

<논문>

등가계를 적용한 열차의 동적거동에 관한 연구

A Study on the Dynamics of Train Using Equivalent System

조 동 현* · 임 진 수**

Cho, Donghyun and Lim, Jinsoo

(1999년 9월 17일 접수 : 1999년 12월 15일 심사완료)

Key Words : Train Dynamics(열차동역학), Equivalent System(등가계), Mechanical Impedance(기계적 임피던스), Nonlinear Creep Theory(비선형 크리프 이론)

ABSTRACT

The dynamics of train has recently been analysed in many cases and very complex nonlinear creep theories have been developed by many engineers. But much calculation time is spent and latest complex creep theories cannot be adapted in train analysis. In this study efficient and fast train analysis method was suggested. Many of degree of freedom were reduced in multi-vehicle system using equivalent system and fast calculation time was achieved. And the accuracy of equivalent system method was proved by linear and nonlinear dynamic analysis.

1. 서 론

근래에 들어서 철차동역학 해석은 단일차량 뿐만 아니라 여러 대의 차량을 연결한 열차의 해석을 많이 진행하고 있다. 그러나 방대한 수치해석량으로 인해 실제로 운용되는 차량 수를 갖는 열차를 해석하지는 못하고 차량의 수를 축소하여 해석하는 방법을 사용한다. 또한 상당한 수치해석 시간을 요하게 된다. 따라서 최근에 제안되고 있는 차륜/레일의 non-Hertzian 접촉이론 또는 탄성 접촉이론 등의 복잡한 크리프(creep) 이론은 아직까지 열차해석에는 적용하지 못하고 있다.

본 연구에서는 단순하면서도 매우 근사적인 열차의 해석을 할 수 있도록 여러 차량 중에서 해석대상이 되는 차량을 제외한 나머지 차량을 자유도를 대폭 줄인 등가계(equivalent system)로 치환하여 해석하는 방법을 사용하였다. 3차량으로 구성된 열차를 대상으로 해석대상

인 중심차량에 연결되는 양단의 인접차량의 임피던스를 계산하여 등가계의 구조와 특성값 들을 최적화 방법을 사용하여 계산하였다. 이렇게 결정된 등가계를 적용하여 해석한 결과가 단일 차량의 해석 결과와 비교하여 어느 정도 3차량 열차에 근사하는가를 선형해석 및 비선형해석을 통하여 검증하였다.

2. 인접차량의 동적 특성

Fig. 1과 같은 3차량 열차에서 동역학해석의 대상인 가운데 차량을 중심차량으로 정의하고 전후에 연결된 차량을 인접차량으로 정의한다. 각 차량간은 차체와 차체

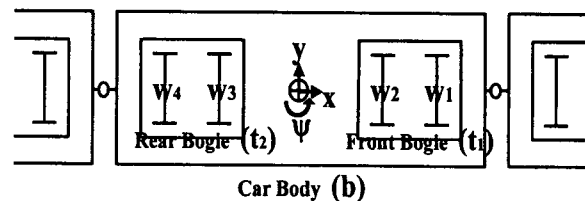


Fig. 1 System coordinates and symbols

* 정희원, 아주대학교 대학원 기계공학과

** 정희원, 아주대학교 공과대학 기계공학과

Table 3 Vehicle dynamic parameter

<i>mc</i>	Car body mass (kg)	27890
<i>mt</i>	Bogie frame mass (kg)	2120
<i>mw</i>	Wheelset mass (kg)	1780
<i>Ic</i>	Car body yaw moment of inertia (Mgm ²)	1100
<i>It</i>	Bogie frame yaw moment of inertia (kgm ²)	2220
<i>Iw</i>	Wheelset yaw moment of Inertia (kgm ²)	965
<i>k_{1x}</i>	Longitudinal primary stiffness (MN/m)	12
<i>k_{1y}</i>	Lateral primary stiffness (MN/m)	4.9
<i>k_{2x}</i>	Longitudinal secondary stiffness (MN/m)	0.16
<i>k_{2y}</i>	Lateral secondary stiffness (MN/m)	0.16
<i>c_{2x}</i>	Longitudinal secondary damping (MNs/m)	0
<i>c_{2y}</i>	Lateral secondary stiffness (MNs/m)	0.039
<i>a</i>	Half of lateral spacing of wheel/rail contact points (m)	0.75
<i>b</i>	Half of wheelbase (m)	1.15
<i>d</i>	Half of lateral spacing of primary spring (m)	0.965
<i>d_{2s}</i>	Half of lateral spacing of secondary spring (m)	1.0
<i>d_{2d}</i>	Half of lateral spacing of secondary damping (m)	1.30
<i>lt</i>	Half of bogie center spacing (m)	7.95
<i>lb</i>	Half of vehicle joint spacing (m)	12.0
<i>rc</i>	Centered wheel rolling radius (m)	0.43
<i>λ</i>	Effective conicity	0.05

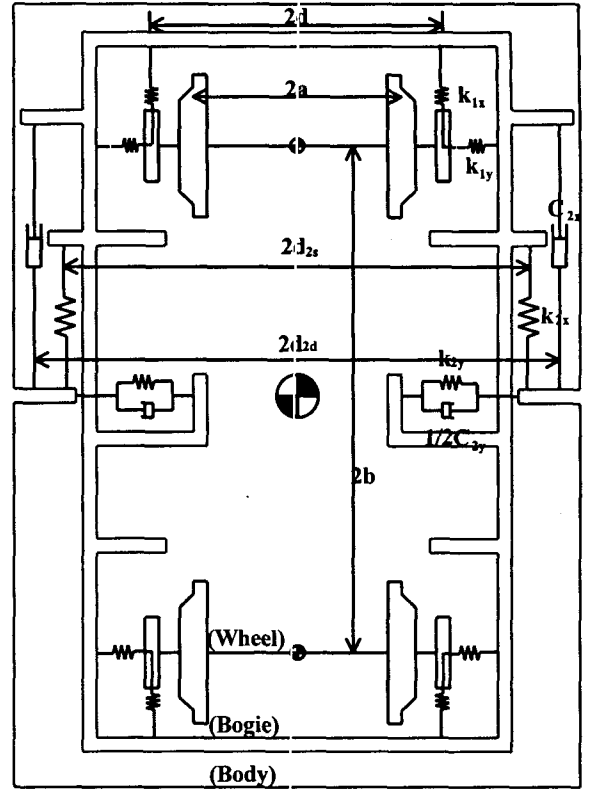


Fig. 2 Bogie system

가 핀조인트로 연결되어 있으며, 각 차량의 동역학 파라미터들은 서로 동일하며 그 값은 Table 1과 같다. 차량에서 차체, 대차, 차축의 위치와 각 현가장치의 연결은 Fig. 2와 같다.

열차의 동역학적 해석에서 중심차량은 양단의 조인트 구속으로 인하여 인접차량의 거동에 영향을 받는다. 인접차량의 영향은 핀조인트를 통하여 중심차량에 횡방향 힘으로 전달된다. 따라서 인접차량의 영향을 나타내는 지수를 조인트에서의 기계적 임피던스 *Z*로 나타낸다.

$$Z(\omega) = F(\omega) / \dot{y}(\omega) \quad (1)$$

\dot{y} 는 조인트의 횡방향 속도이며 F 는 조인트에 작용하는 횡방향 힘이다.

Fig. 3과 같이 양단 조인트에 외력이 작용하는 차량의 선형운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = [0, 0, \dots, f_R + f_L, (f_R - f_L)l_b]^T \quad (2)$$

$$q(t) = [y_{w1}, y_{w2}, y_{w3}, y_{w4}, \psi_{w1}, \psi_{w2}, \psi_{w3}, \psi_{w4}, y_{\beta 1}, y_{\beta 2}, \psi_{\beta 1}, \psi_{\beta 2}, y_b, \psi_b]^T$$

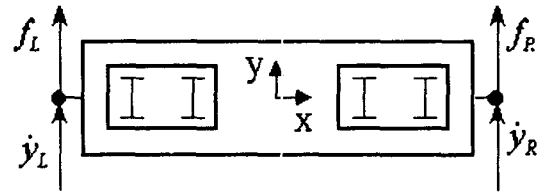


Fig. 3 Lateral displacement and lateral force acting on left/right pivot joint of main-vehicle

차체 무게중심의 횡변위, 요변위와 양단 조인트의 횡변위의 기하학적 관계는 아래와 같다.

$$y_b = (y_L + y_R) / 2 \quad (3)$$

$$\psi_b = (y_R - y_L) / 2l_b$$

차체 무게중심의 변위를 조인트 변위로 치환한 변위벡터 $\hat{q}(t)$ 와 $q(t)$ 의 관계는 다음과 같다.

$$q(t) = T\hat{q}(t) \quad (4)$$

$$q(t) = [y_{w1}, y_{w2}, y_{w3}, y_{w4}, \psi_{w1}, \psi_{w2}, \psi_{w3}, \psi_{w4}, y_{\beta 1}, y_{\beta 2}, \psi_{\beta 1}, \psi_{\beta 2}, y_L, y_R]^T$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \cdot & \cdot & -1/2l_b & 1/2l_b \end{bmatrix}$$

차량의 운동방정식은 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$MT\hat{q} + CT\hat{q} + KT\hat{q} = L[0, 0, \dots, f_L, f_R]^T \quad (4)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & -l_b & l_b \end{bmatrix}$$

행렬 L 을 좌변으로 넘기면 식 (4)는 식 (5)와 같이 된다.

$$\hat{M}\hat{q} + \hat{C}\hat{q} + \hat{K}\hat{q} = [0, 0, \dots, f_L, f_R]^T \quad (5)$$

$$\hat{M} = L^{-1}MT, \quad \hat{C} = L^{-1}CT, \quad \hat{K} = L^{-1}KT$$

식 (5)에 $f_L(t) = F_L e^{i\omega t}$, $f_R(t) = F_R e^{i\omega t}$, $\hat{q}(t) = Y e^{i\omega t}$ 를 대입하고 푸리에 변환을 하면 아래의 식(6)이 된다.

$$A(\omega)Y = [0, 0, \dots, F_L, F_R]^T \quad (6)$$

$$A(\omega) = j\omega\hat{M} + \hat{C} + \hat{K}/j\omega$$

식 (6)은 아래의 식 (7)과 같은 분할행렬의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{11}(12 \times 12) & A_{12}(12 \times 2) \\ A_{21}(2 \times 12) & A_{22}(2 \times 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(12 \times 1) \\ Y_2(2 \times 1) \end{bmatrix} = [0, 0, \dots, F_L, F_R]^T \quad (7)$$

위 식을 Y_2 에 대하여 풀면 아래의 식과 같다.

$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})Y_2 = [F_L, F_R]^T \quad (8)$$

식 (8)을 간단히 식 (9)로 표현한다.

$$B Y_2 = F \quad (9)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$Y_2 = [V_L, V_R]^T, \quad F = [F_L, F_R]^T$$

Fig. 1의 우측 인접차량의 경우 $F_R = 0$ 이므로 식 (9) 적용하면 우측 인접차량의 좌측 조인트에서의 임피던스는 아래와 식과 같이 된다.

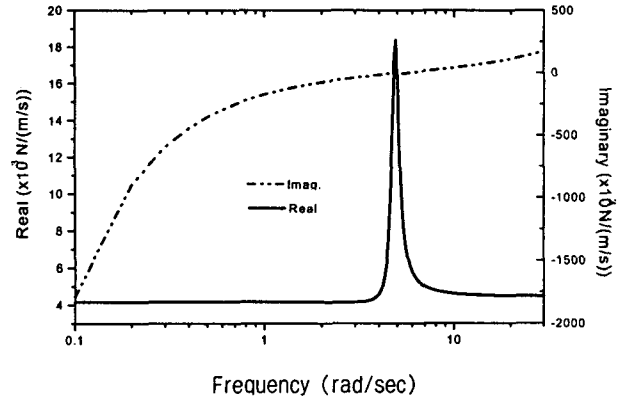


Fig. 4 Real and imaginary part of the impedance

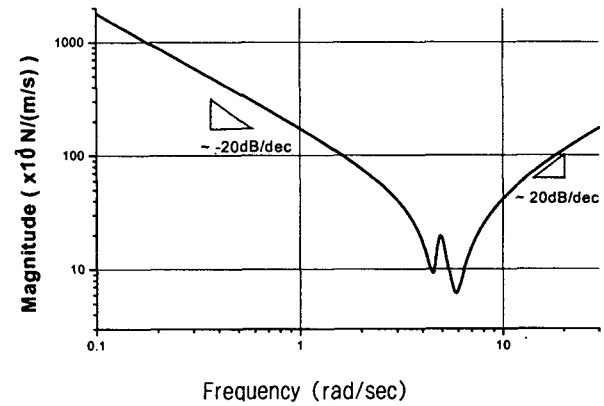


Fig. 5(a) Magnitude of the impedance

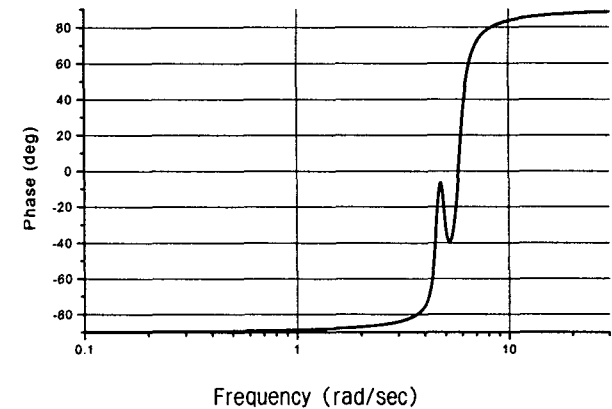


Fig. 5(b) Phase of the impedance

$$Z(\omega) = \frac{F_L(\omega)}{V_L(\omega)} = \frac{(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})}{b_{22}} \quad (10)$$

아래의 Fig. 4와 5는 20 m/s로 주행하는 차량의 임피던스를 해석한 결과이다.

3. 등가계

Fig. 5의 임피던스 곡선의 특성을 관찰하면 약 2 rad/s

이하의 저주파 영역에서 -20 dB/dec의 기울기를 갖는 스프링의 특성이 크게 나타나고 10 rad/s 이상의 고주파에서는 20 dB/dec의 기울기를 갖는 질량의 특성이 두드러지며 약 4.5 rad/s와 6 rad/s에서 두 개의 공진점을 갖는다. 게다가 차량 주행속도의 영향은 매우 적은 것으로 나타났다. 이러한 특성을 종합하여 볼 때 인접차량의 동특성은 스프링, 댐퍼가 고정면과 질량을 연결하는 2자유도계에 외력이 질량에 작용할 때의 특성과 유사하다. 따라서 인접차량을 단순모델로 치환하는 등가계의 구조를 Fig. 6과 같은 2자유도계로 설정하였다.

m, I 는 등가계의 질량과 회전관성 모멘트이며 k, c 는 스프링상수와 감쇠계수이다. l 은 질량중심과 외력 작용점간의 거리이며, b 는 질량중심과 스프링 연결점간의 거리이다. l, b 는 각각 12, 7.95 m로 고정하였다.

4. 등가계의 임피던스

Fig. 6의 2자유도계의 운동방정식은 무게중심의 횡변위를 y_c , 회전각을 ψ_c 이라고 하면 아래의 식과 같이 전개된다.

$$m \ddot{y}_c + 2c \dot{y}_c + 2ky_c = f \quad (11)$$

$$I \ddot{\psi}_c + 2b^2 c \dot{\psi}_c + 2b^2 k \psi_c = -fl \quad (12)$$

식 (11)(12)에서 $\dot{y}_c = v_c e^{j\omega t}$, $\dot{\psi}_c = \Psi_c e^{j\omega t}$, $f = F e^{j\omega t}$ 로 치환하여 주파수영역으로 변환하면 다음과 같다.

$$[2c + j(m\omega - 2k/\omega)]v_c(\omega) = a \cdot v_c(\omega) = F(\omega) \quad (13)$$

$$- [2b^2 c/l^2 + j(I\omega/l^2 - 2b^2 k/l^2 \omega)]l\Psi_c(\omega) = -b \cdot l\Psi_c(\omega) = F(\omega) \quad (14)$$

등가계의 임피던스는 다음과 같이 정의된다.

$$Z_e(\omega) = \frac{F(\omega)}{\dot{y}(\omega)} = 1/(\dot{y}/F) = \frac{1}{v_c/F - l \cdot \Psi_c/F} \quad (15)$$

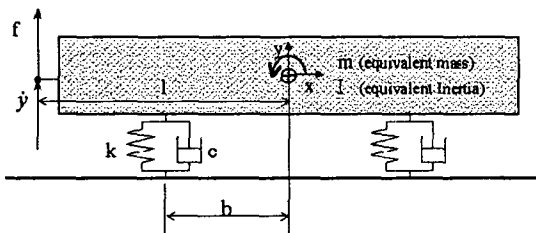


Fig. 6 Equivalent system structure

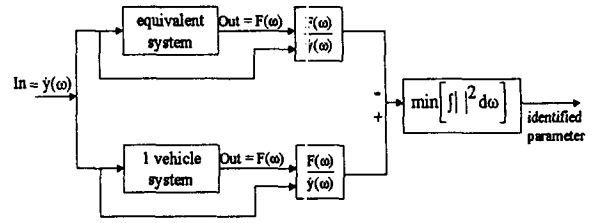


Fig. 7 Optimization method of equivalent system parameter

식 (13)과 (14)에서 $\frac{v_c}{F} = \frac{1}{a}$, $-\frac{l \cdot \Psi_c}{F} = \frac{1}{b}$ 이므로 식 (15)는 다음과 같이 정리된다.

$$Z_e = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b} \quad (16)$$

5. 등가계의 동역학 파라미터 결정방법

등가계의 임피던스는 Fig. 7의 m, I, k, c 의 함수이다. 등가계의 임피던스가 인접차량계의 임피던스의 특성에 최대한 근사하도록 4개의 파라미터를 계산하여야 한다. 파라미터는 등가계와 인접차량계의 임피던스의 차이를 최소화하는 파라미터의 최적화 방법으로 결정되며 아래의 Fig. 7에 나타내었다.

위의 방법으로 최적화된 파라미터를 적용하여 계산한 등가계의 임피던스는 Fig. 8, 9와 같다. 최적화된 등가계의 임피던스의 결과가 인접차량의 결과와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

5. 등가계를 적용한 중심차량 해석

위의 과정을 통하여 결정된 등가계를 Fig. 10과 같이

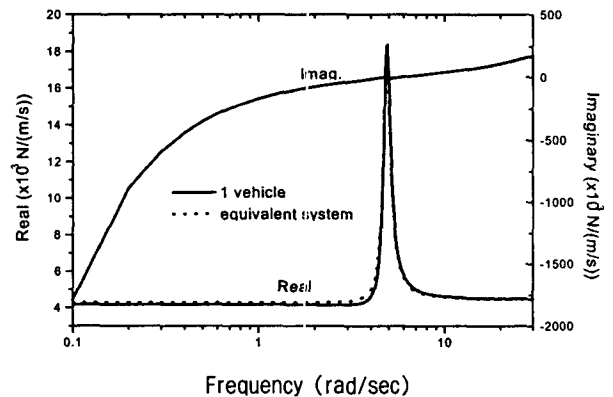


Fig. 8 Impedance of equivalent system

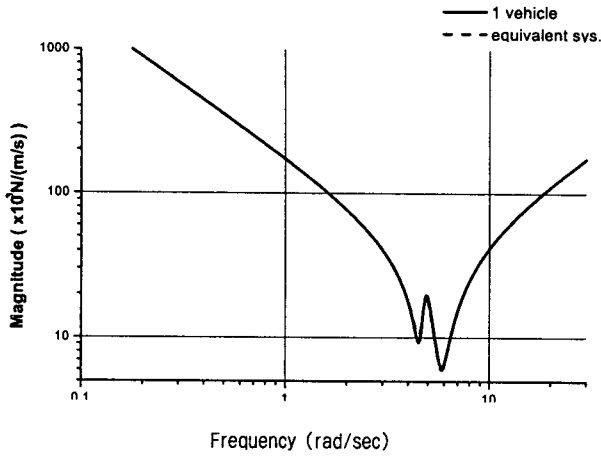


Fig. 9(a) Impedance magnitude of equivalent system

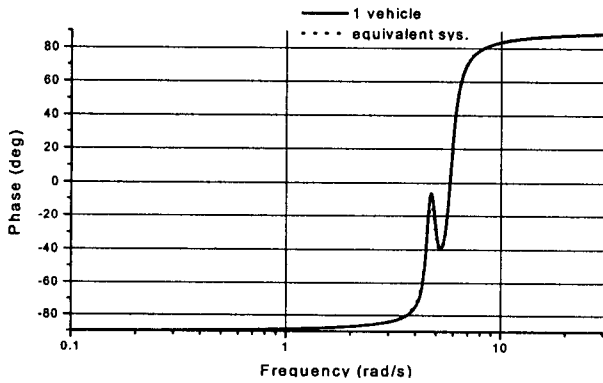


Fig. 9(b) Impedance phase of equivalent system

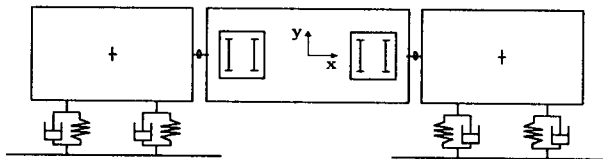


Fig. 10 Equivalent train system

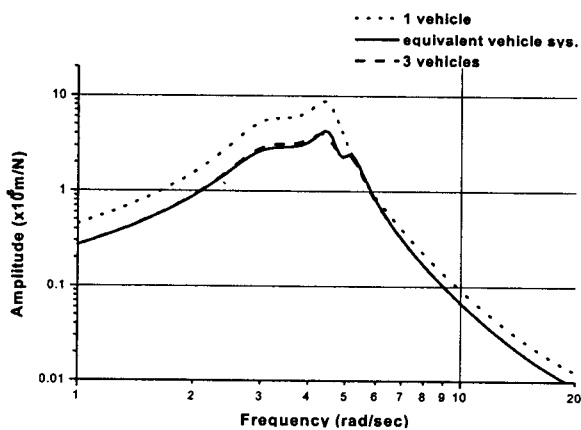


Fig. 11 Transfer function at 20 m/s

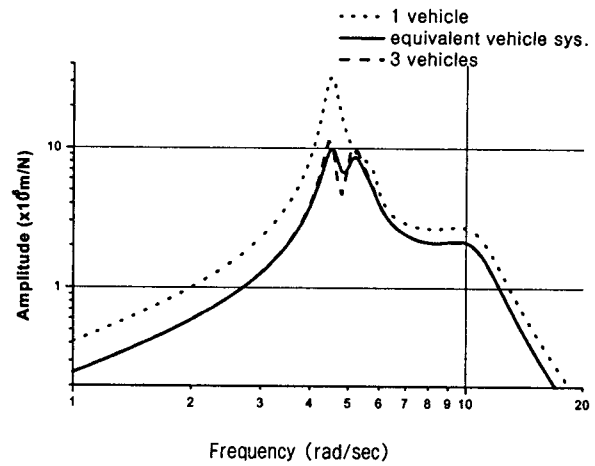


Fig. 12 Transfer function at 70 m/s

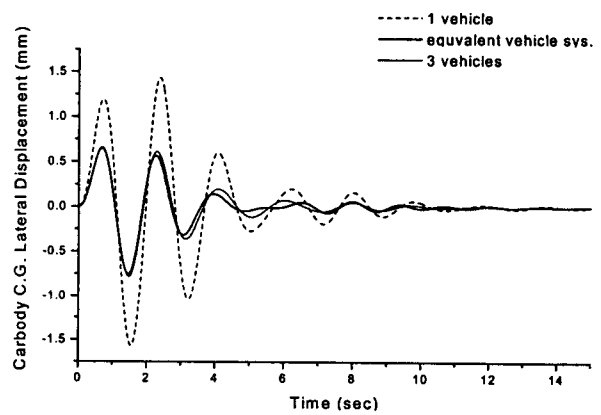


Fig. 13 Carbody lateral displacement at 20 m/s

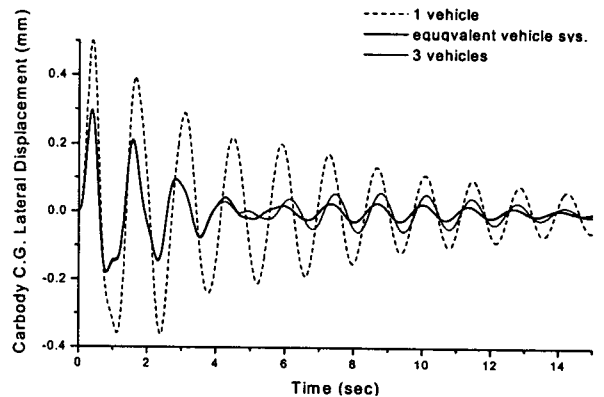


Fig. 14 Carbody lateral displacement at 70 m/s

중심차량 양단의 조인트에 연결한 등가계적용 모델의 동역학 해석을 하여 같은 주행조건하의 단일차량과 3차량의 결과와 비교하여 등가계적용의 적합성을 판단하였다. 단일차량은 14자유도계이며 3차량은 40자유도계이다. 등가계적용 차량은 하나의 등가계마다 1자유도가 추가되어 총 16자유도계가 된다.

5.1 전달함수

Fig. 1의 중심차량의 차축 W1에 작용하는 횡방향 외력을 입력으로 하고 차체 무게중심의 횡방향 변위를 출력으로 하는 전달함수를 주행속도 20, 70 m/s로 하여 해석하였다.(Fig. 11, 12) 전달함수 해석은 선형 크리프 이론을 적용한 선형해석이다. 결과를 보면 등가계 적용 차량의 전달함수가 두 가지 속도와 경우에서 모두 넓은 주파수 영역에서 3차량의 특성에 상당히 근접한 것을 볼 수 있다.

5.2 비선형 해석

비선형 차륜/레일 접촉이론과 비선형 크리프 이론을 적용하여 시간적분을 수행하였다(Fig. 13,14). 초기조건으로는 중심차량의 차축 W1의 횡변위를 +1 mm를 주었다. 주행속도를 20, 70 m/s로 하여 해석한 결과 차체의 횡방향 변위의 진폭이나 감쇠가 3차량의 결과에 매우 근접한 것을 볼 수 있다. 해석시간은 40초 해석시 3차량이 약 40분, 등가계 적용 차량이 약 15분이 소요되었다.

6. 결 론

등가계를 적용한 차량을 선형해석과 비선형 해석을 한 결과 모두 3차량의 특성에 매우 가까운 결과를 나타내어 본 연구방법의 적합성을 확인하였다. 해석시간의 경우 3차량과 비교하여 약 2.7배 빠른 결과를 보였다. 수치해석의 대부분이 크리프 힘을 계산하는 데 소요되므로 등가

계적용 차량의 경우 3차량에 비해 크리프 힘 계산량이 1/3이기 때문이다. 또한 등가계 적용 차량의 경우 비선형 크리프 해석은 중심차량에서만 이루어지므로 3차량 이상의 열차를 등가계로 치환하여 해석할 때는 더 많은 시간을 절약할 수 있을 것으로 판단된다. 따라서 본 연구방법을 임의의 인접차량을 갖는 열차의 해석으로 확장하게 되면 적은 양의 수치해석으로도 상당히 근사적인 열차해석을 할 수 있을 것으로 판단되며 보다 복잡한 크리프 이론도 적용이 가능할 것이다.

참 고 문 헌

- (1) Blader, F. B. and Kurtz, E. F. Jr., 1974, "Dynamic Stability of Cars in Long Freight Trains," *Journal of Engineering for Industry*, November, pp. 1159~1167.
- (2) 박동일, 임진수, 1998, "등가계를 이용한 열차의 횡방향 거동 연구," *한국철도학회 추계학술대회 논문집*, pp. 345~352.
- (3) Wormley, D. and Hedrick, K., Horak, D., 1981, "Rail Passenger Vehicle Truck Design Methodology", NTIS Report No. FRA/ORD-81/11.
- (4) Dukkipati, Rao V. and Amyot, Joseph R., 1988, "Computer-Aided Simulation in Railway Dynamics", Marcel Dekker, INC.