

형상불완전을 갖는 철근 콘크리트 축대칭 쉘의 동적 특성

Dynamic Characteristics of Reinforced Concrete Axisymmetric Shell with Shape Imperfection

조 진 구* · 민 정 기**
Cho, Jin Goo · Min, Jeong Ki

Abstract

Dynamic loading of structures often causes excursions of stresses well into the inelastic range and the influence of geometry changes on the response is also significant in many cases. In general, the shell structures designed according to quasi-static analysis may collapse under conditions of dynamic loading. Therefore, for a more realistic prediction on the load carrying capacity of these shell, both material and geometric nonlinear effects should be considered.

In this study, the material nonlinearity effect on the dynamic response is formulated by the elasto-viscoplastic model highly corresponding to the real behavior of the material. Also, the geometrically nonlinear behavior is taken into account using a Total Lagrangian formulation. The reinforcing bars are modeled by the equivalent steel layer at the location of reinforcements, and Von Mises yield criteria is adopted for the steel layer behavior. Also, Drucker-Prager yield criteria is applied for the behavior of concrete.

The shape imperfection of dome is assumed as 'dimple type' which can be expressed $W_{di} = W_{d0}(1 - (r/a)^n)^n$ while the shape imperfection of wall is assumed as sinusoidal curve which is $W_{wi} = W_{w0}\sin(n\pi y/\ell)$.

In numerical test, three cases of shape imperfection of 0.0, -5.0cm (opposite direction to loading: inner shape imperfection) and 5cm (direction to loading: outward shape imperfection) and thickness of steel layer determined by steel ratio of 0, 3, and 5% were analyzed.

The effect of shape imperfection and steel ratio and behavior characteristics of perfect shape shell and imperfect shape shell are identified through analysis of above mentioned numerical test. Dynamic behaviors of dome and wall according to combination of shape imperfection and steel ratio are also discussed in this paper.

*전남 대학교 농과대학

**한국자원 연구소

키워드 : 축대칭, R C, 구조물, 원형돔, 초기결함, 격납
건물, 동적해석

I. 서 론

철근 콘크리트 구조는 건설분야에서 광범위하게 사용되고있는 구조로서 콘크리트 재료 및 철근 콘크리트 구조의 거동에 대한 다양한 연구가 진행되고 있다. 특히 철근 콘크리트 셸 구조의 경우 그 형상이 미려하고 구조적 거동이 뛰어나 많은 분야에서 적용되고 있다. 가장 흔히 그리고 지속적으로 건설되고 있는 철근 콘크리트 구조의 하나로 축대칭 셸 구조물을 들 수 있다.^{5,6)} 축대칭 셸 구조물은 평면곡선을 동일 평면내에 있는 회전축 주위로 회전시킴으로서 얻어지는 회전곡면을 중립면으로하는 곡면판 구조체이다.¹⁾ 이러한 축대칭 셸 구조물의 설계는 많은 산업 분야에서 빈번히 발생되고 있다. 따라서 그러한 구조물의 해석에 대한 신뢰성이 있고 정도가 좋은 해석 기법이 절실히 필요하게 되었다.⁹⁾ 예를 들면 저수지의 취수탑이나 정유공장을 비롯한 대규모 공장에 건설되는 액체 저장탱크 또는 원자력 발전소의 격납 건물등이 이에 속한다. 이러한 대형 구조물들은 사고시의 재해로부터 인명과 재산을 보호하기 위한 안전성이 확보되어야 하고 이를 위해서는 정하중은 물론 동하중에 대해서도 안전성이 보장되어야 한다.^{1,4,5)} 구조물의 동적응답에 대한 연구는 항공기 설계에서 널리 사용되어 왔으며 최근에는 빈번한 지진의 발생으로 일반 구조물의 설계에서도 많은 관심을 받게 되었다. 구조물에 동하중이 작용하면 응력이 탄성범위를 벗어나는 경우가 있고 이로 인한 기하학적 변화는 구조물의 동적응답에 커다란 영향을 주게 된다. 따라서 셸 구조물의 동적거동에 대한 보다 실제적인 해석을 위해서는 재료 비선형과 대변형에 따른 기하학적 비선형 효과가 반드시 포함되어야 한다.^{7,8,9,13)} 축대칭 셸 구조는 일반적으로 대규모로 건설되는 얇은 셸 구조로서 구조형상의 특성상 건설과정과 크리프 및 건조수축등의 장기 거동에 의하여 형상불완전이 개입될 수 있다.⁶⁾ 이러한 형상불완전은 셸 구조물에 추가적인 응력의 발생과 극한하중의 저하 등에 영향을 미치고 있으

므로 정밀한 해석을 위해서는 반드시 고려되어야 한다.^{12,13)} Zienkiewicz¹⁰⁾ 등은 대변형을 고려한 소성문제의 해석방법을 연구하였고, Robert Kao^{12,13)} 는 초기결합을 갖는 축대칭 셸의 좌굴문제의 해석에서 초기결합을 갖는 축대칭 구형 쉘의 경우 동적 좌굴 능력이 현저히 감소된다고 하였다.

본 연구는 콘크리트 및 철근의 재료비선형과 대변형에 따른 기하학적 비선형등을 고려한 비선형 해석을 통하여 형상불완전을 갖는 철근 콘크리트 축대칭 셸의 동적 거동 특성을 규명하는 것을 목적으로 한다. 이를 위하여 해석방법으로는 유한요소법을 사용하였으며 유한요소 정식화에서 탄-점소성 모델에 의해서 재료 비선형 효과를 고려하고 기하학적 비선형 효과는 전체 라그랑지안 좌표계에 의해서 고려하였다. 또한 콘크리트의 거동은 Drucker-Prager 항복 기준을 적용하고 철근은 등가의 두께를 갖는 철근층으로서 이산화시킨 후 Von Mises 항복 기준을 적용하였다.

II. 유한요소 해석

형상불완전을 갖는 철근 콘크리트 축대칭 셸의 동적 해석에 있어서 8-절점 등매개 변수 요소⁷⁾를 대칭되는 축에 대해서 회전시킨 링 요소를 채용하였다.

1. 비선형 모델링

가. 재료 비선형

일반적으로 비선형 연속체의 문제에서 전체 변형률은 탄성 성분과 점소성 성분으로 나눌 수 있다. 따라서 임의 시간 t_n 에서의 전체 변형률 속도 $[\dot{\epsilon}]_n$ 은 다음과 같다.

$$[\dot{\epsilon}]_n = [\dot{\epsilon}_e]_n + [\dot{\epsilon}_{op}]_n \dots\dots\dots(1)$$

응력속도는 변형률 속도와 관련하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\sigma] = [D][\dot{\epsilon}_e] \dots\dots\dots(2)$$

한편 점소성 변형률 속도를 현재의 응력상태만의 함수라고 하면 다음과 같은 점소성 유동법칙으로 나타낼 수 있다.

$$[\dot{\epsilon}_{vp}]_n = \gamma \langle \Phi_n(F) \rangle \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}_n \dots\dots\dots(3)$$

식(2) 및 식(3)을 식(1)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$[\dot{\epsilon}]_n = [D]^{-1} [\dot{\sigma}]_n + \gamma \langle \Phi_n(F) \rangle \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}_n \dots\dots\dots(4)$$

여기서 [D] : 탄성행렬
 γ : 유동계수
 $\langle F \rangle$: 항복함수
 $[\dot{\epsilon}]_n, [\dot{\epsilon}_e]_n, [\dot{\epsilon}_{vp}]_n$: 전체, 탄성 및 점소성 변형률 속도
 $[\dot{\sigma}]_n$: 응력속도

를 나타낸다.

또한

$$\langle \Phi_n(F) \rangle = 0 : \text{항복이 일어나지 않았을 때}$$

$$= 1 : \text{항복이 일어났을 때}$$

한편 Euler 적분공식에 의하면 시간 t_{n+1} 에서의 변형률은 다음과 같다.

$$[\epsilon_{vp}]_{n+1} = [\epsilon_{vp}]_n + [\dot{\epsilon}_{vp}]_n \cdot \Delta t \dots\dots\dots(5)$$

여기서 Δt 는 시간 간격을 나타낸다.

나 기하학적 비선형

기하학적 비선형성을 고려하기 위해 변형 전 초기형상과 일치하는 전체 라그랑지안 좌표계를 선택하면 변형률은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[\epsilon]_n = [\epsilon_L]_n + [\epsilon_{NL}]_n \dots\dots\dots(6)$$

여기서 $[\epsilon_L]_n = \sum_{i=1}^m [B_{Li}][d_i]_n$: 선형 변형률
 $\dots\dots\dots(7)$

$$[\epsilon_{NL}]_n = \frac{1}{2} [A_\theta]_n \theta_n : \text{비선형 변형률} \dots\dots\dots(8)$$

$$\theta_n = \sum_{i=1}^m [G_i][d_i]_n : \text{변위경사} \dots\dots\dots(9)$$

여기서 $[G_i]$: 형상함수의 미분항으로 표시된다. 위의 식을 사용하면 식(6)의 변형률은 다음과 같다.

$$[\epsilon]_n = \sum_{i=1}^m \left[[B_{Li}]_n + \frac{1}{2} [B_{NLi}]_n \right] [d_i]_n \dots\dots\dots(10)$$

여기서 비선형 변형률-변위 행렬 $[B_{NLi}]_n$ 은 식(11)과 같다.

$$[B_{NLi}]_n = [A_\theta]_n [G_i] \dots\dots\dots(11)$$

다. 동적 해석

동하중을 받는 구조물의 임의시간 t_n 에서의 평형방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{\dot{d}\}_n + [C]\{d\}_n + \{P\}_n = \{F\}_n \dots\dots\dots(12)$$

여기서 [M] : 질량 행렬
 [C] : 감쇠 행렬
 $\{P\}_n$: 저항 절점력 벡터
 $\{F\}_n$: 절점 외력 벡터
 $\{\dot{d}\}_n$: 절점 가속도 벡터
 $\{d\}_n$: 절점 속도 벡터

중양차분법을 이용하면 시간 t_n 에서의 가속도 및 속도는 다음과 같이 계산된다.

$$\{\ddot{d}\}_n \simeq \{a\}_n = \frac{1}{(\Delta t)^2} [\{d\}_{n+1} - 2\{d\}_n + \{d\}_{n-1}] \dots\dots\dots(13)$$

$$\{\dot{d}\}_n = \{v\}_n = \frac{1}{2\Delta t} [\{d\}_{n+1} - \{d\}_{n-1}] \dots\dots(14)$$

여기서 Δt : 시간 간격

식(13)과 식(14)를 식(12)에 대입하면 다음과 같다.

$$[M] \left[\frac{\{d\}_{n+1} - 2\{d\}_n + \{d\}_{n-1}}{(\Delta t)^2} \right] + [C] \left[\frac{\{d\}_{n+1} - \{d\}_{n-1}}{2\Delta t} \right] + [P]_n = \{F\}_n \dots\dots(15)$$

윗식을 $\{d\}_{n+1}$ 에 대해 다시 정리하면

$$\{d\}_{n+1} = \left[[M] + \frac{\Delta t}{2}[C] \right]^{-1} \times \{ (\Delta t)^2 [-\{P\}_n + \{F\}_n] + 2[M]\{d\}_n - [M - \frac{\Delta t}{2}[C]]\{d\}_{n-1} \} \dots\dots(16)$$

다시 표현하면,

$$\{d\}_{n+1} = g(\{d\}_n, \{d\}_{n-1}) \dots\dots(17)$$

즉 임의의 시간 $t_n + \Delta t$ 에서의 변위는 시간 t_n 및 t_{n-1} 에서의 변위의 함수로 주어진다.

2. 형상불완전

본 연구에서 채용된 돔의 불완전형상은 식(18)과 같은 'dimple type'으로 가정한다.⁴⁾

$$W_d = W_{d0}(1 - (r/a)^m)^n \dots\dots(18)$$

여기서 W_{d0} : 돔의 정점에서 초기 최대 형상 불완전 값

m : 형상불완전의 모드를 결정하는 상수로서 본 논문에서는 2로 하였다.

n : 형상불완전의 모드를 결정하는 상수로서 본 논문에서는 3으로 하였다.

r : 반경방향 좌표

a : 돔의 저면에서의 반경

Z : 돔의 임의점의 높이

한편 철근 콘크리트 축대칭 셸의 벽체에서의 불완전형상은 식(19)와 같은 정현곡선으로 가정한다.⁵⁾

$$W_{wn} = W_{w0} \sin \{(n \pi y / \ell)\} \dots\dots(19)$$

여기서 W_{w0} : 벽체의 초기 최대 형상불완전 값

ℓ : 벽체의 높이

y : 벽체 하단으로부터의 거리

n : 형상불완전의 모드를 결정하는 상수로서 본 논문에서는 1로 하였다.

III. 해석에 및 고찰

필자에 의해서 개발된 프로그램을 모델 케이스로서 선정된 철근 콘크리트 격납 건물^{4,5)}이 형상불완전을 갖는 경우의 동적응답 해석에 적용하였다. 원주방향 철근 및 자오선 방향 철근은 등가의 철근층으로 환산되었으며 모델 구조물의 기하학적 형상 및 요소의 분할은 Fig. 1과 같고 사용된 재료의 성질은 Table 1과 같다.

이러한 축대칭 셸에 작용하는 내압은 200tf/m²·rad의 등분포 단계하중(uniformly distributed step load)이 작용하는 경우로 하였다.

Table 1. Material properties

Items	Concrete	Steel
Strength	$f_{ck} = 400\text{kgf/cm}^2$	$f_y = 4000\text{kgf/cm}^2$
Elastic modulus	$2.8 \times 10^6 \text{tf/m}^2$	$2.04 \times 10^7 \text{tf/m}^2$
Poisson's ratio	0.216	0.3
Self-weight	2.5tf/m^3	7.85tf/m^3
Yield criterion	Drucker-Prager	Von Mises

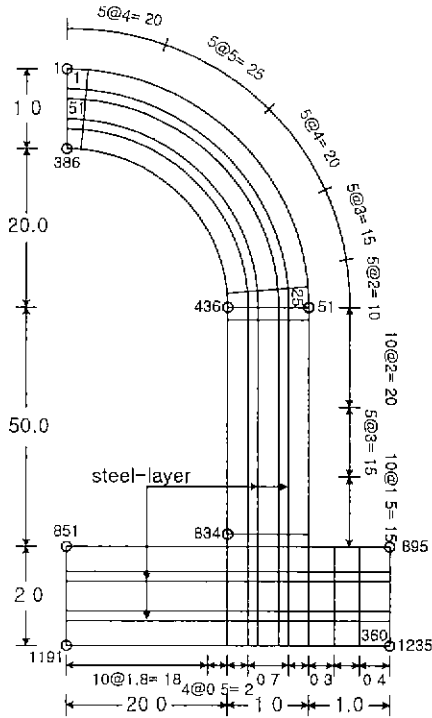


Fig. 1. Mesh generation for analysed structures

형상불완전에 따른 축대칭 셸의 동적응답을 알아보기 위하여 돔 및 벽체의 형상불완전 값을 각각 두께의 5%를 기준으로하여 0.0, -5.0cm(작용중과 반대방향: 내향 형상불완전) 및 5.0cm(작용하중 방향: 외향 형상불완전)로 하였다. 또한 동적응답에 대한 철근의 영향을 알아보기 위하여 철근층의 두께는 철근비 0, 3, 및 5%를 기준으로하여 결정하였다. 여기서 철근비 0%는 철근을 무시하고 균질의 콘크리트만으로 가정한 경우를 의미한다.

먼저 돔 및 벽체에 각각 내향 형상불완전이 있는 경우 동적응답은 Fig. 2와 같다. 돔의 형상불완전은 돔의 동적응답에 크게 영향을 주고 있지만 벽체의 형상불완전은 진동초기 0.01초 까지는 돔의 동적응답에 큰 영향을 미치지 않았다. 그러나 시간이 지남에 따라 형상불완전의 영향은 점점 증가하였고, 0.045초 후 현저한 피크에서의 응답치에는 상당히 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 또

벽체 중앙에서의 반경 방향 변위의 동적응답은 벽체의 형상불완전의 영향을 크게 받고 있지만 돔의 형상불완전의 영향은 거의 받지 않는다는 것을 확인할 수 있었다. 돔 및 벽체에 외향 형상불완전이 있는 경우에도 위와 같은 현상이 발생하였지만 그림의 제시는 생략하였다

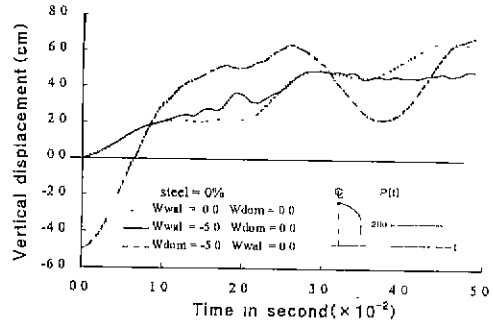


Fig. 2. (a) Time response of vertical displacement at crown due to shape imperfections (without steel)

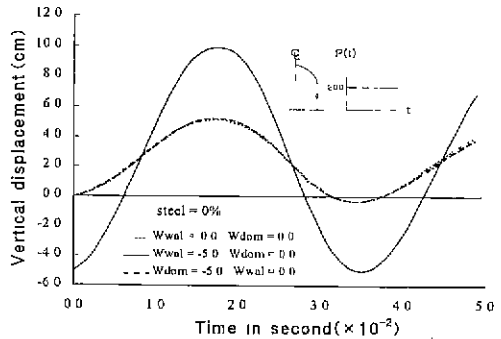


Fig. 2. (b) Time response of vertical displacement at mid-point of wall due to shape imperfections (without steel)

철근비 5%이고 돔 및 벽체에 외향 형상불완전이 있는 경우 동적응답은 Fig 3과 같다. 철근비 0%인 경우에 비해서 벽체의 형상불완전이 돔 정부의 동적응답에 미치는 영향이 크게 나타났다. 그러나 이 경우에도 돔의 결합이 벽체의 동적응답에 미치는 영향은 철근비 0%인 경우와 마찬가지로 거의 나타나지 않았다.

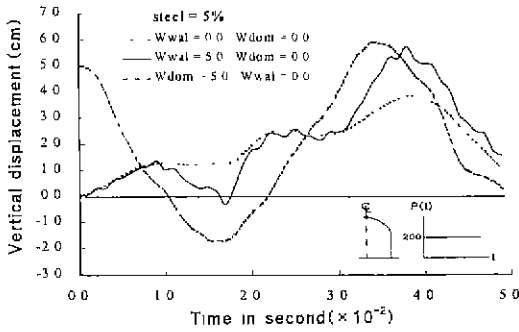


Fig. 3. (a) Time response of vertical displacement at crown due to shape imperfections (steel ratio = 5%)

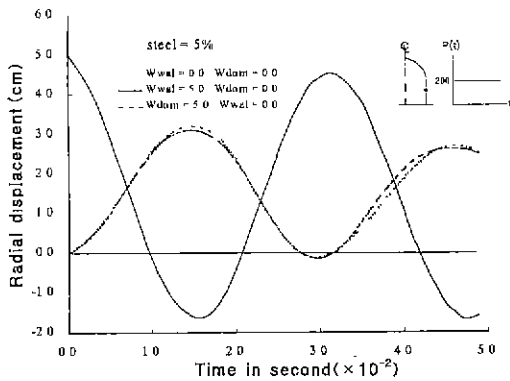


Fig. 3. (b) Time response of vertical displacement at mid-point of wall due to shape imperfections (steel ratio = 5%)

돔 및 벽체에서 내향 형상불완전을 갖는 경우 돔 정부 및 벽체 중앙에서의 철근비에 따른 동적 응답은 Fig. 4와 같다.

응답의 패턴은 모든 철근비에서 유사하였다. 진동 초기 0.017초 까지는 철근비에 따른 영향은 거의 없었지만 시간이 지남에 따라 철근비에 따른 응답에 차이가 나타났고 특히 철근비가 증가할수록 진동주기가 약간씩 짧아지는 경향이 있었다.

돔 및 벽체에서 외향 형상불완전을 갖는 경우 돔 정부 및 벽체 중앙에서의 동적응답은 Fig. 5와 같다.

응답 패턴은 내향 형상 불완전을 갖는 경우와 유사하였지만 철근비의 영향이 진동 초기에서부터 나타났다.

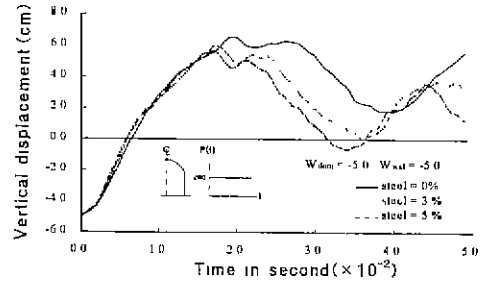


Fig. 4. (a) Time response of vertical displacement at crown due to shape imperfections (dome = -5.0cm, wall = -5.0cm)

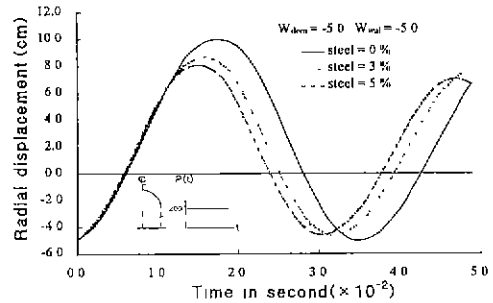


Fig. 4. (b) Time response of vertical displacement at mid-point of wall due to shape imperfections (dome = -5.0cm, wall = -5.0cm)

형상불완전의 조합에 따른 응답 특성은 Fig. 6과 같다.

돔의 응답 특성은 벽체의 형상불완전과는 무관하게 돔의 형상불완전의 방향이 같은 경우 끼리 유사한 특성을 나타냈다. 이는 벽체의 형상불완전이 돔의 응답에 미치는 영향이 크지 않기 때문으로 앞에서 고찰된바와 같다. 그러므로부터 피크값이 가장 큰 형상불완전의 조합은 돔 및 벽체에서 외향 형상불완전을 갖는 경우라는 것을 알 수 있다. 철근비 5%인 경우도 피크값이 증가하는 것이외는 응답 패턴은 유사하였기 때문에 그림의 제시는 생략 하였다.

돔에서의 형상불완전이 벽체의 응답에 거의 영향을 미치지 않기 때문에 벽체의 형상불완전이 같은 경우끼리 동일한 응답 패턴을 보였다. 벽체에서의 형상불완전이 외향인 경우 진동 특성은 형상

불완전이 없는 경우와 유사하였다. 그러나 형상불완전의 방향이 내향인 경우 매우 큰 피크값을 나

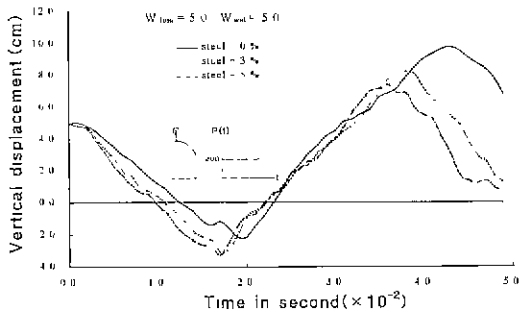


Fig. 5. (a) Time response of vertical displacement at crown due to shape imperfections (dome = 5.0cm, wall = 5.0cm)

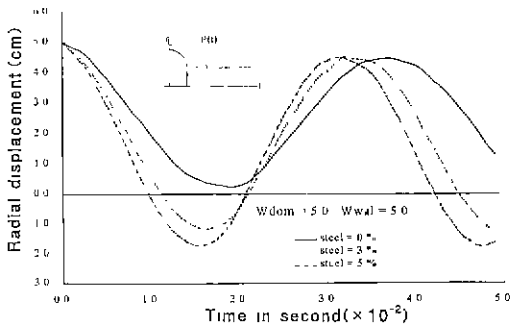


Fig. 5. (b) Time response of vertical displacement at mid-point of wall due to shape imperfections (dome = 5.0cm, wall = 5.0cm)

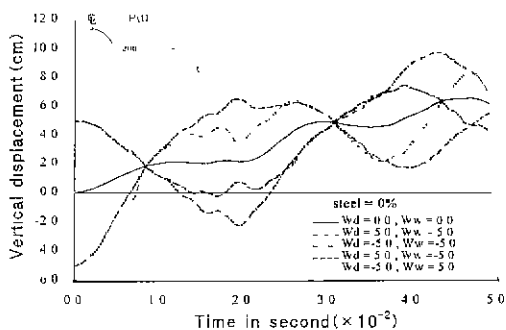


Fig. 6. (a) Time response of vertical displacement at crown due to shape imperfections (without steel)

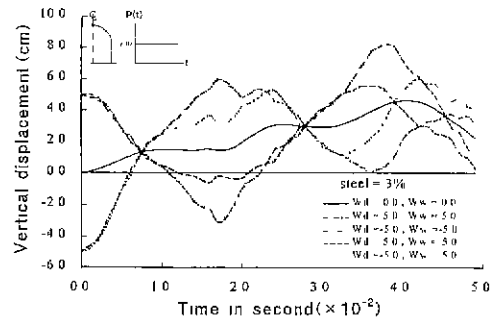


Fig. 6. (b) Time response of vertical displacement at mid-point of wall due to shape imperfections (steel ratio=3%)

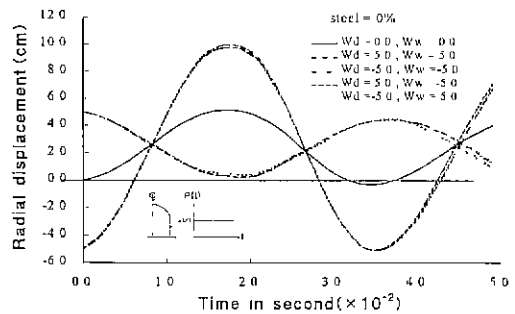


Fig. 7. (a) Time response of radial displacement at crown due to shape imperfections (without steel)

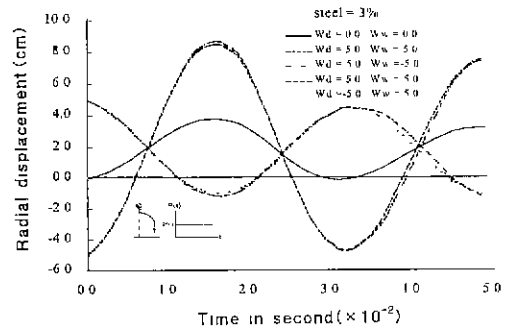


Fig. 7. (b) Time response of radial displacement at mid-point of wall due to shape imperfections (steel ratio=3%)

타냈다. 즉 가장 불리한 경우로 나타났다. 이러한 현상은 철근비 5%의 경우도 유사하였다.

IV. 결 론

본 연구에서는 큰 의적 하중을 받아서 소성변형을 일으키는 철근 콘크리트 축대칭 셸의 돔 및 벽체가 형상불완전을 갖는 경우 이를 고려할 수 있는 프로그램이 개발되었다. 프로그램의 개발에 있어서 돔의 형상불완전은 $W_{di} = W_{d0}(1 - (r/a)^m)^n$ 으로 주어지는 'dimple type'으로 가정하였고 벽체의 형상불완전은 $W_{wi} = W_{w0}\sin[(n\pi y/\ell)]$ 으로 주어지는 정현곡선으로 가정하였다. 유한요소 정식화에서 탄-점소성 모델에 의해서 재료 비선형 효과를 고려하고 기하학적 비선형 효과는 전체 라그랑지안 좌표계에 의해서 고려하였다. 또한 콘크리트의 거동은 Drucker-Prager 항복 기준을 철근은 등가의 두께를 갖는 철근층으로서 이산화시킨후 Von Mises 항복 기준을 적용 하였다. 개발된 프로그램을 모델케이스로 선정된 철근 콘크리트 격납건물이 형상불완전을 갖는 경우의 동적응답 해석에 적용하였다. 수치예에서 형상불완전의 값은 구조물 두께의 5%를 기준으로하여 0.0, -5.0cm(작용하중과 반대방향 : 내향 형상불완전) 및 5.0cm(작용하중방향 : 외향 형상불완전)의 3경우로 하였고 철근층의 두께는 철근비 0, 3, 및 5 %를 기준으로하여 정하였다.

이러한 수치예를 통하여 얻어진 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 돔의 형상불완전이 벽체의 동적응답에 미치는 영향은 거의 없었다. 그러나 벽체의 형상불완전이 돔의 동적응답에 미치는 영향은 진동 초기에는 크지 않았지만 현저한 피크에서의 응답치에는 상당히 큰 영향을 미치고 있었다. 이러한 경향은 철근비가 큰 경우 더욱 현저하였다.
2. 돔의 형상불완전이 내향인 경우에는 진동 초기에는 철근비의 영향이 적게 나타났다. 그러나 돔의 형상불완전이 외향인 경우에는 진동 초기에서부터 철근비의 영향이 있었고 현저한 피크에 도달하는 시간이 약간씩 단축되었다.
3. 돔 및 벽체의 형상불완전이 모두 외향인 경

우 돔의 응답치는 가장 큰 진폭을 나타냈다. 이러한 현상은 모든 철근비에서 유사하였지만 철근비가 증가할수록 피크값이 증가하였다.

4. 벽체의 형상불완전이 내향인 경우 벽체의 피크값은 가장 크게 나타났다. 이러한 현상은 모든 철근비에서 유사하였다.

5. 모든 형상불완전의 조합에서 변위의 응답이 현저한 피크에 도달하는 시간은 철근비가 증가할수록 약간씩 빨라졌다.

참 고 문 헌

1. 조진구, 1996, 탄성 지반상에 놓인 철근 콘크리트 축대칭 셸의 정적 및 동적 해석(II), 한국농공학회지 제38권 제5호, pp. 86~94.
2. 조진구, 1998, 초기처짐을 갖는 Spherical Shell의 동적 특성에 관한 연구(I), 한국농공학회지 제40권 제3호 pp. 113~121.
3. 조진구, 1998, 초기처짐을 갖는 Spherical Shell의 동적 특성에 관한 연구(II), 한국농공학회지 제40권 제5호 pp. 91~99.
4. 조진구, 1999, 초기결함을 갖는 철근 콘크리트 축대칭 셸의 동적 특성, 한국농공학회지 제41권 제4호 pp. 77~85.
5. 조진구, 민정기 2000, 초기결함을 갖는 철근 콘크리트 축대칭 셸의 동적 특성, 한국농공학회지 제42권 제3호 pp. 114~120.
6. 최창근, 노혁천, 1999, 철근콘크리트 냉각탑의 바람하중에 의한 동적거동, 한국농공학회지 제3권 제1호 pp. 99~109.
7. Owen, D. R. J. and E. Hinton, 1980, Finite elements in plasticity, Pineridge Press Limited, Swansea, U. K.
8. James A. Stricklin and Walter E. Haasler, 1983, Formulation and solution procedure for nonlinear structural analysis, Pergamon, Computer & Structures, vol. 7, pp. 125~136.
9. Karan S. Surana, 1983, Geometrically

- nonlinear formulation for the axisymmetric transition finite elements, Pergamon, Computer & Structures, vol. 17 no. 2, pp. 243~255.
10. Zienkiewicz, O. C. and G. G. Nayak, 1971, A general approach to the problems of plasticity and large deformation using isoparametric elements, proc. conf. on matrix methods in structural mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.
11. Marcal, P. V. 1970, Large deflection analysis of elastic-plastic shells of revolution, AIAA, J. vol. 8 no. 9, pp. 629~636.
12. Robert Kao, 1978, Dynamic buckling of axisymmetric spherical caps with initial imperfections, Pergamon, Computer & Structures, vol. 9, pp. 463~473.
13. Robert Kao, 1980, Nonlinear dynamics buckling of spherical caps with initial imperfections, Pergamon, Computer & Structures, vol. 12, pp. 49~63.
14. Wood R.D. and O. C. Zienkiewicz, 1977, Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells, Pergamon, Computer & Structures, vol. 7, pp. 725~735.
15. Stanley Klein, 1965, The linear elastic dynamic analysis of shell of by the matrix displacement method, AFFDL-TR-66-80 Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, pp. 299~325.