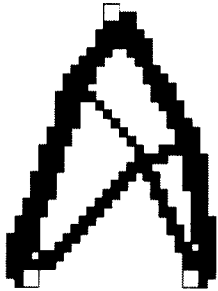


Fig. 5 (b) Optimized topology by BERM

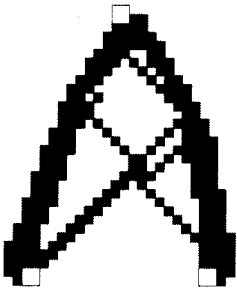


Fig. 5 (c) Optimized topology by CLM

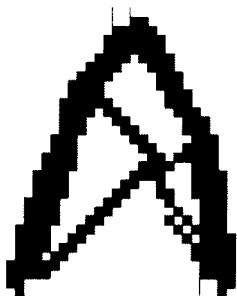


Fig. 5 (d) Optimized topology by IBERM

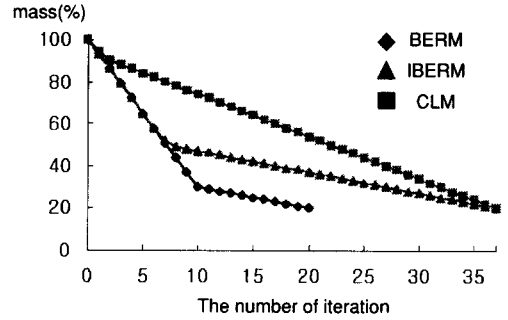


Fig. 6 The change of mass due to the number of iteration for each element removal method

제거선을 도입한 요소 제거법의 경우는 유한요소 해석을 37회, 최대 Mises 응력은 1.06E+06 MPa, 변위는 2.4 mm가 얻어졌다. 마지막으로 개선된 양방향 요소 제거법의 경우는 유한요소 해석을 43회, 최대 Mises 응력은 1.06E+06 MPa, 변위는 2.04 mm가 얻어졌다.

따라서 기존의 ESO법에 비해서 다른 요소 제거법들이 응력과 변위면에서는 유사하거나 양호한 결과를 보였으나 수렴속도면에서는 모두 양호한 결과를 보였다. 양방향 요소 제거법과 제거선을 도입한 요소 제거법은 거의 유사한 결과를 얻어졌다. 개선된 양방향 요소 제거법의 경우는 위의 두 방법에 비해 유한요소 해석 수는 많아졌으나, 변위면에서는 매우 우수한 최적 위상이 얻어졌다.

4.2 굽힘하중을 받는 짧은 외팔보

Fig. 7과 같이 가로 0.16 m, 세로 0.10 m, 두께 0.001 m, $E=207$ GPa, 포아송비=0.3을 가진 짧은 외팔보에 3 kN의 굽힘하중을 받는 문제에 대하여 각 요소 제거법을 이용하여 최적화를 수행하였다. 고정 요소 제거율을 1%, 격자의 크기는 4변형 요소 32×20 개로 나누어 계산하였다. 제한조건은 모든 경우에 대해 초기 질량의 약 30%로 하였다.

Fig. 8(a)에는 기존의 ESO법을, Fig. 8(b)에는 양방향 요소 제거법을, Fig. 8(c)에는 제거선을 도입한 요소 제거법을, Fig. 8(d)에는 개선된 양방향 요소 제거법을 적용한 결과를 나타내었으며, Fig. 9에는 각 요소 제거법에 대한 반복수에 따른 질량의 변화를 나타내었다.

기존의 ESO법을 이용한 경우는 최종 최적단계까지 유한요소 해석을 70회 수행하였으며, 최대 Mises 응력은 1.84E+06 MPa, 변위는 1.16 mm가 얻어졌다. 양방향 요소

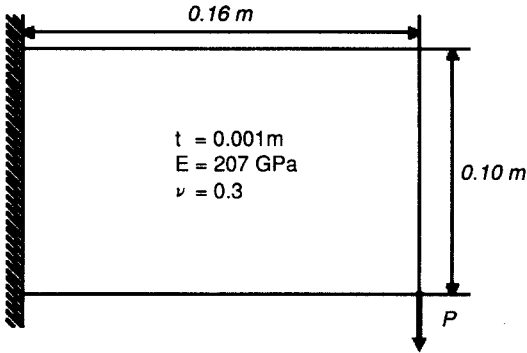


Fig. 7 Design conditions of a short cantilever

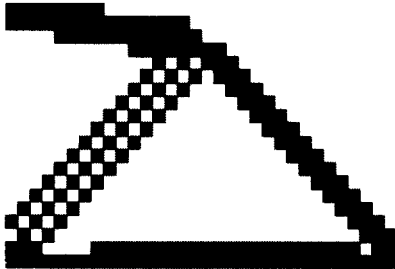


Fig. 8 (a) Optimized topology by ESO

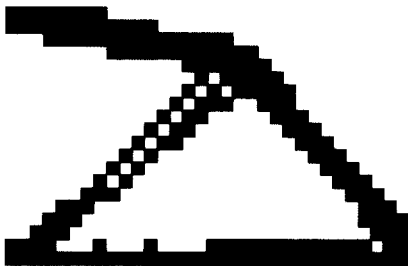


Fig. 8 (b) Optimized topology by BERM

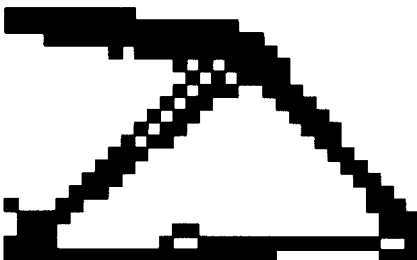


Fig. 8 (c) Optimized topology by CLM

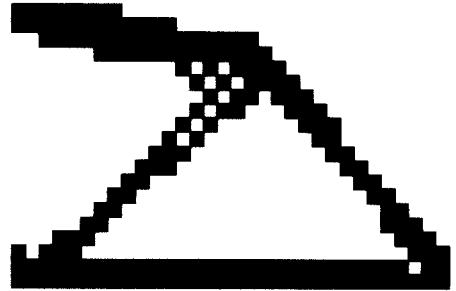


Fig 8 (d) Optimized topology by IBERM

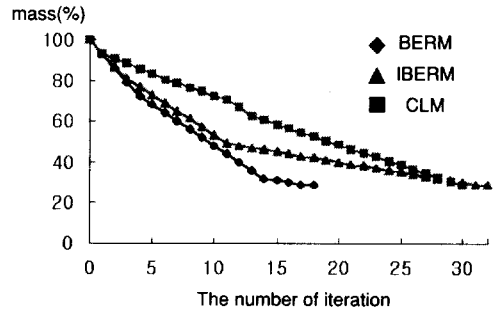


Fig. 9 The change of mass due to the number of iteration for each element removal method

소 제거법의 경우는 유한요소 해석을 33회 수행하였으며, 최대 Mises 응력은 1.83E+06 MPa, 변위는 1.20 mm가 얻어졌다. 제거선을 도입한 요소 제거법을 이용한 경우는 유한요소 해석을 31회, 최대 Mises 응력은 1.86E+06 MPa, 변위는 1.26 mm가 얻어졌다. 마지막으로 개선된 양방향 요소 제거법을 이용한 경우는 유한요소 해석을 44회, 최대 Mises 응력은 1.84E+06 MPa, 변위는 1.15 mm가 얻어졌다. 따라서 기존의 ESO법에 비해서 제거선을 도입한 요소 제거법을 제외하고는 모두 유사하거나 양호한 결과를 보였으나 수렴속도면에서는 모두 양호한 결과를 보였다. 개선된 양방향 요소 제거법의 경우는 위의 예제와 같이 다른 요소 제거법에 비해 유한요소 해석 수는 많아졌으나, 변위면에서는 다소 우수한 최적 위상이 얻어졌다.

5. 결론

본 연구를 통하여 여러 가지 요소 제거법을 서로 비교

한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 본 연구에 적용된 모든 요소 제거법들은 기존의 ESO법에서 사용된 고정된 요소 제거율에 의한 요소 제거법에 비해 효율적이었다.
- (2) 제거선을 도입한 요소 제거법은 양방향 요소 제거법에 비해 변위면에서 좋지 않은 결과를 보였으며, 개선된 양방향 요소 제거법은 다른 두 요소 제거법에 비해 변위면에서 우수한 결과를 보였다.
- (3) 개선된 양방향 요소 제거법이 변위면에서 비교된 요소 제거법들보다 효율적이다.

후 기

이 논문은 2000년 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구되었음.

참 고 문 헌

- (1) D. Nha Chu, Y. M. Xie, A. Hira, G. P. Steven, "Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints". *Finite Elements in Analysis and Design*. pp. 239~251 no. 21. 1996.
- (2) Y. M. Xie and G. P. Steven, "A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization", *Comput. Struc.* Vol. 49, pp. 885~896, 1993.
- (3) Y. M. Xie and G. P. Steven, "Optimal Design of Multiple Load Case Structures Using an Evolutionary Procedure", *Eng. Computations*, Vol. 11, pp. 295~302, 1994.
- (4) 한석영, 배현우, "위상 최적화를 위한 양방향 요소 제거법의 개발", *대한기계학회 논문집 A권*, 제23권, 제5호, pp. 814~819, 1999.
- (5) 최강석, 한석영, "위상 최적화를 위한 개선된 요소 제거법의 개발", *한국자동차공학회 논문집*, 제7권, 제4호, pp. 260~267, 1999.
- (6) 한석영, 이동진, "위상 최적화를 위한 효율적인 요소 제거법", *한국공작기계학회 춘계학술대회 논문집*, pp. 46~51, 2000.