

〈논 문〉

# 점탄성 또는 점탄성 감쇠처리된 구조물의 진동 감쇠 해석

## Vibration Damping Analysis of Viscoelastic and Viscoelastically Damped Structures

황 원 재\* · 박 진 무\*\*

Hwang Won-Jae and Park Jin-Moo

(1999년 8월 13일 접수 ; 2000년 1월 6일 심사완료)

**Key Words** : Vibration Damping(진동감쇠), Viscoelastic Damping(점탄성감쇠)

### ABSTRACT

We present finite element equations in the Laplace-domain for linear viscoelastic and viscoelastically damped structures governed by a constitutive equation involving fractional order derivative operators. These equations yield a nonstandard eigenproblem consisted of frequency dependent stiffness matrix. To solve this nonstandard eigenproblem we suggest an eigenvalue iteration procedure in the Laplace-domain. Improved Zenor and GHM material function type constitutive equations in the Laplace-domain are also available for this procedure. From above equations, complex eigenvalues and complex eigenvectors are obtained. Using obtained eigenvalues and eigenvectors, time domain analysis is performed by means of mode superposition. Finally, finite element solutions of viscoelastic and viscoelastically damped sandwich beam are presented as an example.

### 1. 서 론

구조물의 진동을 감쇠시키는 것은 현재 중요한 과제중의 하나이다. 특히 보 또는 평판등과 같이 비교적 크고 유연한 부재로 이루어진 구조물은 작은 가진으로도 큰 진동이 발생할 수 있고 대기권 밖에 있는 인공위성등의 구조물은 진동을 감쇠시킬 수 있는 요인이 부족하므로 자체적으로 진동을 감쇠시킬 수 있는 능력이 필요하다. 진동을 감쇠시키는 방법으로는 크게 능동적인 방법과 수동적인 방법으로 분류할 수 있으며, 수동적인 감쇠방법은 탄성재료에 점탄성 재료를 표면처리하여 사용하는 방법이 한 수단으로서 이용된다. 그러나 점탄성 표면처리된 구조물의 진동특성에 대한 수학적 모델링은 점탄성 재료의 저장 및 손실계수가 주파수와 온도에 따라서 변하는 특

성을 보임으로 인해 쉽지 않은 일들이 되어왔다<sup>(1~3)</sup>.

기존의 관련 연구로서, Bagley와 Torvik등은 점탄성 재료의 물성을 나타낼 수 있는 방법으로서 분수차 미분(fractional order derivative)모델을 개발하고, 샌드위치보의 점탄성층이 전단변형만을 받는 것으로 가정하여 유한요소 진동방정식을 라플라스영역에서 구성하였다<sup>(4~6)</sup>. 분수차미분모델은 점탄성 재료의 주파수영역에서의 복소탄성 계수를 개선된 제너(improved Zenor) 또는 GHM(Golla-Hughes-McTavish)모델에 비해 적은 수의 매개변수를 사용하여 모델링할 수 있는 장점이 있다<sup>(10)</sup>. 해석과정에서는 질량과 강성행렬을 실수로 나타내기 위하여 진동방정식을 변형시키며, 이 과정에서 재구성된 행렬의 차원이 미분차수에 따라서 대응하는 탄성 진동계 행렬에 비해 수배 커지게 된다.

McTavish와 Hughes등은 GHM방법을 개발하였으며, 점탄성 물성을 나타낼 수 있는 GHM모델을 제안하였다<sup>(7~9)</sup>. 이 모델로부터 유한요소 진동방정식을 구성하는 과정에서 다수의 1자유도 진동계를 추가시킨 후, 이것에 대한

\* 정회원, 고려대학교 대학원

\*\* 고려대학교 공과대학 기계공학과

자유도로서 소산좌표(dissipation coordinate)를 정의하였으며, 이 좌표를 변위벡터에 추가시킴으로써 일반적인 감쇠가 있는 진동방정식으로 변환하였다. 기존의 해법을 이용할 수 있는 장점이 있으나, 점탄성 물성을 GHM 모델로 나타내기 위해서는 다수의 소산좌표를 사용하게 되므로 많은 수의 매개변수가 필요하게 되고, 점탄성 재료의 물성을 GHM 모델로만 나타내어야 하며, 또한 최종적으로 구성되는 진동방정식의 질량과 강성행렬의 차원은 이에 대응하는 탄성 진동계 행렬에 비해 사용된 소산좌표 수의 배수로 커지게 된다.

본 연구에서는 점탄성 재료의 물성모델을 강성행렬에 직접 대입하여 유한요소 진동방정식을 구성하고, 질량행렬과 라플라스 변환의 복소변수  $s$ 가 포함된 강성행렬로부터 직접 고유치 해석을 할 수 있는 고유치 반복계산과정과 그 결과를 이용한 강제진동의 해석방법을 제안하였다.  $s$ 가 포함된 강성행렬을 고유치 해석에 직접 이용하므로 인용한 방법들과는 달리 유한요소 진동방정식 행렬의 차원을 대응하는 탄성진동계와 같게 유지할 수 있다. 또한 기존 방법들은 사용하는 물성모델에 따라서 해석방법이 다른 제한이 있으나, 본 연구에서 제안한 과정은 개선된 제너, GHM, 그리고 분수차 미분모델들을 모두 이용할 수 있고,  $s$ 의 함수인 두 개의 물성치[전단과 체적모듈러스(shear and bulk modulus)함수 등]를 강성행렬에 도입하기 쉬운 장점이 있다. 그리고 특별한 경우로서, 푸아송비가 일정한 순수 점탄성 구조물의 고유치 및 강제진동 해석을 대응하는 탄성체의 고유치 해석결과를 이용하여 간단하게 할 수 있는 방법을 제안하였다.

## 2. 선형 점탄성 재료의 특성

선형 점탄성 재료의 일차원 구성방정식은 유전적분(hereditary integral)으로 나타낼 수 있다.

$$\alpha(t) = \int_0^t Y(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1)$$

$Y(t)$ 는 이완계수(relaxation modulus)함수이다. 식 (1)을 라플라스 변환하면

$$\bar{\alpha}(s) = s\bar{Y}(s)\bar{\varepsilon}(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{P(s)}\bar{\varepsilon}(s) \quad (2)$$

이고,  $s\bar{Y}(s)$ 는 점탄성 재료의 모듈러스함수로서 다음과 같은 여러 모델이 있다.

### Improved Zenor model

$$s\bar{Y}(s) = q_0 + \sum_i \frac{q_i s}{s + E_i/\eta_i} \equiv q_0 + s\bar{y}(s) \quad (3)$$

### GHM model

$$s\bar{Y}(s) = E^\infty \left\{ 1 + \sum_k \alpha_k \frac{s^2 + 2\zeta_k \hat{\omega}_k s}{s^2 + 2\zeta_k \hat{\omega}_k s + \hat{\omega}_k^2} \right\} \quad (4)$$

$$\equiv q_0 + s\bar{y}(s)$$

### Dissipation coordinate

$$\bar{z}_k(s) = \frac{\hat{\omega}_k^2}{s^2 + 2\zeta_k \hat{\omega}_k s + \hat{\omega}_k^2} \bar{q}(s)$$

### 3-parameter fractional order model

$$s\bar{Y}(s) = q_0 + q_1 s^\alpha \equiv q_0 + s\bar{y}(s) \quad (5)$$

### 4-parameter fractional order model

$$s\bar{Y}(s) = q_0 + \frac{(q_1/p_1 - q_0)s^\alpha}{s^\alpha + 1/p_1} \equiv q_0 + s\bar{y}(s) \quad (6)$$

식 (3)~(6)의  $s\bar{y}(s)$ 는 각 모델의 모듈러스 함수에서 주파수에 따라 변하는 항을 간략하게 나타낸 것이다. 분수차 미분의 정의는

$$D^\alpha[x(t)] = \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (0 < \alpha < 1)$$

이고, 이러한 미분연산자를 라플라스 변환하면

$$L[D^\alpha x(t)/dt^\alpha] = s^\alpha L[x(t)] \quad (8)$$

이며,  $L[\cdot]$ 은 라플라스 변환을 의미한다. 분수차 미분 모델은 이러한 미분개념을 이용하여 주파수영역에서 재료의 모듈러스함수를 다른 모델에 비해 적은 수의 매개변수를 사용하여 나타낼 수 있다. 복소탄성계수  $Y^*(\omega)$ 는 모듈러스 함수의 복소평면상의 허수축에서의 값이며

$$Y^*(\omega) = j\omega\bar{Y}(j\omega) = Y'(\omega) + jY''(\omega) \quad (9)$$

$$\eta(\omega) = Y''(\omega)/Y'(\omega) \quad (10)$$

이고, 여기서,  $Y'(\omega)$ 는 저장계수,  $Y''(\omega)$ 는 손실계수, 그리고  $\eta(\omega)$ 는 손실률(loss factor)이다.

## 3. 유한 요소 정식화

### 3.1 선형 점탄성재료의 구성방정식의 계수 행렬

탄성-점탄성 대응원리, 식 (11), (12)와 탄성 재료의 구성방정식, 식 (13)을 이용하여 선형 점탄성 재료의 구성방정식의 계수 행렬을 식 (14)와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{Q^A}{P^A} = \frac{1}{3} \left( \frac{Q^K}{P^K} - \frac{Q^G}{P^G} \right) - \lambda = \frac{1}{3} (3K - 2G) \quad (11)$$

$$\frac{Q^A}{P^A} + \frac{Q^G}{P^G} = \frac{1}{3} \left( \frac{Q^K}{P^K} + 2 \frac{Q^G}{P^G} \right) - \lambda + 2G = \frac{1}{3} (3K + 4G) \quad (12)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (13)$$

$$[C^*] = \begin{bmatrix} \frac{Q^{\lambda G}}{P^{\lambda G}} & \frac{Q^A}{P^A} & \frac{Q^A}{P^A} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{Q^{\lambda G}}{P^{\lambda G}} & \frac{Q^A}{P^A} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{Q^{\lambda G}}{P^{\lambda G}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{Q^G}{P^G} & 0 & 0 \\ & Sym. & & & \frac{Q^G}{P^G} & 0 \\ & & & & & \frac{Q^G}{P^G} \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서,  $Q^{\lambda G}/P^{\lambda G}$  는  $(Q^A/P^A + Q^G/P^G)$  이며, 식 (3)~(6)의 형식을 이용하여 점탄성 재료의 체적과 전단모듈러스함수를 간략하게 나타내면

$$\frac{\bar{Q}^K(s)}{P^K(s)} = s \bar{Y}^K(s) = q_0^K + s \bar{y}^K(s) \quad (15)$$

$$\frac{\bar{Q}^G(s)}{P^G(s)} = s \bar{Y}^G(s) = q_0^G + s \bar{y}^G(s) \quad (16)$$

이고, 식 (15)와 (16)을 식 (14)에 대입하여 라플라스영역에서 선형 점탄성 재료의 구성방정식의 계수 행렬을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$[C^*(s)] = \frac{1}{3} (q_0^K - q_0^G + s \bar{y}^K(s) - s \bar{y}^G(s)) [M_\lambda] + (q_0^G + s \bar{y}^G(s)) [M_G] \quad (17)$$

여기서,

$$[M_\lambda] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[M_G] = \text{diag} [ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 ] \quad (19)$$

이다. 점탄성 재료의 푸아송비를 일정한 실수로 가정하면 주파수영역에서 종, 전단, 그리고 체적 모듈러스간의 비가 일정하게 되고, 체적모듈러스를 일정한 실수로 가정하면 푸아송비가 복소수가 되며 또한 주파수에 따라 변하게 된다. 따라서 실제 정확한 해석을 위해서는 점탄

성 재료의 구성방정식의 계수 행렬에 주파수영역에서 나타낸 두 개의 모듈러스함수가 필요하다. 그러나 이러한 점탄성 재료의 물성을 이상화하여 푸아송비나 체적탄성 계수중 하나를 일정한 것으로 단순화할 경우, 문제의 본질을 크게 변화시키지 않으면서 계산상의 유리함과 근사적인 결과를 얻을 수 있는 이점이 있다. 푸아송비를 일정한 것으로 단순화 하면

$$\frac{\bar{Q}^C(s)}{P^C(s)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\bar{Q}^E(s)}{P^E(s)} \quad (20)$$

이므로, 식 (17)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[C^*(s)] = \frac{\bar{Q}^E(s)}{P^E(s)} [C_1] \quad (21)$$

여기서,  $[C_1]$  은 탄성계수가 1인 탄성체의 구성방정식의 계수 행렬이다. 체적모듈러스를 일정한 것으로 단순화하는 것은 점탄성 구조물의 크립(creep)을 해석할 때 주로 사용하는 가정이며

$$\frac{\bar{Q}^K(s)}{P^K(s)} = 3K \quad (22)$$

이므로, 식 (17)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[C^*(s)] = \left( K - \frac{q_0^G}{3} \right) [M_\lambda] + q_0^G [M_G] - \frac{1}{3} s \bar{y}^G(s) [M_\lambda] + s \bar{y}^G(s) [M_G] \quad (23)$$

### 3.2 유한요소 정식화

구성방정식의 계수 행렬, 식 (17)을 이용하여 유한요소 진동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [K^*] \{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (24)$$

여기서,  $[M]$  은 질량행렬,  $\{Q(t)\}$  는 외력벡터, 그리고  $\{q(t)\}$  는 각 노드에서의 변위이다. 외력이 없는 경우, 식 (24)는 다음의 동차방정식이 된다.

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [K^*] \{q(t)\} = \{0\} \quad (25)$$

여기서,  $[K^*]$  는 식 (14)의  $[C^*]$  를 유한요소 전체에 대해 조합한 강성행렬(assembly global stiffness matrix)이다.

## 4. 선형 점탄성 구조물의 고유치 해석

### 4.1 고유치 문제의 정의

식 (26)을 식 (25)에 대입하여 라플라스 변환을 하면,

선형 점탄성 재료의 고유치 문제를 식 (27)과 같이 나타낼 수 있고

$$\{q(t)\} = \{u^*\} f(t) \quad (26)$$

$$[s^2[M] + [K^*(s)]]\{u^*\} = \{0\} \quad (27)$$

식 (27)의  $[K^*(s)]$ 는 다음과 같다.

$$[K^*(s)] = \frac{1}{3} (q_0^K - q_0^G) [K_\lambda] + q_0^G [K_G] + \frac{1}{3} (s\bar{y}^K(s) - s\bar{y}^G(s)) [K_\lambda] + s\bar{y}^G(s) [K_G] \quad (28)$$

여기서,  $[K_\lambda]$ 와  $[K_G]$ 는  $[M_\lambda]$ 와  $[M_G]$ 를 유한요소 전체에 대해 조합한 행렬이다. 식 (27)의 특별한 경우로서 푸아송비가 일정한 점탄성 구조물의 경우 식 (25)를 다음과 같이 나타낼 수 있다<sup>(11)</sup>.

$$[M]\{u\} \ddot{f}(t) + \frac{Q^E}{P^E} [K_1]\{u\} f(t) = \{0\} \quad (29)$$

$[K_1]$ 은 식 (21)의  $[C_1]$ 을 유한요소 전체에 대해 조합한 강성행렬이며, 식 (29)가 해를 갖기 위해서는 다음과 같은 조건이 성립 되어야 한다.

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\frac{Q^E}{P^E} \sum_{j=1}^n K_{1ij} u_j}{\sum_{j=1}^n M_{ij} u_j} = \frac{Q^E}{P^E} \Lambda^2 \quad (30)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

식 (30)으로부터 푸아송비가 일정한 점탄성 구조물의 고유치문제가 다음과 같이 유도된다.

$$s^2 + \frac{\bar{Q}^E(s)}{P^E(s)} \Lambda^2 = s^2 + s\bar{Y}(s) \Lambda^2 = 0 \quad (31)$$

$$[K_1]\{u\} = \Lambda^2 [M]\{u\} \quad (32)$$

#### 4.2 고유치 반복계산과정

식 (27)로 정의되는 고유치 문제는 강성행렬이 주파수에 따라 변하는 특성이 있는 비정상적인 고유치 문제(nonstandard eigenproblem)이며, 이 문제를 해석하기 위하여 다음과 같은 고유치 반복계산과정<sup>(12)</sup>을 제안한다.

① 단계 :  $s = 0$ 을 식 (27)의 강성행렬  $[K^*(s)]$ 에 대입한 후  $r$ 번째 모드의 고유치  $\Lambda_r^{*2}$  계산.

② 단계 : 식 (33)과 (34)를 이용하여  $r$ 번째 모드의 감쇠고유진동수  $s_r$  계산.

$$s_r^2 = -\Lambda_r^{*2} \quad (33)$$

$$s_r = -\sqrt{s_r^2} \quad : \quad -SQRT(s_r^2) \quad (34)$$

① 단계에서는 탄성계수가  $q_0$ 인 탄성 구조물의 고유치가 계산되며, 계산된 고유치중에서 관심이 있는  $r$ 번째 모드의 고유치  $\Lambda_r^{*2}$ 에 대하여

③ 단계 : ② 단계에서 계산된  $s = s_r$ 을 식 (27)의 강성행렬  $[K^*(s)]$ 에 재대입한 후 고유치  $\Lambda_r^{*2}$  재계산.

④ 단계 : ② 단계~③ 단계를 6 또는 7회 반복.

⑤ 단계 : 고유벡터  $\{u^*\}$ , 계산.

여기서,  $-s_r^2$ 은 점탄성 구조물의  $r$ 번째 고유치이며,  $s_r$ 은  $r$ 번째 감쇠 고유진동수(damped natural frequency)이다.

#### 4.3 제곱근 반복계산과정

푸아송비가 일정한 점탄성 구조물의 경우, 식 (32)는 탄성계수가 1이고 감쇠가 없는 탄성체의 고유치 문제와 형태가 동일하며, 결과적으로 푸아송비가 일정한 선형 점탄성 구조물의 고유벡터는 이에 대응하는 탄성체의 고유벡터와 같은 것으로 분석된다. 고유치 해석을 위해, 점탄성 재료의 모듈러스함수와 식 (32)에서 계산된  $r$ 번째 고유치 ( $\Lambda_r^2$ )를 식 (31)에 대입하여 라플라스영역에서의 특성방정식(modal equation)을 구할 수 있으며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$s_r^2 + s_r \bar{Y}(s_r) \Lambda_r^2 = 0 \quad (35)$$

식 (35)와 식 (3)~(6)을 이용하여  $s_r$ 을 계산하는 과정에서 분수차 미분모델의 경우  $\alpha$ 가 1/2인 경우에 식 (35)로부터 각각의  $\Lambda_r^2$ 에 대해  $r$ 번째의 감쇠고유진동수를 다음과 같이 계산할 수 있으나

$$s_r = -\gamma_r \pm j\nu_r \quad (36)$$

$\alpha$ 가 1/2 이외의 분수이거나 개선편 제너모델과 GHM 모델의 경우에는 라플라스영역에서 고차방정식의 형태가 되어 고유치 계산에 어려움이 따른다. 이러한 어려움을 피하고 다양한 형태의 점탄성 모듈러스함수에 공통적으로 사용하기 위해 다음과 같은 제곱근 반복계산과정을 제안한다.

식 (35)는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$s_r^2 = -s_r \bar{Y}(s_r) \Lambda_r^2 \quad (37)$$

$r$ 번째 모드에 대하여

① 단계 : 식 (37)의 우변에  $s = 0$ 을 대입한 후 식

(37)과 (34)를 이용하여  $s_r$  계산.

② 단계 : 계산된  $s_r$ 을 식 (37)의 우변에 대입한 후 식 (37)과 (34)를 이용하여  $s_r$  계산.

③ 단계 : ②단계를 6~7회 반복

점탄성 재료의 모듈러스는 주파수가 증가함에 따라 증가하는 경향을 보이거나 증가율은 점점 감소하므로 6회 정도의 반복계산으로 감쇠고유진동수가 수렴된다.

### 5. 점탄성 감쇠 처리된 구조물의 고유치 해석

감쇠처리된 구조물의 유한요소 강성행렬은 금속과 점탄성 재료의 두 부분으로 구성되어 있으며, 금속재료의 탄성계수는 일정한 반면에 점탄성 재료의 모듈러스는 주파수에 따라 변하는 특성을 보이고 있다. 이러한 구조물의 고유치 해석을 위하여 강성행렬을 다음과 같이 구성한다. 식 (3)~(6)의 모듈러스함수를 식 (27)에 대입하여 유한요소 전체의 강성행렬을 구성하면 다음과 같다.

$$[K^*(s)] = [K_0^E] + s\bar{y}(s)[^0_1] \quad (38)$$

여기서, 편의상 푸아송비는 일정한 것으로 가정하였고,  $[K_0^E]$ 는 금속재료의 탄성계수를  $E$ 로 점탄성재료의 탄성계수를  $a_0$ 로 대입하여 구성한 강성행렬이며,  $[^0_1]$ 은 금속재료의 탄성계수를 0으로, 점탄성재료의 탄성계수를 1로 대입하여 구성한 강성행렬이다. 푸아송비가 주파수에 따라 변화하는 점탄성 재료로 감쇠 처리된 구조물의 경우, 식 (17)을 이용하여 각 요소의 강성행렬을 구성하고 전체 요소에 대해 조합하여  $[K^*(s)]$ 를 구성한다. 이러한 고유치문제는 식 (27)과 같은 형태이므로 고유치 반복계산과정을 이용하여 해석한다.

### 6. 강제 진동 해석

진동방정식, 식 (24)를 라플라스 변환하면

$$s^2[M]\{\bar{q}(s)\} + [K^*(s)]\{\bar{q}(s)\} = \{\bar{Q}(s)\} \quad (39)$$

이고, 식 (28)을 이용하여, 식 (39)의 강성행렬을 나타내면 다음과 같다.

$$[K^*(s)] = [K_0] + [sk^*(s)] \quad (40)$$

여기서,

$$[K_0] = \frac{1}{3}(a_0^k - a_0^c)[K_{\lambda}] + a_0^c[K_C] \quad (41)$$

$$[sk^*(s)] = \frac{1}{3}(\bar{sy}^k(s) - \bar{sy}^c(s))[K_{\lambda}] + \bar{sy}^c(s)[K_C] \quad (42)$$

이다. 식 (40)을 이용하여, 식 (39)를 다음과 같은 1차식 형태로 나타낼 수 있다.

$$s \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K_0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{s\bar{q}(s)\} \\ \{a(s)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k^*(s)] & [K_0] \\ [K_0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{s\bar{q}(s)\} \\ \{a(s)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{Q}(s)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

외력이 없을때 식 (39)로부터  $s_r = -\gamma_r - j\nu_r$ 의 감쇠고유진동수와  $\{u\}_r$ 의 고유벡터가 고유치 반복계산과정에 의해 계산되며,  $s_r$ 의 복소공액수인  $\bar{s}_r$ 을 식 (27)의  $[K^*(s)]$ 에 대입하여  $\{\bar{u}\}_r$ 이 계산된다. 한편, 식 (43)으로부터는  $s_r = -\gamma_r - j\nu_r$ 과  $\bar{s}_r = -\gamma_r + j\nu_r$ 의 고유치와  $\begin{Bmatrix} [sv] \\ [v] \end{Bmatrix}_r^T$ 와  $\begin{Bmatrix} [\bar{sv}] \\ [\bar{v}] \end{Bmatrix}_r^T$ 의 고유벡터가 각각 계산되며, 두 경우에서 정규화된 고유벡터  $\{u\}_r$ 과  $\{v\}_r$ 은 동일하다. 그러나 이러한 점탄성 재료의 고유벡터  $\{u\}_r$ 과  $\{u\}_s$ , 그리고 고유치  $-s_r^2$ 과  $-\bar{s}_s^2$ 에 대해서, 고유벡터들은 질량과 강성행렬에 대해 다음과 같은 직교성 조건을 갖는다.

$$(s_r^2 - s_s^2)\{u\}_s^T [M] \{u\}_r + \{u\}_s^T [K^*(s_r) - K^*(s_s)] \{u\}_r = 0 \quad (r \neq s) \quad (44)$$

이러한 직교성 조건으로 인해 점탄성 구조물의 고유벡터 행렬은 식 (39) 또는 (43)을 엄밀한 의미로 비연성화시킬 수 없다. 그러나 이 고유벡터 행렬을 이용하여 운동방정식을 모드좌표로 변환할 때, 변환된 행렬의 비대각 성분은 대각 성분에 비해 무시할 만한 것으로 가정하여, 다음과 같이 직교성을 유지하는 것으로 근사시킨다.

$$\begin{bmatrix} [sv] \\ [v] \end{bmatrix}_r^T \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K_0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [sv] \\ [v] \end{bmatrix}_r \approx [I] \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} [sv] \\ [v] \end{bmatrix}_r^T \begin{bmatrix} [k^*(s)] & [K_0] \\ [K_0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [sv] \\ [v] \end{bmatrix}_r \approx \text{Diag}[-\Lambda_r^*] \quad (46)$$

여기서,  $\Lambda_r^*$ 은 식 (43)에서 계산된 고유치이며 식 (39)의 동차식에서 계산된 감쇠고유진동수와 같다. 식 (43)의 시간영역에서의 해는 다음과 같고

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [sv] \\ [v] \end{bmatrix} \{z(t)\} + \begin{bmatrix} [\bar{sv}] \\ [\bar{v}] \end{bmatrix} \{\bar{z}(t)\} \quad (47)$$

여기서,  $\bar{\sim}$ 은 공액복소수(complex conjugate)를 의미한다. 식 (47)을 식 (43)에 대입하고  $\begin{bmatrix} [sv] \\ [v] \end{bmatrix}_r^T$ 를 양변에 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{z}_r(t) - \Lambda_r^* z_r(t) = \{sv\}_r^T \{Q(t)\} \quad (48)$$

$$\dot{\bar{z}}_r(t) - \bar{\Lambda}_r^* \bar{z}_r(t) = \{sv\}_r^T \{Q(t)\} \quad (49)$$

식 (48)과 (49)의 특이해는 다음과 같고

$$z_r(t) = z_r(0)e^{\Lambda_r^* t} + \int_0^t e^{\Lambda_r^*(t-\tau)} \{sv\}_r^T \{Q(\tau)\} d\tau \quad (50)$$

여기서, 초기조건은 다음과 같다.

$$z_r(0) = \left\{ \begin{matrix} \{sv\} \\ \{v\} \end{matrix} \right\}_r^T \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K_0] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \dot{q}(0) \\ q(0) \end{matrix} \right\} \quad (51)$$

식 (47)과 초기조건 식 (51)을 이용하여 시간영역에서의 변위  $\{q(t)\}$ 를 해석할 수 있다. 푸아송비가 일정한 점탄성 재료로 감쇠처리된 구조물의 경우도 같은 방법으로 해석한다.

푸아송비가 일정한 순수 점탄성 구조물의 경우에는 고유벡터가 탄성체의 것과 같으므로, 식 (52)의 동차해를 이용하여 식 (39)를 라플라스영역에서 비연성 특성방정식들로 변환할 수 있다.

$$\{q(t)\} = [u] \{z(t)\} \quad (52)$$

$$\left( s^2 + \frac{\bar{Q}^E(s)}{\bar{P}^E(s)} \Lambda_r^2 \right) \bar{z}_r(s) = \{u\}_r^T \{\bar{Q}(s)\} \quad (53)$$

여기서,  $\{u\}_r$ 은 모드벡터(modal vector),  $[u]$ 는 모드행렬(modal matrix), 그리고  $\Lambda_r^2$ 은  $[K_1]$ 과  $[M]$ 의  $r$ 번째 고유치이다. 식 (53)에서 라플라스영역에서  $\bar{z}_r(s)$ 를 다음과 같이 구할 수 있으나

$$\bar{z}_r(s) = \frac{\{u\}_r^T \{\bar{Q}(s)\}}{\left( s^2 + \frac{\bar{Q}^E(s)}{\bar{P}^E(s)} \Lambda_r^2 \right)} \quad (54)$$

역라플라스 변환을 하여  $z_r(t)$ 를 계산하는 것은 간단하지 않다. 여기서, 식 (53)으로부터 모드좌표상에서의 변위,  $z_r(t)$ 를 해석하기 위해 식 (55), 즉 고유치 해석을 통해 계산된 감쇠 고유진동수를 이용하여 식 (53)을 식 (56)과 같이 모드좌표에서 감쇠가 있는 진동방정식으로 가정한다.

$$\Lambda_r^* = -\gamma_r + j\nu_r, \quad \bar{\Lambda}_r^* = -\gamma_r - j\nu_r \quad (55)$$

$$(s - \Lambda_r^*)(s - \bar{\Lambda}_r^*) \bar{z}_r(s) = \{u\}_r^T \{\bar{Q}(s)\} \quad (56)$$

식 (56)의 좌변은 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} (s - \Lambda_r^*)(s - \bar{\Lambda}_r^*) &= s^2 + 2\gamma_r s + (\gamma_r^2 + \nu_r^2) \\ &= s^2 + 2\xi_r \omega_r s + \omega_r^2 \end{aligned} \quad (57)$$

기존의 방법으로  $z_r(t)$ 를 계산할 수 있으며, 모드중첩을 이용하여 식 (52)의 시간영역에서의 변위  $\{q(t)\}$ 를 해석한다.

## 7. 예 제

### 7.1 고유치 해석

점탄성 외팔보와 외팔샌드위치보의 감쇠 고유진동수를 해석 하였다. 보의 기하학적 형상과 물성은 Fig. 1과 Fig. 2, 그리고 Table 1<sup>(10)</sup>과 Table 4에 나타내었으며, 해석결과는 Table 5에 나타내었다.

보의 유한요소모델은 각 노드에서 변위자유도만으로 정의된 보요소를 이용하여 구성하였으며<sup>(13)</sup>, Fig. 3에 이

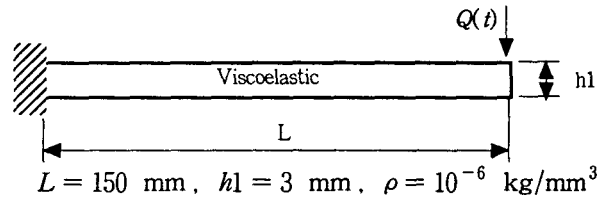


Fig. 1 Cantilevered viscoelastic beam

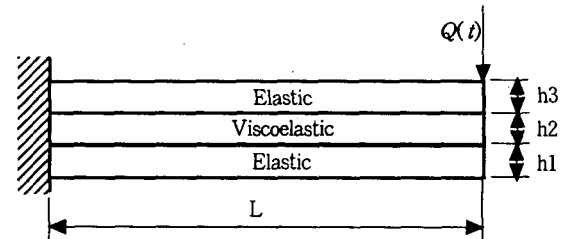


Fig. 2 Cantilevered sandwich beam

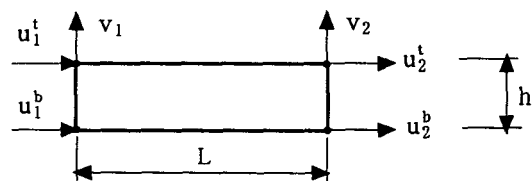


Fig. 3 Four-noded beam element with six degrees of freedom

Table 1 Viscoelastic material properties

	4-parameter
$q_0$ [Pa]	40000000
$q_1$	894427
$p_1$	0.002236
$\alpha$	0.5

Table 2 GHM material properties  
(2 dissipation coordinates)

$i$	$\alpha_i$	$\hat{\omega}_i$	$\hat{\xi}_i$
1	0.6000	$1.2592 \times 10^5$	15.512
2	1.7881	$6.5347 \times 10^5$	10.477
$E^\infty$	$5.6490 \times 10^7$ [Pa]		

Table 3 GHM material properties  
(4 dissipation coordinates)

$i$	$\alpha_i$	$\hat{\omega}_i$	$\hat{\xi}_i$
1	0.2293	$2.1642 \times 10^4$	27.952
2	0.4203	$8.1371 \times 10^4$	18.625
3	0.8815	$3.1209 \times 10^5$	14.647
4	2.5646	$1.5211 \times 10^6$	11.819
$E^\infty$	$4.5178 \times 10^7$ [Pa]		

Table 4 Geometry and material data for cantilevered sandwich beam

	Elastic	Viscoelastic
Material modulus [Pa]	$200 \times 10^9$	Table 1
Mass density [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]	7000	1000
Poisson's ratio	0.3	0.4
$h_1, h_2, h_3$ [mm]	1	
$L$ [mm]	300	
Beam width [mm]	10	

Table 5 Damped natural frequencies  
(unit : rad./s)

	Viscoelastic beam	Sandwich beam
1 st	$-1.0 \pm j 28.0$	$-2.7 \pm j 188.2$
2 nd	$-15.0 \pm j 184.8$	$-53.9 \pm j 885.4$
3 rd	$-67.6 \pm j 547.2$	$-184.2 \pm j 2063.1$

요소를 도시하였고, 요소망은 보요소를 두께방향으로 3층 적층시킨 후, 길이방향으로 16개를 사용하여 구성하였다.

Table 2와 Table 3은<sup>(8)</sup> Table 1의 점탄성 물성을 식 (4)의 GHM모델로 나타낸 것이며, Table 2는 7개의 매개변수를, Table 3은 13개의 매개변수를 사용한 것이다. Fig. 4에 주파수영역에서의 모듈러스를 도시하였으며,

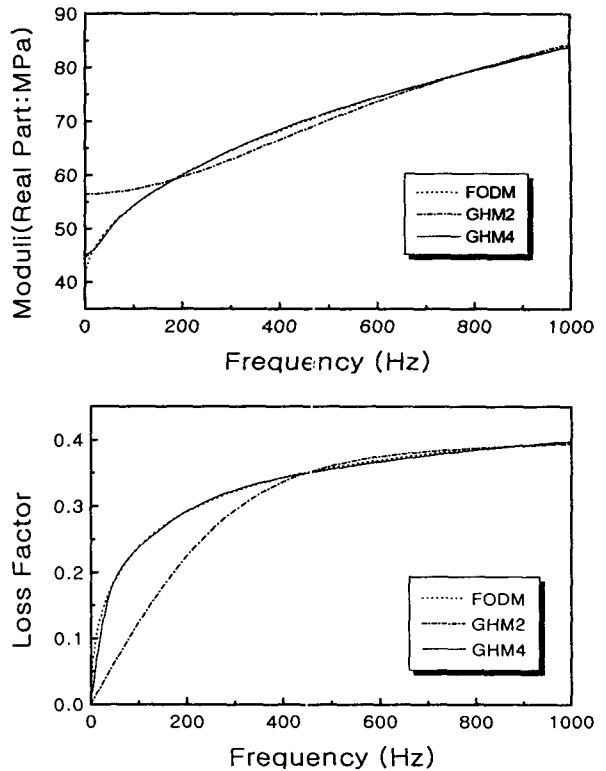


Fig. 4 Modulus of 4-parameter FOD and GHM models

Table 1의 분수차미분모델을 FODM으로, Table 2의 GHM모델을 GHM2, Table 3의 GHM모델을 GHM4로 나타내었다. 그림에 나타난 바와 같이 GHM모델은 사용하는 매개변수의 수가 많을수록 점탄성 재료의 물성을 나타낼 수 있는 대역이 넓어진다.

### 7.2 강제진동 해석

점탄성 외팔 보와 외팔 샌드위치 보의 정상상태 응답 (steady state response)과 계단입력응답(step response)을 해석하였다. 모드좌표에서 감쇠가 있는 진동방정식으로 가정, 식 (56) 그리고 직교성 가정, 식 (45)와 (46)을 검증하기 위하여, 식 (56) 또는 식 (48)과 (49)를 이용하여 각 모드좌표에서 주파수응답을 해석하고 모드중첩시켜 나타낸 결과와 직접주파수응답(direct frequency response)법<sup>(14)</sup>을 사용한 결과를 비교하였다. 모드중첩에는 10개의 모드를 사용하였으며, 그 결과를 점탄성 외팔 보의 경우 Fig. 5에, 그리고 외팔샌드위치보의 경우 Fig. 6에 'Modal'로 나타내었고, 직접주파수응답법의 결과는 Fig. 5와 6에 'Direct'로 나타내었다. 그림에서 두 결과는 거의 일치하고 있으며, 이것은 제안한 고유치 해석방법과 모드좌표에서 감쇠가 있는 진동방정식으로서의 가정 그리고 직교성 가정의 유효함을 의미한다.

직접주파수응답법은 다음과 같다.

$$\{q(j\omega)\} = \{[K^*(j\omega)] - \omega^2[M]\}^{-1}\{Q_0\} \quad (58)$$

여기서,  $Q(t) = Q_0 e^{j\omega t}$  이고, Fig. 1과 Fig. 2에 가진 위치를 나타내었으며, 샌드위치 보의 경우  $Q_0 = 0.01[M]$ , 점탄성 보의 경우  $Q_0 = 0.0001[M]$  을 이용하였다.

이 방법은 주파수영역에서 점탄성 구조물의 정상상태 응답을 예측할 수 있는 기존의 통상적인 해법이나, 관심이 있는 주파수의 대역폭과 해상도( $\Delta\omega$ )에 따라서 계산량이 방대해지고, 가진점의 위치에 따라서 같은 계산을 반복해야 하며, 또한 시간영역의 해석에는 적용할 수 없는 단점이 있다. 반면에 본 연구에서 제안한 방법은 해석된 고유치와 고유벡터를 이용하므로 계산량적인 면에서 효율적인 것으로 사료되며, 시간영역의 해석이 가능하다.

Fig. 7과 Fig. 8은 직접주파수응답법의 강성행렬에 분수차 미분모델과 GHM모델을 대입하여 해석한 결과를 도시한 것이다. GHM모델의 경우 좋은 결과를 얻기 위해서는 사용하는 매개변수의 수가 많아야 하며, 이것은 GHM방법에서 행렬의 차원이 커지는 원인이 된다.

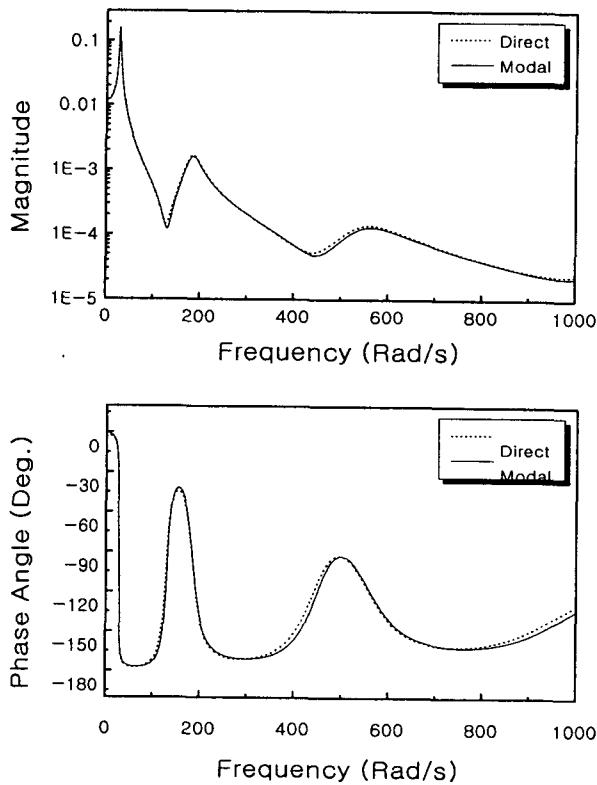


Fig. 5 Frequency responses of viscoelastic beam (direct frequency response and mode superposition)

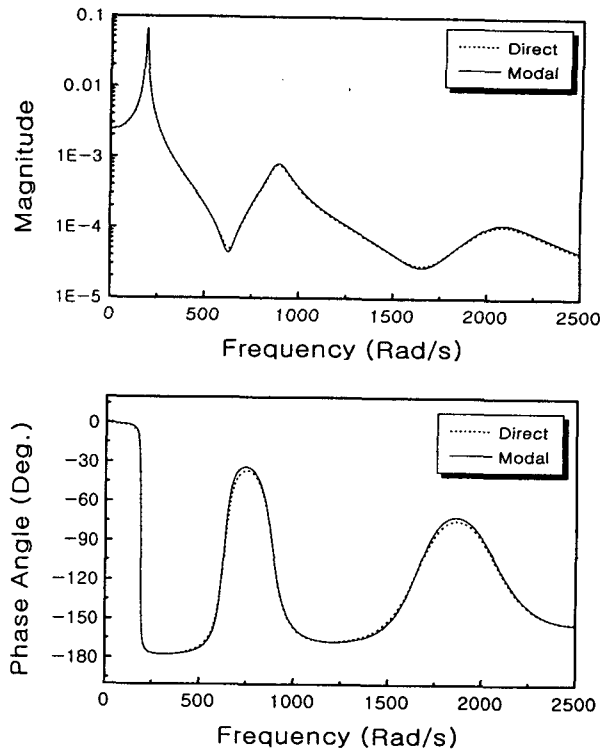


Fig. 6 Frequency responses of sandwich beam (direct frequency response and mode superposition)

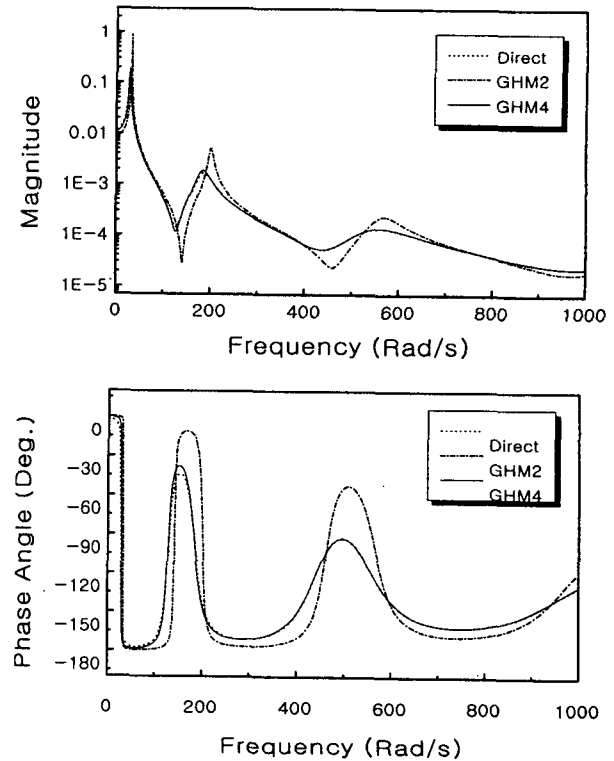


Fig. 7 Direct frequency responses of viscoelastic beam (4-parameter FOD and GHM models)