

〈논 문〉

보강재를 갖는 회전 평판 구조물의 동역학적 모델링 및 진동해석

Dynamic Modeling and Vibration Analysis of Rotating Plate Structures
with Stiffeners

허 성 철* · 유 흥 희**

Sung Chul Hur and Hong Hee Yoo

(1999년 12월 30일 접수 ; 2000년 2월 17일 심사완료)

Key Words : Vibration Analysis(진동해석), Rotating Cantilever Plate(회전 외팔 평판), Stiffener(보강재), Natural Frequency and Mode Shape Variation(고유진동수와 모드 형상 변화), Dimensionless Parameter(무차원 매개변수)

ABSTRACT

A modeling method for the vibration analysis of rotating cantilever plates with stiffeners is presented. The equations of motion for the plates are derived and transformed into a dimensionless form. A mass density Dirac's delta function is used to idealize the stiffener mathematically. The effects of stiffeners on the modal characteristics of the plate are investigated, and mode shape variations due to some parameter variation are exhibited. It is found that veering phenomena occur between some loci and associated mode shapes change significantly during the veering phenomena.

1. 서 론

회전하는 외팔보나 외팔평판 형태의 기계구조물은 여러 가지 공학적 예제에서 발견될 수 있으며, 대표적인 것으로는 터빈 블레이드, 인공위성의 태양열 전지판 등과 같은 것이 있다. 이러한 구조물의 회전운동은 원심방향의 관성력을 발생시켜 구조강성의 변화를 가져오며, 이는 다시 구조물의 진동특성 변화로 연계된다. 이러한 구조물들을 새로이 설계하거나 혹은 성능을 평가하고 개선시킴에 있어서 그 진동특성의 정확한 예측은 필수적이며, 따라서 정확한 특성을 파악할 수 있는 모델링의 개발이 필요하고 이에 근거한 진동해석을 통한 해석결과의 산출을 위한 연구가 필요하다.

회전외팔보의 진동에 관한 연구^(1~5)는 일찍이 1920년대 초부터 시작된 것으로 알려져 있다. 그러나, 인공위성의 태양열 전지판과 같은 구조물은 보보다는 평판으로 모델링을 해야 정확한 해석을 할 수 있으며, 이와 같은 회전하는 외팔평판에 관한 연구^(6,7)는 비교적 최근에 들어 진행되고 있다. 이들은 주로 유한요소법을 사용하고 있으며 정상상태에서 원심력과 평형을 이루는 응력을 사용해 정방형 탄성 에너지를 구하고, 이에 근거하여 강성행렬을 구함으로써 회전에 따른 진동특성 변화를 예측하고 있다. 그러나 이러한 방법은 정상상태의 응력을 먼저 구한 후 이를 다시 대입해야 하는 2 단계 과정으로 되어 있어 그 유도과정이 복잡하다. 좀더 최근에는 이러한 방법과는 달리 복합변형변수를 이용한 강체운동을 하는 평판의 선형 운동방정식이 제안되었다^(8~10). 이 모델링 방법은 앞 문헌들에 의한 방법들과 동일하게 효과적이나 유도과정 및 수치해석을 위한 간명성에서 훨씬 효율적임을 보여 준다. 본 논문에서는 이

* 한양대학교 대학원

** 정회원, 한양대학교 기계공학부

방법에 근거한 운동방정식을 유도하고 진동해석을 실시하였다.

평판 구조물들에 있어 굽힘강성, 비틀림강성 등의 특성을 개선하기 위하여 흔히 보강재를 설치하게 되는데, 이는 구조물의 동적 반응과 좌굴 등에 큰 영향을 미치게 되므로 이에 대한 연구가 필요하다. 평판에 보강재가 부가되면, 보강재의 운동을 나타내기 위하여 더 많은 운동방정식이 통상 필요하게 되며, 따라서 이러한 부가적 구조물들을 효율적이며 정확성을 갖도록 모델링해야 하는 경우가 흔히 발생한다. 참고문헌 (11)~(13)에서는 보나 평판에 집중질량이 부가되더라도 시스템의 자유도가 변화하지 않는 모델링 방법을 개발하였다.

본 연구의 목적은 위 모델링을 발전시켜 보강재를 가진 회전평판 구조물을 모델링하고, 회전과 보강재에 따른 고유진동수와 모드형상의 변화를 조사하여 이들이 미치는 영향을 고찰하는데 있다. 본 논문에서 제시된 모델링은 시스템의 자유도를 증가시키지 않으면서도 부착된 보강재를 표현하는 간단한 모델링을 제시하였다는 장점을 가진다.

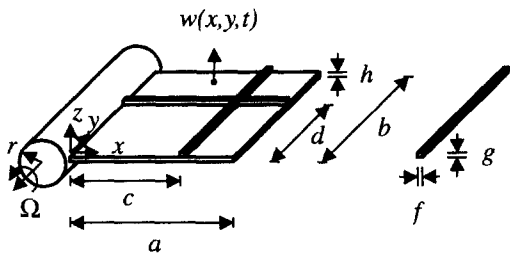


Fig. 1 Rotating cantilever plate with stiffeners

2. 진동방정식

2.1 보강재를 갖는 회전 외팔평판의 운동방정식

Fig. 1은 단위면적당 질량 ρ_p , 포아송비 ν , 굽힘강성계수 D , 가로 a , 세로 b 의 직사각형 형태의 외팔평판의 모습을 보여준다. 이 평판은 임의의 위치인 $x=c$, $y=d$ 에 단위길이당 질량 ρ_x, ρ_y 이고, 굽힘강성계수 $E_x I_x, E_y I_y$ 인 보강재를 가지고 있으며, 각속도 Ω 로 회전하고 있다.

평판의 굽힘방향 변위는 다음과 같이 모드함수 ϕ_i 와 일 반좌표 q_i 로 나타낼 수 있다.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x, y) q_i(t) \quad (1)$$

여기서, μ 는 사용된 모드의 갯수이다.

평판 위에 위치한 보강재 질량은 그 위치에서만 ρ_x, ρ_y ,

가 값을 갖는 충격함수(Dirac's delta function)라 생각할 수 있으므로, 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\rho = \rho_p + \rho_x \delta(x-c) + \rho_y \delta(y-d) \quad (2)$$

식 (2)에 나타난 방법으로 보강재가 평판상에 어떠한 형태로 위치하더라도 고려가 가능하다.

보강재를 가진 외팔평판의 가장 낮은 진동수에 영향을 미치는 것은 굽힘탄성에너지이다. 그런데 굽힘탄성에너지 U 는 다음과 같이 평판의 굽힘탄성에너지 U_p 와 보강재의 굽힘탄성에너지 U_s 의 합으로 표시할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ U_s &= \frac{1}{2} \int_0^a E_y I_y \left(\frac{\partial^2 w(x, d, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^b E_x I_x \left(\frac{\partial^2 w(c, y, t)}{\partial y^2} \right)^2 dy \\ U &= U_p + U_s \end{aligned} \quad (3)$$

식 (1)~(3)을 이용하면 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu} \left[\left\{ \int_0^b \int_0^a \rho_p \phi_i \phi_j dx dy + \int_0^a \rho_x \phi_i(x, d) \phi_j(x, d) dx \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^b \rho_y \phi_i(c, y) \phi_j(c, y) dy \right\} \ddot{q}_j \right. \\ \left. - \Omega^2 \left\{ \int_0^b \int_0^a \rho_p \phi_i \phi_j dx dy + \int_0^a \rho_x \phi_i(x, d) \phi_j(x, d) dx \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^b \rho_y \phi_i(c, y) \phi_j(c, y) dy \right\} q_j \right. \\ \left. + \left\{ \int_0^b \int_0^a D (\phi_{i,xx} \phi_{j,xx} + \phi_{i,yy} \phi_{j,yy} + \nu \phi_{i,xx} \phi_{j,yy} \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \phi_{i,yy} \phi_{j,xx} + 2(1-\nu) \phi_{i,xy} \phi_{j,xy} \right) dx dy \right. \\ \left. + \int_0^a E_y I_y \phi_{i,xx}(x, d) \phi_{j,xx}(x, d) dx \right. \\ \left. + \int_0^b E_x I_x \phi_{i,yy}(c, y) \phi_{j,yy}(c, y) dy \right\} q_j \\ \left. + r \Omega^2 \left\{ \int_0^b \int_0^a \rho_p (a-x) \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx dy \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^a \rho_y (a-x) \phi_{i,x}(x, d) \phi_{j,x}(x, d) dx \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^b \int_0^c \rho_x \phi_{i,x}(x, y) \phi_{j,x}(x, y) dx dy \right\} q_j \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Omega^2 \left\{ \int_0^b \int_0^a \frac{1}{2} \rho_p (a^2 - x^2) \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx dy \right. \\
 & + \int_0^a \frac{1}{2} \rho_y (a^2 - x^2) \phi_{i,x}(x, d) \phi_{j,x}(x, d) dx \\
 & \left. + \int_0^b \int_0^c \rho_x c \phi_{i,x}(x, y) \phi_{j,x}(x, y) dx dy \right\} a_j \\
 & = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu) \tag{4}
 \end{aligned}$$

여기서 아래첨자 중 컵마 뒤에 나타나는 것들은 이들에 대한 편미분을 의미한다. 식 (4)는 참고문헌 (12)에 나타난 집중질량의 영향을 고려한 외팔평판의 운동방정식과 유사성을 가지고 있는데 여기에는 $E_x I_x$ 와 $E_y I_y$ 를 포함한 두 항이 보강재의 강성으로 추가되어 있다.

2.2 무차원변수

식 (4)를 무차원화된 형태로 만들기 위해 무차원 변수, 무차원 매개변수, 그리고 함수를 다음과 같이 정의하여 사용한다.

$$\begin{aligned}
 \tau & \equiv \frac{t}{T} \\
 \zeta & \equiv \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \\
 z_j & \equiv \frac{q_j}{a} \\
 \lambda & \equiv \frac{a}{b}, \quad \gamma \equiv \frac{c}{a}, \quad \delta \equiv \frac{d}{b}, \quad \sigma \equiv \frac{r}{a} \\
 \bar{\rho}_x & \equiv \frac{\rho_x}{\rho_p a}, \quad \bar{\rho}_y \equiv \frac{\rho_y}{\rho_p b} \\
 K_x & \equiv \frac{E_x I_x}{Dab}, \quad K_y \equiv \frac{E_y I_y}{Dab} \\
 \omega & \equiv \frac{\Omega}{\Omega_r} \\
 \Psi_i(\zeta, \eta) & \equiv \phi_i(x, y) \tag{5}
 \end{aligned}$$

여기서 Ω_r 과 T 는 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\Omega_r \equiv \frac{1}{T} \equiv \sqrt{\frac{D}{\rho_p a^4}} \tag{6}$$

2.3 무차원 진동방정식

식 (5)를 이용하면 식 (4)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\mu} & \left[\left\{ \int_0^1 \int_0^1 \Psi_i \Psi_j d\zeta d\eta \right. \right. \\
 & + \bar{\rho}_y \int_0^1 \Psi_i(\zeta, \delta) \Psi_j(\zeta, \delta) d\zeta \\
 & \left. \left. + \bar{\rho}_x \int_0^1 \Psi_i(\gamma, \eta) \Psi_j(\gamma, \eta) d\eta \right\} \ddot{x}_j \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \Psi_i \Psi_j d\zeta d\eta \right\} \\
 & + \bar{\rho}_y \int_0^1 \Psi_i(\zeta, \delta) \Psi_j(\zeta, \delta) d\zeta \tag{7}
 \end{aligned}$$

식 (7)을 이용해 진동해석을 수행하기 위해서 무차원화된 일반좌표행렬을 다음과 같은 조화함수로 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 \underline{z} & = e^{j\omega_n \tau} \underline{Z} \\
 & + \bar{\rho}_x \int_0^1 \Psi_i(\gamma, \eta) \Psi_j(\gamma, \eta) d\eta \Big\} z_j \\
 & + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\Psi_{i,\zeta\zeta} \Psi_{j,\zeta\zeta} + \Psi_{i,\eta\eta} \Psi_{j,\eta\eta}) \lambda^4 \right. \\
 & + \nu \Psi_{i,\zeta\zeta} \Psi_{j,\eta\eta} \lambda^2 + \nu \Psi_{i,\eta\eta} \Psi_{j,\zeta\zeta} \lambda^2 \\
 & + 2(1-\nu) \Psi_{i,\zeta\eta} \Psi_{j,\zeta\eta} \lambda^2 \Big\} d\zeta d\eta \\
 & + K_y \int_0^1 \Psi_{i,\zeta\zeta}(\zeta, \delta) \Psi_{j,\zeta\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \\
 & + K_x \int_0^1 \Psi_{i,\eta\eta}(\gamma, \eta) \Psi_{j,\eta\eta}(\gamma, \eta) \lambda^4 b d\eta \Big\} z_j \\
 & + \omega^2 \sigma \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1-\zeta) \Psi_{i,\zeta} \Psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \\
 & + \bar{\rho}_y \int_0^1 (1-\zeta) \Psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \Psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \\
 & + \bar{\rho}_x \int_0^1 \int_0^1 \Psi_{i,\zeta}(\zeta, \eta) \Psi_{j,\zeta}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \Big\} z_j \\
 & + \omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\zeta^2) \Psi_{i,\zeta} \Psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \\
 & + \bar{\rho}_y \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\zeta^2) \Psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \Psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \\
 & \left. + \bar{\rho}_x \int_0^1 \int_0^1 \gamma \Psi_{i,\zeta}(\zeta, \eta) \Psi_{j,\zeta}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \right\} z_j \Big] \\
 & = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu) \tag{8}
 \end{aligned}$$

여기서, \underline{z}_j 를 요소로 갖는 기동행렬이며, ω_n 은 고유진동수를 Ω_r 로 나눈 무차원수를 나타내고, \underline{Z} 는 각 고유진동수에서 모드형태를 나타내는 기동행렬이다. 식 (8)에서 j 는 허수(imaginary number)를 나타내는 기호로 사용된다.

식 (8)을 식 (7)에 대입하면 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$\omega_n^2 \underline{M} \underline{Z} = \underline{K} \underline{Z} \tag{9}$$

여기서, \underline{M} 과 \underline{K} 는 $\mu \times \mu$ 의 크기를 갖는 정방행렬로 그 요소들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 M_{ij} & = \sum_{j=1}^{\mu} \int_0^1 \int_0^1 \Psi_i \Psi_j d\zeta d\eta \\
 & + \bar{\rho}_y \int_0^1 \Psi_i(\zeta, \delta) \Psi_j(\zeta, \delta) d\zeta \\
 & + \bar{\rho}_x \int_0^1 \Psi_i(\gamma, \eta) \Psi_j(\gamma, \eta) d\eta \tag{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij} = & -\omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \psi_i \psi_j d\zeta d\eta \right. \\
 & + \bar{\rho}_y \int_0^1 \psi_i(\zeta, \delta) \psi_j(\zeta, \delta) d\zeta \\
 & + \bar{\rho}_x \int_0^1 \psi_i(\gamma, \eta) \psi_j(\gamma, \eta) d\eta \left. \right\} \\
 & + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,\zeta\zeta} + \psi_{i,\eta\eta} \psi_{j,\eta\eta}) \lambda^4 \right. \\
 & + \nu \psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,\eta\eta} \lambda^2 + \nu \psi_{i,\eta\eta} \psi_{j,\zeta\zeta} \lambda^2 \\
 & + 2(1-\nu) \psi_{i,\zeta\eta} \psi_{j,\zeta\eta} \lambda^2 \left. \right\} d\zeta d\eta \\
 & + K_y \int_0^1 \psi_{i,\zeta\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta\zeta}(\zeta, \delta) a d\zeta \\
 & + K_x \int_0^1 \psi_{i,\eta\eta}(\gamma, \eta) \psi_{j,\eta\eta}(\gamma, \eta) \lambda^4 b d\eta \left. \right\} \\
 & + \omega^2 \sigma \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1-\zeta) \psi_{i,\zeta} \psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \\
 & + \bar{\rho}_y \int_0^1 (1-\zeta) \psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \\
 & + \bar{\rho}_x \int_0^1 \int_0^1 \psi_{i,\zeta}(\zeta, \eta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \left. \right\} \\
 & + \omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\zeta^2) \psi_{i,\zeta} \psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \\
 & + \bar{\rho}_y \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\zeta^2) \psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \\
 & + \bar{\rho}_x \int_0^1 \int_0^1 \gamma \psi_{i,\zeta}(\zeta, \eta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \left. \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

3. 수치해석

3.1 해석결과의 신뢰성 검증

보강재를 가진 평판에 대한 해석결과의 신뢰성을 다음과

Table 1 Comparison of non-dimensional natural frequencies

ω	First natural frequency		Second natural frequency	
	Present	Ref.(11)	Present	Ref.(11)
0	1.5575	1.5573	16.2708	16.2527
1	1.6177	1.6175	16.7476	16.7279
2	1.7684	1.7683	18.1006	18.0830
3	1.9579	1.9578	20.1480	20.1300
4	2.1541	2.1536	22.6940	22.6745
5	2.3448	2.3433	25.5817	25.5586
6	2.5270	2.5236	28.7012	28.6722
7	2.7009	2.6944	31.9801	31.9422
8	2.8680	2.8566	35.3709	35.3210
9	3.0295	3.0110	38.8427	38.7772
10	3.1868	3.1588	42.3747	42.2899

같이 검증하였다. 가로 끝단에 보강재를 가진 외팔평판의 세로길이 b 를 평판의 두께 h 와 같게 한다면, 이는 길이가 a 인 보처럼 생긴 구조물이 될 것이므로, 끝단에 집중 질량을 가진 보로 모델링 할 수 있다. Table 1 은 보와 집중 질량의 비 $\bar{\rho}_x = 1$, 축반경비 $\sigma = 0$ 일 때 본 논문에 제시된 방법에 의한 면내굽힘진동해석의 결과들을 참고문헌 (11)에 제시된 방법에 의한 결과들과 비교하고 있다. 이 결과에서 평판 모델링에 의한 결과가 보 모델링에 의한 결과보다 약간 높은데, 이는 평판이론에서는 포아송효과가 고려되므로 평판 모델링이 보 모델링에 비해 실제 구조물을 더 강성이 크게 이상화하는 것을 나타내는 것이다.

3.2 너비방향 보강재가 평판중앙에 위치한 경우

Table 2는 Fig. 2와 같이 너비방향 보강재가 평판중앙에 부착되어있는 축반경비 $\sigma = 0$ 이고 가로세로비 $\lambda = 1$ 인 정사각형 외팔평판에서, 평판과 보강재의 폭비 $f/a = 0.01$, 두께비 $g/h = 0, 4, 8$ 인 보강재와 3 가지의 회전각속도의 경우에 대해 가장 낮은 5 개의 고유진동수들을 나타내고 있다. 직관적으로 예측되듯이 회전각속도의 증가는 고유진동수를 증가시키며, 부착된 보강재의 크기가 커질수록 질량이 커지게 되므로 고유진동수의 감소를 초래한다. 그러나 네 번째 고유진동수 ($g/h = 4, 8$ 인 보강재에서는 다섯

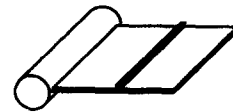


Fig. 2 The plate with chordwise stiffener

Table 2 Non-dimensional natural frequencies with the chordwise stiffeners

ω	Mode	$g/h = 0$	$g/h = 4$	$g/h = 8$
1	1	3.5157	3.4911	3.4674
	2	8.5329	8.4160	8.3024
	3	21.5207	21.0200	20.5097
	4	27.3529	30.1547	29.2780
	5	31.2062	30.1719	35.8194
2	1	3.5964	3.5716	3.5478
	2	8.5507	8.4342	8.3210
	3	21.8679	21.3767	20.8632
	4	27.3843	30.1681	29.5373
	5	31.4770	30.4365	35.8648
3	1	4.0581	4.0326	4.0079
	2	8.6697	8.5557	8.4452
	3	24.0334	23.7093	23.1898
	4	27.7116	30.2723	31.2867
	5	33.3045	32.2226	36.1716

번째)의 변화를 살펴보면 보강재가 커질수록 고유진동수 또한 커지는 것을 볼 수 있는데, 이것은 이 모드가 너비방향 굽힘모드로서 부착된 보강재에 의해 이 방향의 굽힘강성이 커졌기 때문이다.

Fig. 3은 $f/a=0.01, g/h=4$ 인 경우, 회전각속도의 증가에 따른 고유진동수의 변화를 보강재가 없는 경우와 비교하여 보여주고 있다. 그림에서 네번째와 다섯번째 고유진동수 궤적이 $\omega=15$ 부근에서 서로 교차하고 있으며 세 번째와 네 번째 고유진동수 궤적은 서로 일정한 간격까지 접근하다가 다시 멀어지는 현상을 보여준다. 전반적으로 보강재가 부착된 평판의 고유진동수가 보강재가 없는 평판보다 낮게 나타나고 있는데 이는 이 경우에 보강재가 강성보다 질량 효과를 증가시키기 때문이다. 그러나 너비방향 굽힘강성은 증가하여 네 번째 고유진동수는 증가하였음을 볼 수 있다.

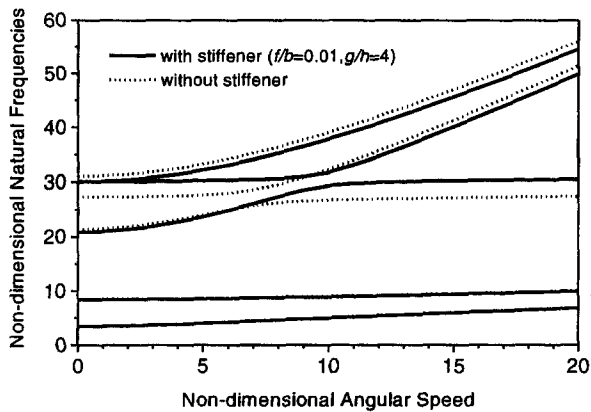


Fig. 3 Variation of non-dimensional natural frequencies with and without chordwise stiffener

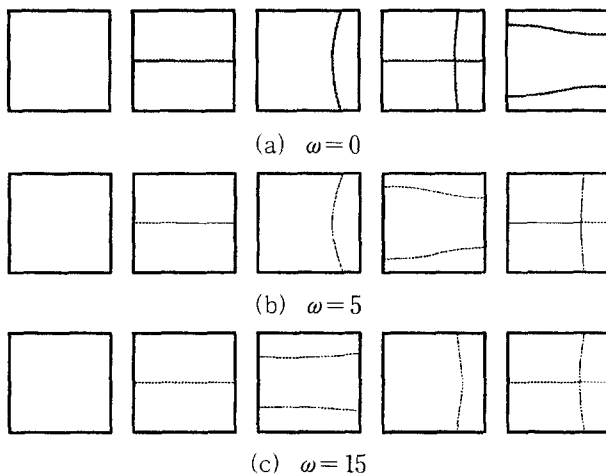


Fig. 4 Mode shape variations with the angular speed change

Fig. 4는 위의 보강재가 부착된 평판에서 $\omega=0$ 일 때와 $\omega=5$ 일 때, 그리고 $\omega=15$ 일 때의 모드들의 절선들을 나타내고 있다. (a)에서 첫 번째 모드는 길이방향 첫 번째 굽힘모드, 두 번째 모드는 첫 번째 비틀림 모드, 세 번째 모드는 길이방향 두 번째 굽힘 모드, 네 번째 모드는 두 번째 비틀림 모드, 그리고 다섯 번째 모드는 너비방향 굽힘 모드이다. (b)에서 보듯이 네 번째와 다섯 번째 모드 (a)에서와 바뀌어 있는데, 이는 회전각속도의 증가에 따라 이 고유진동수들의 궤적이 Fig. 3에서 보여주듯이 교차하기 때문이다. 그런데 (b)와 (c)를 비교해 보면 세 번째와 네 번째 모드가 마치 서로 바뀐듯이 보이는 데 이는 두 궤적이 서로 접근하다가 멀어질 때 (이 현상을 횡현상이라고 부름) 모드절선의 변화가 급격히 일어나기 때문이다. Fig. 5의 (a)와 (b)는 Fig. 4의 세 번째와 네 번째 모드의 절선들이 회전각속도가 $\omega=5$ 에서 $\omega=15$ 까지 변화함에 따라 변화하는 것을 중첩한 그림이다. 또한 Fig. 5의 (c)는 (a)와 (b)를 중첩시켜 나타낸 것인데, 세 번째와 네 번째 모드들의 절선 변화 시 일정 위치에 존재하는 2개의 공통 절점의 존재를 확인할 수 있다.

3.3 길이방향 보강재가 평판중앙에 위치한 경우

Table 3은 Fig. 6과 같이 길이방향 보강재가 평판중앙에 부착되어 있는 축반경비 $\sigma=0$ 인 정사각형 외팔평판에서, 폭비 $f/a=0.01$, 두께비 $g/h=0, 4, 8$ 인 보강재와 3가지 회전각속도의 경우에 대해 가장 낮은 5개의 고유진동수들을 나타내고 있다. 직관적으로 길이방향으로 부착된 보강재는 길이방향 굽힘강성에 많은 영향을 미치는 것을 알 수 있는데 부착된 보강재의 크기가 커짐에 따라 평판의 길이방향 굽힘강성이 크게 증가하여 표에서 굽힘모드를 나

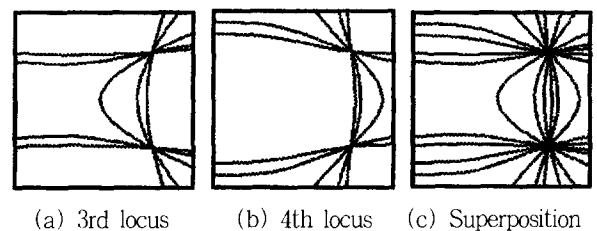


Fig. 5 Superposition of nodal lines in 3rd and 4th mode shapes.

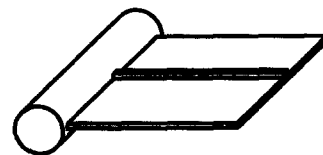


Fig. 6 The plate with spanwise stiffener

Table 3 Non-dimensional natural frequencies with the spanwise stiffeners

ω	Mode	$g/h=0$	$g/h=4$	$g/h=8$
1	1	3.5157	4.3417	7.7638
	2	8.5329	8.5329	8.5329
	3	21.5207	24.1973	25.9979
	4	27.3529	28.5022	31.2062
	5	31.2062	31.2062	35.0570
2	1	3.5964	4.4077	7.7986
	2	8.5507	8.5507	8.5507
	3	21.8679	24.3773	26.0459
	4	27.3843	28.6429	31.4770
	5	31.4770	31.4770	35.2665
3	1	4.0581	4.8058	8.0249
	2	8.6697	8.6697	8.6697
	3	24.0334	25.2983	26.3301
	4	27.7116	29.8679	33.3045
	5	33.3045	33.3045	36.7313

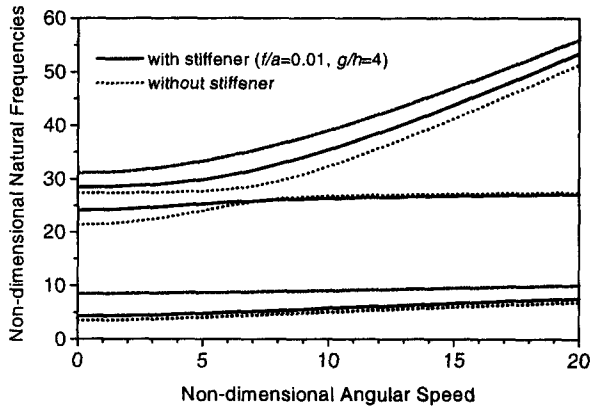


Fig. 7 Variation of non-dimensional natural frequencies with and without spanwise stiffener

타내는 첫 번째와 세 번째 고유진동수가 민감하게 변하는 것을 볼 수 있다. 하지만, 비틀림모드인 두 번째와 다섯 번째 ($g/h=8$ 인 보강재에서는 네 번째) 고유진동수에는 별 영향을 미치지 않는 것을 알 수 있다.

Fig. 7은 $f/b=0.01$, $g/h=4$ 인 길이방향 보강재가 평판의 중앙에 부착되어있는 경우, 회전각속도의 증가에 따른 고유진동수의 변화를 보강재가 없는 평판의 경우와 비교하여 보여주고 있다. Fig. 3과는 다르게 이 경우는 보강재가 질량보다 강성을 증가시키는 역할을 하고 있어 보강재가 있는 평판의 고유진동수가 없는 평판보다 전반적으로 크게 나타나고 있으며 특히 길이방향 굽힘 모드와 관련된 고유진동수들의 변화가 큰 것을 알 수 있다.

Fig. 8의 (a)는 $\omega=0$ 일 때의 모드들의 절선들을 나타내

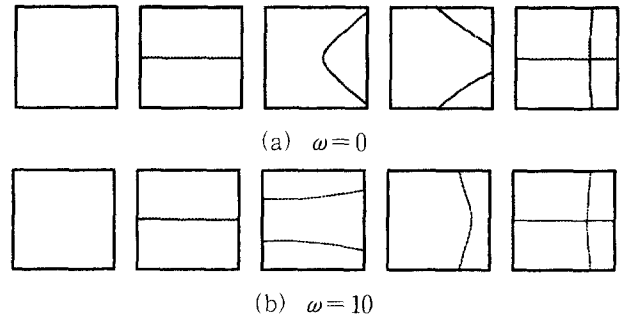


Fig. 8 Mode shape variations with the angular speed change

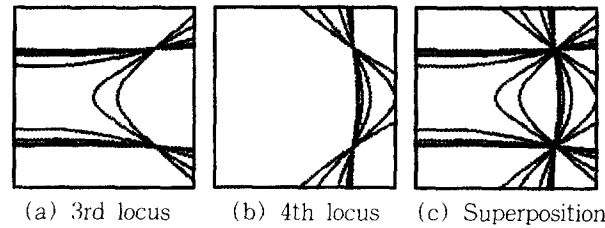


Fig. 9 Superposition of nodal lines in 3rd and 4th mode shapes

고 있는데 세 번째 모드의 절선을 살펴보면 보강재가 평판에 부착되어 있을 때에는 수직방향이었지만 (Fig.4(a) 참조), 45도 사선방향으로 바뀐 것을 알 수 있는데, 이는 길이방향 보강재로 인한 평판의 길이방향 굽힘강성의 증가에 기인하는 것이다. Fig. 8(b)는 $\omega=10$ 일 때의 모드절선으로 각속도의 증가에 따른 모드절선의 변화를 보여준다. 여기서 세 번째와 네 번째 모드 형상의 변화가 급격한 것을 보여주는데 이는 Fig. 7에서 보는 세 번째와 네 번째 고유진동수 궤적 사이의 휨현상 시 발생하는 것이다.

Fig. 9의 (a)와 (b)는 세 번째 모드와 네 번째 모드가 회전각속도가 증가함에 따라 변화하는 절선들을 중첩한 모습을 보여주고 있으며, (c)는 이를 중첩시켜 보여주고 있다. 3.2절에서와 마찬가지로 여기서도 공통절점의 존재를 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 보강재를 가진 회전하는 외팔평판의 운동 방정식에 근거하여 진동방정식을 유도하고 해석을 수행하였다. 보강재의 형태, 크기, 위치와 평판의 회전각속도에 따른 고유진동수의 변화와 이에 수반되는 모드형상의 변화를 관찰할 수 있었다. 특히 너비방향 및 길이방향 보강재가 평판의 질량 및 강성에 얼마나 영향을 미치는지 정량적으로 확인할 수 있었고, 고유진동수 궤적간 교차 및 휨 현상에 미치는 영향을 관찰할 수 있었다. 고유진동수의 휨 현

상은 관련 모드들 간에 상호영향을 주고 받는 형태변화를 수반하는 것을 알 수 있었으며, 절선의 변화에도 불구하고 일정한 위치에 존재하는 공통 절점들의 존재를 확인할 수 있었다.

후 기

이 논문은 1999 년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.
- (2) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force," NASA TN No. 516.
- (3) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 25, pp.28~30.
- (4) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," J. of Sound and Vibration, Vol. 56, pp.175~185.
- (5) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," J. of Sound and Vibration, Vol. 105, No. 2, pp.199~210.
- (6) Ryan, R. R. and Yoo, H. H., 1989, "Element Specific Linear and Nonlinear Modeling," SDIO NASA Conference Proceedings, San Diego, California, January.
- (7) Dokainish, M. and Rawtani, S., 1971, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pp.233~248.
- (8) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates," J. of Sound and Vibration, Vol. 97, No. 3, pp.429~449.
- (9) 유흥회, 1992, "강체운동을 하는 탄성평판의 선형 동적 모델링," 한국항공우주공학회지, 제 20 권, 제 4 호, pp.891~898.
- (10) 유흥회, 1993, "회전하는 외팔평판의 진동해석," 대한기계학회논문집, 제 17 권, 제 3 호, pp.652~657.
- (11) 유흥회, 1996, "집중질량의 영향을 고려한 회전 외팔보의 진동해석," 대한기계학회논문집(A), 제 20 권, 제 8 호, pp. 2516~2523.
- (12) 유재근, 유흥회, 1998, "집중질량을 가진 강체운동을 하는 탄성평판의 동적해석," 한국항공우주학회지, 제 26 권, 제 6 호, pp. 41~48.
- (13) 양정식, 유흥회, 1998, "집중질량을 가진 회전하는 외팔평판의 진동해석," 한국소음진동공학회지, 제 8 권, 제 6 호, pp. 1130~1136.
- (14) Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method," J. of Applied Mechanics, Vol. 17, No. 4, pp. 448~453.
- (15) Barton, M. V., 1951, "Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates," J. of the Applied Mechanics, Vol. 18, No. 1, pp. 129~134.
- (16) Leissa, A. W., 1969, Vibration of Plates, NASA SP-160.