

< 논 문 >

# 유한요소-전달행렬법에 의한 스크롤 압축기 크랭크축의 과도 동적 해석

## Transient Dynamic Analysis of Scroll Compressor Crankshaft Using Finite Element-Transfer Matrix Method

김 태 종\*

Tae-Jong Kim

(1999년 9월 13일 접수 : 1999년 11월 29일 심사완료)

**Key Words** : Scroll Compressor(스크롤 압축기), Crankshaft(크랭크축), Balancer Weight(균형추), Journal Bearing (저널 베어링), Transient Dynamic Analysis(과도 동적 해석), Finite Element-Transfer Matrix Method(유한요소-전달행렬법), Houbolt Scheme(Houbolt 적분방법)

### ABSTRACT

The dynamic behavior of crankshaft-bearing system in scroll compressor has been investigated using the combined methodologies of finite elements and transfer matrices. The finite element formulation is proposed including the field element for a shaft section and the point element at balancer weight locations, bearing locations, etc., whereas the conventional method is used with two elements. The Houbolt method is used to consider the time march for the integration of the system equations. The linear stiffness and damping coefficients are calculated for a finite cylindrical fluid-film bearing by solving the Reynolds equation, using finite difference method. The orbital response of crankshaft supported on the linear bearing model is obtained, considering balancer weights of motor rotor. And, the steady state displacements of crankshaft are compared with a variation in balancer weight. The loci of crankshaft at bearing locations are composed of the synchronous whirl component and the non-synchronous whirl component.

### 1. 서 론

대부분의 회전축 시스템에서 동적 거동은 각 운전 회전수에서의 정상상태 진폭의 값으로 주파수 영역에서 해석된다. 이 방법은 정상상태에서의 축의 동적 거동 해석에는 적합하지만 임계속도 및 불안정 한계 속도 부근에서 축의 순간적인 거동을 해석할 수 없다. 과도적인 조건에서 축계의 시간 변화 휘들림(whirl) 궤적 해석은 시

간 경과의 접근을 필요로 하며, 이 궤적은 상대적으로 큰 진폭을 가지므로 과도 해석은 비선형 문제까지 확장되어야 한다. 시간영역에서의 비선형 회전축 시스템의 동적 해석은 유한요소법<sup>(1,2)</sup>이 유일하게 검증된 방법으로 알려져 있다. 하지만, 이 방법은 회전축의 동적 자유도가 증가하면 과도한 계산시간 및 비용으로 인해 적용에 어려움이 많다.

다자유도계 회전축 시스템의 동적 거동은 유한요소 이산화를 통해 얻어진 행렬 미분방정식을 적분하여 구한다. 이 운동방정식의 자유도를 저감시켜 효율적으로 적분하는 방법으로 구분모드 합성법(component mode synthesis

\* 정회원, 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소

method)<sup>(3,4)</sup> 및 Guyan 소거법<sup>(5)</sup>이 사용된다. 또, 직접 수치적분의 방법으로 Runge-Kutta, Houbolt, Wilson  $\theta$  방법이 사용되며, Runge-Kutta 알고리즘은 시간경과의 방법으로는 효과적이지만 시간간격당 수 차례 함수값을 계산하여야 되므로 계산상의 비용이 증가한다. 축계의 자유도가 큰 경우, 유한요소법의 적용은 과도한 계산시간과 비용이 요구되므로 이를 최소화하기 위해 Dokainish는 유한요소 및 전달행렬이 결합된 방법을 개발하였다<sup>(6)</sup>. 이 방법은 Guyan 소거법에서 발생하는 동적 정확도를 손상시키지 않고 행렬의 크기를 저감시키므로 중요시된다. 하지만, 여러 응용 연구에 의해 결합 방법이 일반화가 되었음에도 불구하고, 공식화 과정에 사용된 전달행렬 관계식의 성질에 의해 여전히 주파수 영역의 동적 해석에만 그 적용이 제한되었다.

이에 따라, Kumar와 Sankar는<sup>(7)</sup> 일반적인 구조의 동적 문제의 응답 계산을 위해 이산 시간 전달행렬법 (discrete time transfer matrix method)이라는 새로운 방법을 개발하였다. 이 방법은 일정한 크기의 전달 행렬을 사용하지만 다양한 시간 경과 방법이 모델링에 적용되도록 수식화 된다. 또, Subbiah는<sup>(8)</sup> 이 방법을 집중질량 모델링으로 비선형 축-베어링계의 동적 거동 해석에 적용하였다. 결과로서, 이 모델링을 이용하면 집중인자의 특성 및 질량이 없는 외팔보 이론에 의해 응답 오차가 발생된다고 하였다. 이 오차를 줄이기 위해 계의 성질과 일치하는 유한요소 모델링을 이용하고 적절한 시간 경과 의 Houbolt 수치 적분 알고리즘<sup>(9)</sup>을 사용하여, 전달행렬 방법을 시간영역 및 동적 계의 비선형 해석까지 전개가 가능한 유한요소-전달행렬(FE-TM)방법이 개발되었다<sup>(10)</sup>. 이 해석 모델은 축의 성질을 관성을 나타내는 절점 요소 및 강성을 나타내는 영역 요소로 이산화 된다. 그러므로, 절점 행렬 및 영역 행렬을 각각 구하여 이들의 곱으로 요소의 전달 행렬이 계산된다.

제안된 유한요소-전달행렬법 및 Houbolt 적분방법을 스크롤 압축기 크랭크축-베어링계의 과도 동적 거동<sup>(11)</sup>을 해석하기 위해 적용하였다. 기존의 해석 모델은 축의 성질을 관성을 나타내는 절점 요소 및 강성을 표시하는 영역 요소로 이산화 하여 절점 행렬 및 영역 행렬을 각각 구하여 이들의 곱으로 요소의 전달 행렬이 계산된다. 본 논문에서는 유한 요소의 성질에 맞게 절점 요소 및 영역 요소를 한 개의 요소로 일체화하여 하나의 전달행렬로써 유한 요소의 전달 특성을 구하였다. 수직 형상의 크랭크축을 지지하는 동수압 베어링을 선형적인 강성 및 감쇠계수로 모델링<sup>(12,13)</sup>하였으며 동적 해석 영역은 작은 진폭의 거동에만 한정된다. 저널 베어링의 선형 모델은 비선형 모델의 적용에 앞서 유한요소-전달행렬법의

검증을 위한 해석으로도 유용하다.

스크롤 압축기 크랭크축의 동적 거동은 축-베어링계의 설계변수 및 운전조건에 영향을 받고, 축의 동특성은 성능에 영향을 미친다. 축의 안정적인 동적 거동을 위해 전동기 회전자의 양단에 균형추(balancer weights)가 설계된다. 이 균형추의 동적 영향을 조사하기 위해, 전동기 회전자의 불평형 하중만 고려하고 저널 베어링을 선형적인 강성 및 감쇠 계수로 모델링하여 크랭크축의 동적 거동을 해석하였다.

## 2. 축-베어링계의 유한요소 모델링

일반적으로 유연한 축-베어링 시스템은 분포질량 및 탄성을 갖는 유한 축의 영역 요소, 강제 원판 및 이산화된 베어링으로 구성되는 점 요소가 결합된 요소의 조합으로 가정된다. 스크롤 압축기의 크랭크축은 축방향으로 단면의 직경이 변화하고, 전동기 회전자가 열박음 공정으로 압입되므로 8개의 유한 축 요소, 2개의 불평형 질량 및 2개의 선형 저널 베어링 요소로 Fig. 1과 같이 모델링한다.

Fig. 2 에 표시된 유한 축 요소의 모델링에서, 양단에서 절점  $i$  및  $i+1$  을 갖는 요소  $j$  의 운동방정식 행렬은 다음과 같이 표시된다<sup>(2)</sup>. (부록 I 참조)

$$[M^e] \{ \ddot{q}(t) \} + [C^e] \{ \dot{q}(t) \} + [K^e] \{ q(t) \} = \{ F^e(t) \} \quad (1)$$

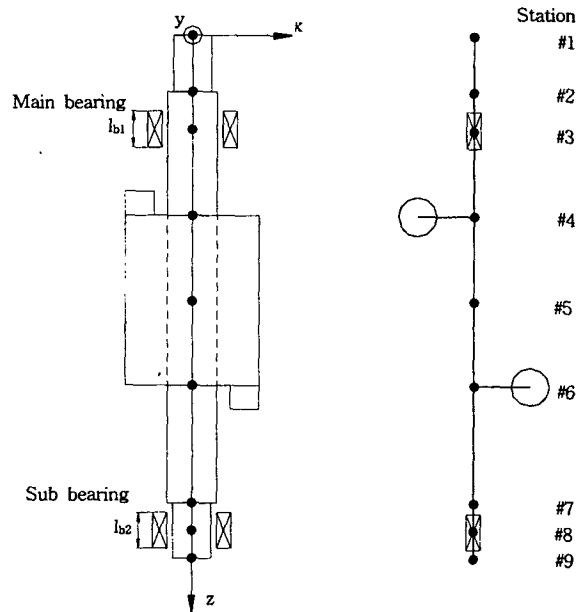


Fig. 1 Analytical model for crankshaft

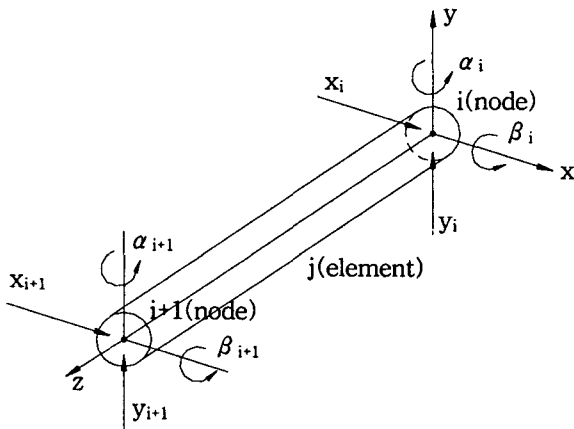


Fig. 2 Finite rotor element and coordinates

여기서,  $[M^s]$ 는 유한 축 요소의 질량 행렬,  $[C^s]$ 는 자이로 영향을 나타내는 행렬,  $[K^s]$ 는 강성 행렬을 표시한다.

원판의 질량중심이 탄성축의 중심과 일치하고 축방향 각속도가 일정하다고 가정하면, 강체 원판의 라그랑지안 운동방정식은 다음과 같다.

$$[M^d]\{\ddot{q}(t)\} + [C^d]\{\dot{q}(t)\} = \{F^d(t)\} \quad (2)$$

여기서,  $\{F^d(t)\}$ 는 강체 원판 요소의 질량 불평형 힘, 인접하는 절점과 상호 작용하는 내부 힘 및 원판에 작용하는 다른 외력을 포함하는 가진력을 표시한다.

회전축을 지지하는 이산화된 베어링 요소는 다음과 같이 모델링 된다.

$$[C^b]\{\dot{q}(t)\} + [K^b]\{q(t)\} = \{F^b(t)\} \quad (3)$$

여기서,  $\{F^b(t)\}$ 는 베어링의 외부에서 작용하는 힘 벡터이고,  $[C^b]$ ,  $[K^b]$ 는 베어링의 선형 감쇠 및 강성 행렬을 각각 표시한다.

축-베어링계의 모든 요소에 대한 운동방정식 행렬은 유한 축의 영역 요소 및 강체 원판의 불평형 하중과 지지 베어링 위치에서의 점 요소를 포함하여 유도된다. 축-베어링계의 일반화된 요소는 유한 축, 강체 원판, 베어링이 조합되므로, 식 (1), (2), (3)을 결합하여 절점  $i$  및  $i+1$ 을 갖는 요소  $j$ 의 일반화된 운동방정식을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[M_j]\{\ddot{q}(t)\} + [C_j]\{\dot{q}(t)\} + [K_j]\{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (4)$$

여기서,  $\{F(t)\} = \{R_{f_i} | L_{f_{i+1}}\}^T$ ,  $\{q(t)\} = \{x_i, y_i, \beta_i, \alpha_i | x_{i+1}, y_{i+1}, \beta_{i+1}, \alpha_{i+1}\}^T$ 는 절점  $i$  및  $i+1$

에서 각각 일반화된, 시간에 따라 변동하는 힘 및 변위를 표시한다. 절점  $i$ 는 요소  $j+1$ 과 요소  $j$ 의 공유점으로  $j+1$  요소의 오른쪽에 위치할 때  $L_i$ 로 표시하고,  $j$  요소의 왼쪽에 위치할 때  $R_i$ 로 한다. 그러므로,  $R_{f_i}(t)$ 는 요소  $j$ 의 왼쪽 절점에 작용하는 힘을,  $L_{f_{i+1}}(t)$ 는 같은 요소의 오른쪽 절점에서의 힘을 나타낸다. 또,  $[M_j]$ 는 유한 축 및 강체 원판이 결합된 질량 행렬,  $[C_j]$ 는 유한 축 요소 및 강체 원판의 자이로 영향과 베어링의 감쇠 특성이 결합된 감쇠 행렬,  $[K_j]$ 는 축 및 지지 베어링의 강성이 결합된 행렬을 나타내고 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[M_j] = \begin{bmatrix} (m_{11})_j & (m_{12})_j \\ (m_{21})_j & (m_{22})_j \end{bmatrix},$$

$$[C_j] = \begin{bmatrix} (c_{11})_j & (c_{12})_j \\ (c_{21})_j & (c_{22})_j \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$[K_j] = \begin{bmatrix} (k_{11})_j & (k_{12})_j \\ (k_{21})_j & (k_{22})_j \end{bmatrix}$$

### 3. 저널 베어링의 선형 강성 및 감쇠 계수

크랭크축을 지지하는 동수압 베어링을 선형적인 강성 및 감쇠 계수로 모델링하면, 동적 해석 영역은 작은 진폭의 거동에만 한정된다. 압축 하중이 작용하면 발생되는 큰 진폭에서는 베어링의 힘과 변위의 관계가 비선형적으로 증가하므로 이 선형 모델은 비선형의 축-베어링계의 동적 거동 해석에는 타당하지 않다. 크랭크축의 불평형 하중만 고려하는 경우 작은 진폭의 거동에만 한정되므로, 저널 베어링을 선형적인 강성 및 감쇠 계수로 모델링하여 축의 동적 거동을 해석한다. 저널 베어링으로 지지되어 운전되는 회전축의 동적 거동 해석에서, 계산의 단순화를 위해 비선형 이방성의 성질을 갖는 유막의 강성 및 감쇠 특성을 정적 평형점에서의 계수로 선형화 한다. 유한한 폭을 갖는 저널 베어링의 레이놀즈 방정식은 다음과 같다<sup>(12,13)</sup>.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\lambda\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\lambda \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$h = C - (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta) \quad (6)$$

저널 베어링의 동특성으로 표시되는 선형화된 강성 및 감쇠 계수의 계산은 축 중심의 정적인 평형점을 중심으로 동적인 변동이 작다는 가정에서 축 중심의 미소 변위를 평형점 부근에서 테일러 급수(Taylor series)로 전개하여 계산한다. 스크롤 압축기의 크랭크축은 수직 형상이므로 정적 평형점을 베어링 중심인 좌표계의 원점에 두고, 이 평형점에 대한 미소 변동 ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ )이 충분히 작다고 가정하면 변동 후의 베어링 틈새 및 유막 압력은 다음과 같다.

$$h = C - \Delta h = h_o - (\Delta x \cdot \cos \theta + \Delta y \cdot \sin \theta) \quad (7)$$

$$p = p_x \cdot \Delta x + p_y \cdot \Delta y + p_{\dot{x}} \cdot \Delta \dot{x} + p_{\dot{y}} \cdot \Delta \dot{y} \quad (8)$$

여기서,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_{\dot{x}}$ ,  $p_{\dot{y}}$ 는 교란 압력(perturbed pressures)을 표시한다. 식 (7), (8)을 레이놀즈 방정식 (6)에 대입하여 2차 이후의 항을 생략하고  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta \dot{x}$ ,  $\Delta \dot{y}$ 의 항에 관하여 정리하면 교란압력에 관한 다음의 미분 방정식이 유도된다.

$$L[p_x] = 6\lambda\omega \frac{\sin \theta}{h_o^3} \quad (9)$$

$$L[p_y] = -6\lambda\omega \frac{\cos \theta}{h_o^3} \quad (10)$$

$$L[p_{\dot{x}}] = -12\lambda \frac{\cos \theta}{h_o^3} \quad (11)$$

$$L[p_{\dot{y}}] = -12\lambda \frac{\sin \theta}{h_o^3} \quad (12)$$

여기서, 연산기호  $L[p_n] = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p_n}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p_n}{\partial z^2}$ ,  $n = x, y, \dot{x}, \dot{y}$  을 표시한다. 교란 압력의 경계조건은 베어링의 양 측면에서  $p_n = 0$  이고, 원주방향에서  $p_n < 0$  이면  $p_n = 0$  으로 가정한다.

Fig. 3 과 같은 유막 영역의 격자 좌표계를 이용하여 식 (9)을 유한 차분식으로 표시하면 다음과 같다.

$$A_{i,j} p_{i-1,j} + B_{i,j} p_{i,j} + C_{i,j} p_{i+1,j} + D_{i,j} p_{i,j-1} + E_{i,j} p_{i,j+1} = F_{i,j} \quad (13)$$

$$A_{i,j} = \frac{1}{(r\Delta\theta)^2}, \quad B_{i,j} = -2 \left[ \frac{1}{(r\Delta\theta)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right],$$

$$C_{i,j} = \frac{1}{(r\Delta\theta)^2}, \quad D_{i,j} = \frac{1}{(\Delta z)^2}, \quad E_{i,j} = \frac{1}{(\Delta z)^2},$$

$$F_{i,j} = 6\lambda\omega \frac{\sin \theta_i}{h_o^3}, \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{m}, \quad \Delta z = \frac{l_b}{n+1},$$

$$\theta_i = \Delta\theta (i-1)$$

Chebyshev 가속계수  $\omega_c$ 를 사용하는 SOR(Simultaneous Over-Relaxation)방법<sup>(14)</sup>을 사용하여 표시하면 다음과 같다.

$$p_{i,j}^{k+1} = p_{i,j}^k - \omega_c \cdot \frac{R_{i,j}}{B_{i,j}} \quad (14)$$

여기서,  $R_{i,j} = A_{i,j} p_{i-1,j}^{k+1} + B_{i,j} p_{i,j}^k + C_{i,j} p_{i+1,j}^{k+1} + D_{i,j} p_{i,j-1}^{k+1} + E_{i,j} p_{i,j+1}^k - F_{i,j}$ 이고,  $k$ 는 반복 계산과정을 나타낸다. 해의 원주방향의 주기성 조건에서  $p_{0,j} = p_{m,j}$ ,  $p_{m+1,j} = p_{1,j}$  이고, 반복 계산과정에서  $p_{i,j}^{k+1} = p_{1,j}^k$ ,  $p_{m,j}^{k+1} = p_{m,j}^k$  로 가정한다. 이상과 같이 계산된 압력값을 유막영역에서 적분하면 다음의 유막 반력이 계산된다.

$$\begin{pmatrix} F_{bx} \\ F_{by} \end{pmatrix} = \int_0^{l_b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot d\theta dz \quad (15)$$

유막 반력  $F_{bx}$ ,  $F_{by}$ 는  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ 의 함수이므로 정적 평형점 부근에서  $\Delta x, \Delta y, \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}$ 의 진폭을 갖는 미소 변동에 대해 Taylor급수를 전개하여 2차 이후의 항들을 생략하고, Fig. 4의 좌표계를 이용하여 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_{bx} &= K_{xx} \cdot \Delta x + K_{xy} \cdot \Delta y + C_{xx} \cdot \Delta \dot{x} + C_{xy} \cdot \Delta \dot{y} \\ F_{by} &= K_{yx} \cdot \Delta x + K_{yy} \cdot \Delta y + C_{yx} \cdot \Delta \dot{x} + C_{yy} \cdot \Delta \dot{y} \end{aligned} \quad (16)$$

식 (15), (16)에서 베어링 중심 위치의 정점 평형점에서 선형화된 저널 베어링의 강성 및 감쇠 계수는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} K_{xx} \\ K_{yx} \end{pmatrix} = \int_0^{l_b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot r d\theta dz$$

$$\begin{pmatrix} K_{xy} \\ K_{yy} \end{pmatrix} = \int_0^{l_b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_y \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot r d\theta dz$$

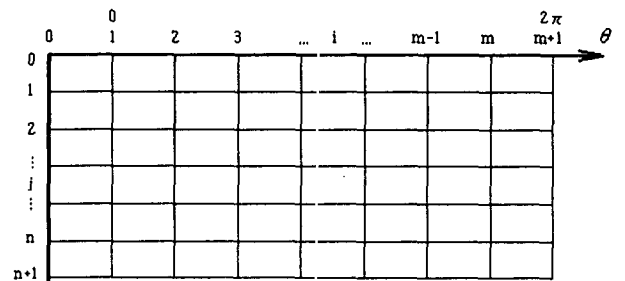


Fig. 3 Grid system for FDM analysis

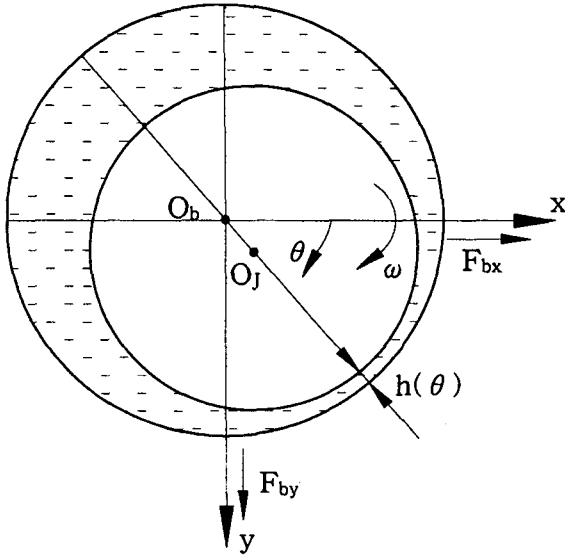


Fig. 4 Crankshaft and journal bearing notation

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_{xx} \\ C_{yx} \end{pmatrix} &= \int_0^{l_b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_x \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot r d\theta dz \\ \begin{pmatrix} C_{xy} \\ C_{yy} \end{pmatrix} &= \int_0^{l_b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_y \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot r d\theta dz \end{aligned} \quad (17)$$

#### 4. 유한요소-전달행렬법의 공식화

FE-TM방법에서, 임의의 시간  $t$ 의 요소 절점  $i$ 에서 자유도의 가속도 및 속도는 적절한 정도를 가지면서 변위  $\{q_i(t)\}$ 의 선형적 함수로서 다음과 같이 표시된다.

$$\{\ddot{q}_i(t)\} = A(t) \cdot \{q_i(t)\} + \{B_i(t)\} \quad (18)$$

$$\{\dot{q}_i(t)\} = D(t) \cdot \{q_i(t)\} + \{E_i(t)\} \quad (19)$$

여기서,  $A(t)$ ,  $D(t)$ ,  $\{B_i(t)\}$ ,  $\{E_i(t)\}$ 의 값은 적분 방법에 따라 다양하게 정의되며, 요소 운동방정식의 시간 미분량을 대신하기 위해 Kumar 등이 개발하였다<sup>(7)</sup>. (부록 II 참조) 식 (18), (19)을 (5)에 대입하면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} &(A(t) \cdot [M_j] + D(t) \cdot [C_j] + [K_j]) \\ &\{q_i(t) \mid q_{i+1}(t)\}^T + [M_j] \{B_i(t) \mid B_{i+1}(t)\}^T \\ &+ [C_j] \{E_i(t) \mid E_{i+1}(t)\}^T = \{F(t)\} \end{aligned} \quad (20)$$

이 방정식을 유한 요소  $j$ 의 행렬의 항으로 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} (K_{11})_j & (K_{12})_j & (v_1)_j \\ (K_{21})_j & (K_{22})_j & (v_2)_j \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i(t) \\ q_{i+1}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R f_i(t) \\ {}^L f_{i+1}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } (K_{11})_j &= A(t) \cdot (m_{11})_j + D(t) \cdot (c_{11})_j + (k_{11})_j \\ (K_{12})_j &= A(t) \cdot (m_{12})_j + D(t) \cdot (c_{12})_j + (k_{12})_j \\ (K_{21})_j &= A(t) \cdot (m_{21})_j + D(t) \cdot (c_{21})_j + (k_{21})_j \\ (K_{22})_j &= A(t) \cdot (m_{22})_j + D(t) \cdot (c_{22})_j + (k_{22})_j \\ (v_1)_j &= (m_{11})_j \cdot \{B_i(t)\} + (m_{12})_j \cdot \{B_{i+1}(t)\} \\ &\quad + (c_{11})_j \cdot \{E_i(t)\} + (c_{12})_j \cdot \{E_{i+1}(t)\} \\ (v_2)_j &= (m_{21})_j \cdot \{B_i(t)\} + (m_{22})_j \cdot \{B_{i+1}(t)\} \\ &\quad + (c_{21})_j \cdot \{E_i(t)\} + (c_{22})_j \cdot \{E_{i+1}(t)\} \end{aligned}$$

절점  $i$ 에서 다음의 평형 방정식이 성립한다.

$${}^R f_i(t) + {}^L f_i(t) = f_i^{\text{ext}}(t) \quad (22)$$

여기서,  $f_i^{\text{ext}}(t)$ 는 절점  $i$ 에 작용하는 일반화된 힘을 나타낸다. 식 (21), (22)에서 요소  $j$ 의 오른쪽 절점  $i+1$ 에서의 변위 및 힘을 왼쪽 절점  $i$ 의 전달행렬 관계식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} q_{i+1}(t) \\ {}^L f_{i+1}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - (K_{12})_j^{-1} (K_{11})_j \\ (K_{21})_j - (K_{22})_j (K_{12})_j^{-1} (K_{11})_j \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i(t) \\ {}^L f_i(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} - (K_{12})_j^{-1} (s_1)_j \\ - (K_{22})_j (K_{12})_j^{-1} (s_2)_j \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i(t) \\ {}^L f_i(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

여기서,  $(s_1)_j = (K_{12})_j^{-1} \cdot [f_i^{\text{ext}} - (v_1)_j]$

$$(s_2)_j = (K_{22})_j (K_{12})_j^{-1} \cdot [f_i^{\text{ext}} - (v_1)_j] + (v_2)_j \text{이다.}$$

일반적인 축-베어링계의 유한요소 모델링의 경우, 식 (23)에서 절점  $i+1$ 의 상태벡터는 유한 요소  $j$ 의 전달행렬  $[T(t)]_j$  및 절점  $i$ 의 상태벡터의 곱으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\{u(T+\Delta t)\}_{i+1}^L = [T(t)]_j \cdot \{u(T+\Delta t)\}_i^L \quad (24)$$

전달행렬 관계식 (24)의 반복적인 적용으로 전체 축-베어링계에 관한 다음의 전달 관계식을 구할 수 있다.

$$\{u\}^L = [T]_n \cdot [T]_{n-1} \dots [T]_2 \cdot [T]_1 \cdot \{u\}^L \quad (25)$$

크랭크축의 양쪽 끝이 자유단이므로 경계조건은 다음과 같이 가정하였다.

$${}^L f_1(T+\Delta t) = 0, \quad {}^L f_n(T+\Delta t) = f_n^{\text{ext}}(T+\Delta t) \quad (26)$$

## 5. 계산 과정 및 결과

### 5.1 계산 과정

앞의 공식화 과정에 따라 다양하게 구성되는 유한 요소에 대해 각 시간 순간에서의 동적 거동을 계산하기 위해 다음의 수치해석 과정을 따른다.

(1) 먼저 시간 경과의 초기 단계로서  $k=1$ 로 표시하고 각 요소 절점의 초기조건  $q(t_{k-1}), \dot{q}(t_{k-1}), \ddot{q}(t_{k-1})$  및 시간  $t_k$ 에서의 계의 성질 및 요소의 절점  $i$ 에 대한  $A(t_k), D(t_k), (B_i(t_k)), (E_i(t_k))$ 의 값들을 계산한다.

(2) 각 유한 요소에 관한 요소 전달 행렬 및 축 시스템의 전체 전달 행렬을 식 (23), (25)을 이용하여 각각 구한다.

(3) 계의 양쪽 끝단에서의 상태 벡터에 관한 경계 조건 식 (26)을 적용하고, 시스템의 전체 전달 행렬의 합수값으로 가장 왼쪽 끝단의 상태 벡터의 미지값  $\{q_1(T+\Delta t)\}$ 을 계산한다.

(4) 축 시스템의 왼쪽 끝단의 상태 벡터에 관한 값이 구해지면, 오른쪽 끝단의 상태 벡터의 미지값  $\{q_n(T+\Delta t)\}$ 을 계산한다. 각 요소의 나머지 절점에서의 동적 응답은 식 (24)을 사용하여 전달행렬의 연속적인 곱으로 계산한다.

(5) 시간 경과의 다음 단계로서  $k=2$ 로 하여, 앞 단계에서 계산된 값을 초기값으로 사용하여 앞 단계에서 수행된 과정을 해석이 완료되는 시점까지 반복적으로 계속한다.

### 5.2 해석 결과

해석 대상의 냉동공조용 스크롤 압축기는 축동력이 1,827 W인 3마력급으로, 3,475 rpm의 정속으로 운전되는 모델이다. 크랭크축-저널 베어링계의 주요 변수들은 Table 1과 같고, 축 단면 직경의 변화에 따라 Fig. 1과 같이 8개의 요소로 나누어 모델링하였으며 그 제원은 Table 2와 같다. 수직 형상 저널 베어링의 선형화된 강성 및 감쇠 계수는 Table 3에 표시하였다. 이 베어링 계수들은 베어링 중심위치에 설정된 정적 평형점에서 미소 변동에 의해 발생하는 유막 반력의 값으로 정의된다. 즉,  $K_{xx}$ 는 설정된 좌표계에서  $x$  방향의 미소 변동량  $\Delta x$ 에 의해  $-x$  방향의 베어링 반력이 발생하는 것으로 사료된다.  $K_{xy}, K_{yx}, C_{xx}, C_{yy}$ 가 상대적으로 큰 값이므로 축 궤적의 형상에 지배적인 영향을 나타내고,  $K_{xy} = -K_{yx}, C_{xx} = C_{yy}$ 의 특성은 수직형상 저널 베어

링의 등방성에 의한 것으로 이해된다. 또,  $C_{xx}$ 의 값은 주 베어링에서 -5, 보조 베어링에서 -2 정도의 값으로 계산되지만, 다른 값에 비해 상대적으로 작으므로 표에 서는 0의 값으로 표시하였다.

크랭크축-저널 베어링계의 동적 해석에서, 계산과정의 수렴은 시간 간격  $\Delta T = 0.0002$  s에서 일어나고 수렴되는 궤적의 형태는 절점 # 6에서 Fig. 5와 같다. 원점 부근의 초기값에서 시작하여 안정적으로 수렴될 때까지 궤적이 변동되는 양상은  $\Delta T$ 에 따라 변하지만, 수렴된 궤적의 형상 및 크기는 동일하였다.

일반적으로, 저널 베어링으로 지지된 수직형상의 균형된 축은 불안정한 것으로 알려져 있고, 불평형 하중 혹은 외력의 작용으로 안정화된다. 또, 등방성의 베어링으로 지지되는 회전축의 휘둘림 형상은 원형이고,  $x, y$ 방향의 베어링 계수의 값이 다르면 타원 궤적을 갖는다. 불평형 하중이 작용하는 저널 베어링으로 지지된 수직형상의 크랭크축의 궤적은 회전진동수와 다른 1/2 진동수로 휘둘리는 비동기 성분을 갖는다. 즉, 저널 베어링의 특성

Table 1 Design parameters of crankshaft-bearing system

Main bearing length	$l_{b1} = 35.4$ mm
Sub bearing length	$l_{b2} = 22.1$ mm
Journal clearance on main bearing	$C_1 = 25$ $\mu$ m
Journal clearance on sub bearing	$C_2 = 25$ $\mu$ m
Refrigeration oil viscosity	$\lambda = 5$ Pa · s
Young's modulus of crankshaft	$E_s = 1.6 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
Young's modulus of motor rotor	$E_m = 1.2 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>

Table 2 Rotor configuration data

Element number	Mass (kg)	Length (mm)	Radius (mm)
1	0.083	28	8.2
2	0.059	20	12.7
3	0.113	38	12.7
4	1.192	45	35.5
5	1.192	45	35.5
6	0.208	70	12.6
7	0.047	16	9.5
8	0.039	13	9.5

Table 3 Calculated journal bearing coefficients

Bearing coefficients	Main bearing (N/m)	Sub bearing (N/m)
$K_{xx}$	$-1.81 \times 10^6$	$-5.07 \times 10^5$
$K_{yx}$	$-2.29 \times 10^9$	$-6.40 \times 10^8$
$K_{xy}$	$2.29 \times 10^9$	$6.40 \times 10^8$
$K_{yy}$	$-7.90 \times 10^2$	$-2.20 \times 10^2$
$C_{xx}$	$1.26 \times 10^7$	$3.52 \times 10^6$
$C_{yx}$	0	0
$C_{xy}$	$-1.0 \times 10^4$	$-2.80 \times 10^3$
$C_{yy}$	$1.26 \times 10^7$	$3.52 \times 10^6$

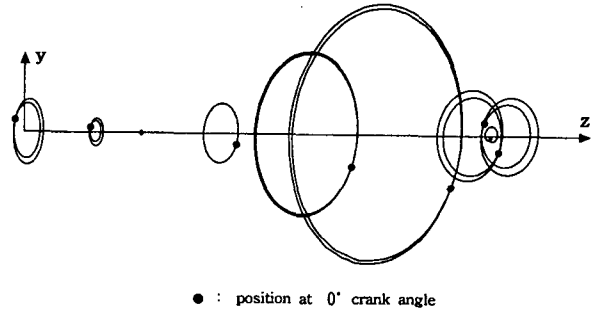


Fig. 6 Steady state orbital plots along the crankshaft axis with the same unbalance magnitude

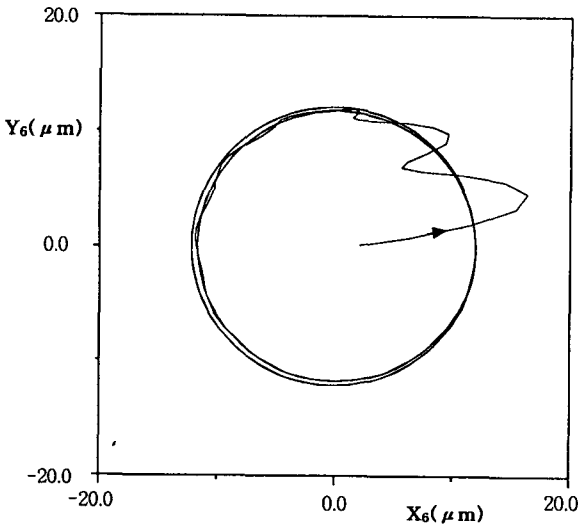


Fig. 5 Transient response of crankshaft at station # 6

에 의한 비동기 성분으로 발생되는 내부 궤적(inner loop)과 불평형 하중의 동기성분에 의한 외부 궤적(outer loop)으로 그 운동형태가 이루어진다. 비동기 성분의 휘둘림에 의해 크랭크축의 주기시간은 0.0345 ms로서 2바퀴를 회전하여 720°의 크랭크각으로 한 주기를 이룬다.

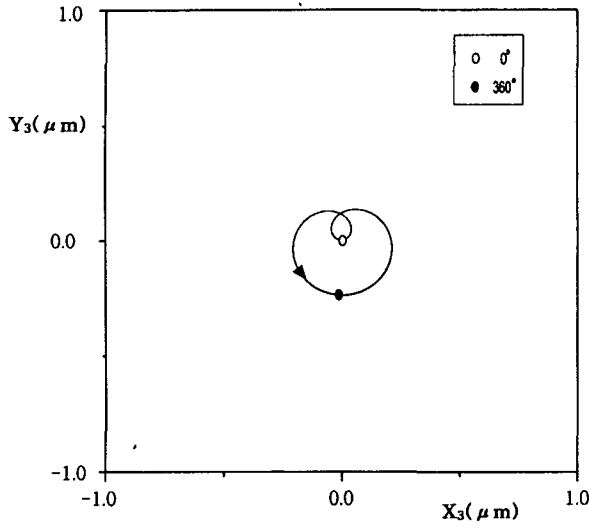
해석 모델에서 안정적인 축의 동적 거동을 위해 전동기 회전자의 양 끝단 위치인 # 4 및 # 6의 절점에서 균형추가 설계된다. 절점 # 4에서의 불평형 질량 310 g, 편심위치 (-16.8, 0) mm이고 # 6에서 불평형 질량 310 g, 편심위치 (-17.9, 0) mm일 때, 저널 베어링으로 지지된 크랭크축계의 불평형 하중에 의한 동적 거동은 Fig. 6과 같다. 결과에서 보듯이, 전동기 회전자의 양쪽 편심질량의 크기가 같을 때 궤적의 크기는 전동기 회전자의 아랫쪽 # 6의 절점에서 가장 크게 나타난다. 이것

은 # 6의 요소가 가장 길고 상대적으로 직경이 작아 강성이 작기 때문이다. 궤적의 중심과 가만점으로 표시된 크랭크 각도 0°의 시작점 사이의 위상각은 각 절점에 따라 변화되고, 지지 베어링을 경계로 하여 위상각이 180°만큼 증가되는 것을 볼 수 있다. 즉, 절점 # 1, 2의 위상각도는 177°이고, 절점 # 4, 5, 6의 각도는 357°이고, 다시 절점 # 9의 각도는 177°이다.

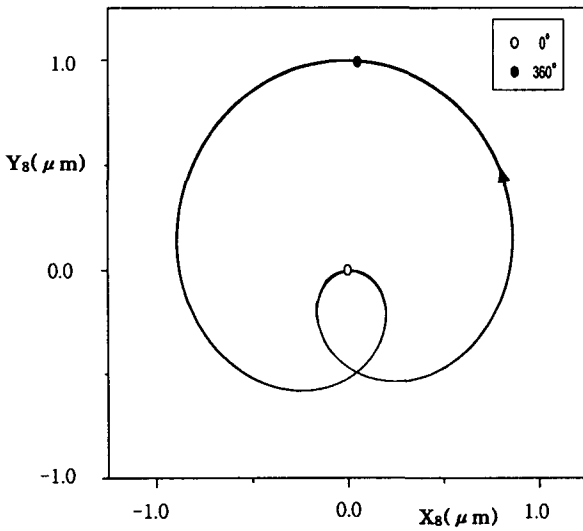
Fig. 7에서, 저널 베어링으로 지지되는 # 3, # 8의 절점에서 휘둘림 궤적은 비동기 성분의 크기가 0.45정도 존재하는 형태이다. 다른 절점에서는 동기 성분이 지배적으로 되어 2개의 휘둘림 궤적(loop)이 근접하는 것을 Fig. 6에서 볼 수 있다. 특히, # 4의 절점에서는 하나의 휘둘림 궤적으로 거의 일치되므로 불평형 하중에 의한 동기 성분에 의해 거동이 결정되는 것을 알 수 있다.

불평형 하중에 의한 축 중심의 휘둘림 변화를 조사하기 위해 절점 # 4에서의 불평형 하중의 조건은 고정된 상태에서 # 6에서의 작용 하중은 동일한 편심위치에서 크기만 106 g, 208 g으로 변화시켰다. 106 g의 불평형 질량이 작용하면, 절점 # 4에서 휘둘림 크기의 최대값은 # 6의 최대값보다 16.8배의 크기를 갖는다. 또, 절점 # 6에서는 비동기 성분의 크기가 0.45정도를 갖는 궤적의 형태이지만 # 4에서는 동기 성분의 크기가 0.9정도 되는 궤적의 형태이다.

Fig. 9에서 절점 # 6에서 208 g의 불평형 질량이 작용하면, 앞의 조건과는 반대로 절점 # 6에서의 궤적 크기의 최대값이 # 4의 최대값 보다 14.5배의 크기를 갖는다. 또, 절점 # 4에서는 106 g의 불평형 질량이 작용하는 경우보다 비동기 성분이 증가한 궤적의 형태이지만 # 6에서는 동기 성분이 지배적인 궤적의 형태이다. 310 g의 불평형 질량이 작용하면, Fig. 10과 같이 절점 # 6에서 궤적 크기의 최대값은 # 4의 최대값 보다 4.9배의 크기를 갖는다. 또, 절점 # 4에서는 비동기 성분이



(a) Main bearing



(b) Sub bearing

Fig. 7 Orbital responses of crankshaft at bearing locations # 3 and # 8 with the same unbalance magnitude

거의 없어 동기 성분이 지배적인 궤적의 형태이지만 # 6에서는 비동기 성분이 부분적으로 존재한다.

압축기의 압축부하가 작용하는 운전조건에서 크랭크축의 상부 끝단에 작용하는 하중이 가장 크므로, 축의 동적 거동은 이 하중에 지배적인 영향을 받는다. 그러므로, 크랭크축에 작용하는 압축 하중 및 축을 지지하는 저널 베어링의 비선형 모델을 고려한 과도 응답 해석이 필요하다.

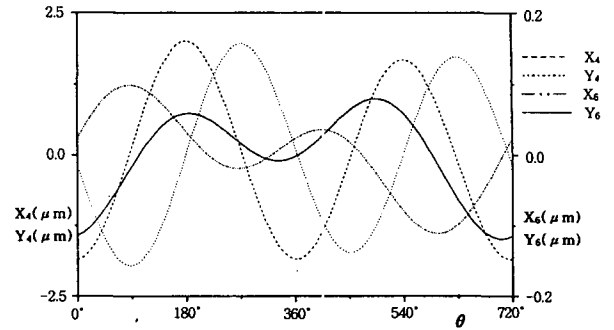


Fig. 8 Steady state crankshaft displacements at station # 4 and # 6, along the period of angle with unbalance masses  $m_4 = 310$  g,  $m_6 = 106$  g

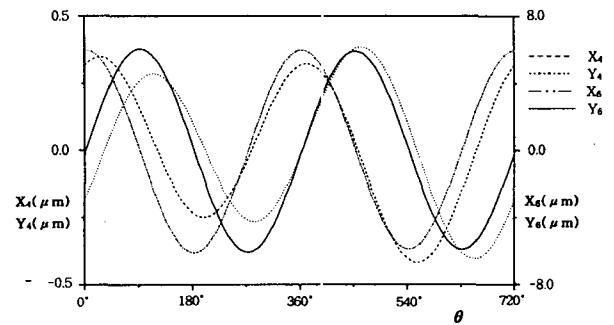


Fig. 9 Steady state crankshaft displacements at station # 4 and # 6, along the period of angle with unbalance masses  $m_4 = 310$  g,  $m_6 = 208$  g

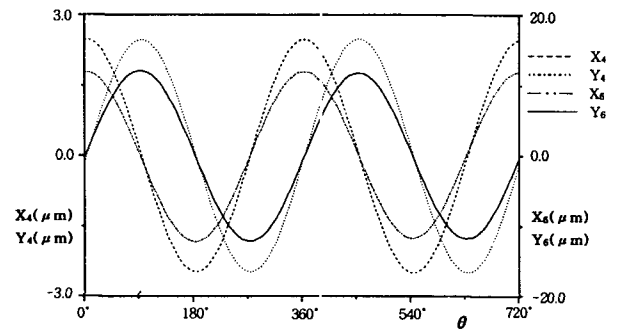


Fig. 10 Steady state crankshaft displacements at station # 4 and # 6, along the period of angle with the same unbalance magnitude



## 6. 결 론

유한요소-전달행렬법 및 Houbolt 적분방법을 이용하여 스크롤 압축기 크랭크축-베어링계의 과도 동적 거동을 해석하였다. 유한 요소 모델링에 있어서, 기존의 절점 요소 및 영역 요소를 한 개의 요소로 일체화하여 하나의 전달행렬로써 유한 요소의 전달 특성을 구하였다. 균형추의 불평형 하중을 고려하고 수직 형상의 저널 베어링을 선형적인 강성 및 감쇠계수로 모델링하여, 탄성 크랭크축의 과도 동적 거동을 해석하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 이 압축기의 경우, 전동기 회전자의 양 끝단 위치의 절점에서 동일한 불평형 질량(310 g)이 작용할 때, 전동기 회전자 아랫쪽의 불평형 하중이 작용하는 위치에서 휘둘림 궤적이 가장 크게 나타난다.

(2) 절점 # 4에서 불평형 질량 (310 g, (-16.8, 0) mm) 이 작용하고 # 6에서 불평형 질량(106 g, (-17.9, 0) mm) 이 작용할 때, 절점 # 4에서 궤적 크기의 최대값은 # 6의 값 보다 16.8배의 크기를 갖는다. 또, 같은 조건에서 절점 # 6의 불평형 질량의 크기만 208 g, 310 g 으로 증가시키면, # 6에서의 궤적 크기의 최대값은 # 4의 값 보다 각각 14.5배, 4.9배의 크기를 갖는다.

(3) 불평형 하중이 작용하는 저널 베어링으로 지지된 수직형상의 크랭크축의 궤적은 회전진동수와 다른 1/2 진동수로 휘둘리는 비동기 성분을 갖는다. 베어링의 지지위치에서, 저널 베어링의 특성에 의한 비동기 성분으로 발생되는 내부 궤적과 불평형 하중의 동기 성분에 의한 외부 궤적으로 이루어지는 축의 휘둘림 형상을 구하였다.

## 참 고 문 헌

(1) Ruhl, R. L. and Booker, J. F., 1972, "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems," *Journal of Engineering for Industry*, Trans. ASME, Feb., pp. 126~132.

(2) Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., 1976, "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements," *Journal of Engineering for Industry*, Trans. ASME, May, pp. 593~600.

(3) Nelson, H. D. and Meacham, W. L., 1983, "Nonlinear Analysis of Rotor-Bearing Systems Using Component Mode Synthesis," *Journal of Engineering for Power*, Trans. ASME, Vol. 105, pp. 606~614.

(4) Yee, Eric K. L. and Tsuei, Y. G., 1990, "Transient Response by Component Modal Synthesis Method," *Journal of Vibration and Acoustics*, Trans. ASME, Vol. 112, pp. 21~25.

(5) Guyan, R. J., 1965, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 3, No. 2, p. 380.

(6) Dokainish, M. A., 1972, "A New Approach for Plate Vibrations : Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique," *Journal of Engineering for Industry*, Trans. ASME, May, pp. 526~530.

(7) Kumar, A. S. and Sankar, T. S., 1986, "A New Transfer Matrix Method for Response Analysis of Large Dynamic Systems," *Computers and Structures*, Vol. 23, No. 4, pp. 545~552.

(8) Subbiah, R. and Rieger, N. F., 1988, "On the Transient Analysis of Rotor-Bearing Systems," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Trans. ASME, Vol. 110, pp. 515~520.

(9) Houbolt, J. C., 1950, "A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft," *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 17, pp. 540~550.

(10) Subbiah, R. and Kumar, A. S., 1988, "Transient Dynamic Analysis of Rotors Using the Combined Methodologies of Finite Elements and Transfer Matrix," *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Vol. 55, pp. 448~452.

(11) 김태중, 한동철, 1998, "저널 베어링의 공동현상을 고려한 스크롤 압축기 크랭크축의 동적 거동 해석," *대한기계학회논문집 A권*, 제 22 권 제 8 호, pp. 1375~1389.

(12) Subbiah, R. and Bhat, R. B., 1986, "Rotational Stiffness and Damping Coefficients of Fluid Film in a Finite Cylindrical Bearing," *Trans. ASLE*, Vol. 29, pp. 414~422.

(13) Lund, J. W., 1987, "Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings," *Journal of Tribology*, Trans. ASME, Vol. 109, pp. 37~41.

(14) Press, W. H. and Flannery, B. P., 1986, "Numerical Recipes," *Cambridge University Press*, New York, pp. 655~659.

