

〈논 문〉

수정된 웨이블릿 축소 기법을 이용한 전달함수의 추정

Transfer Function Estimation Using a Modified Wavelet Shrinkage

김 윤 영* · 홍 진 철** · 이 남 용***

Yoon Young Kim, Jin Chul Hong and Nam Yong Lee

(2000년 2월 7일 접수 ; 2000년 8월 30일 심사완료)

Key Words : Transfer Function (전달함수), Noise (잡음), Wavelet Shrinkage (웨이블릿 축소), Median Filter (중간 필터)

ABSTRACT

The purpose of the work is to present successful applications of a modified wavelet shrinkage method for the accurate and fast estimation of a transfer function. Although the experimental process of determining a transfer function introduces not only Gaussian but also non-Gaussian noises, most existing estimation methods are based only on a Gaussian noise model. To overcome this limitation, we propose to employ a modified wavelet shrinkage method in which L^1 -based median filtering and L^2 -based wavelet shrinkage are applied repeatedly. The underlying theory behind this approach is briefly explained and the superior performance of this modified wavelet shrinkage technique is demonstrated by a numerical example.

1. 서 론

선형 동적 시스템의 전달함수를 추정하는 것은 가장 일반적인 시스템 식별 방법이며^(1,2), 잡음이 제거된 신뢰성 있는 전달함수를 얻기 위하여 푸리에 변환에 기초한 필터링을 포함한 여러 가지 방법이 제안되어 왔다. 실제로 불규칙 진동 해석의 경우에, 정확한 전달함수를 추정하기 위하여 사용되는 간단한 방법은 잡음을 포함하는 전달함수간의 평균을 이용하는 것이다. 그러나 시스템이 복잡하거나 비가우스(non-Gaussian) 잡음을 포함하는 경우, 이 방법은 많은 양의 실험 자료를 요구할 뿐만 아니라, 신뢰할 수 없는 추정 결과를 낳기도 한다. 본 연구의 목적은 수정된 웨이블릿 축소 기법을 이용하여 전달함수를 보다 정확하고 효율적으로 구하는데 있다.

근래 들어 웨이블릿은 함수를 표현하는 효과적인 방법으로써 신호와 이미지 처리, 통계 분야 등에 널리 이용되고 있는데, 중요한 이용 분야 중의 하나가 잡음에 의해 왜곡된 신호의 추정이다⁽⁴⁾. Donoho와 Johnstone이 제안했던 웨이블릿 축소 기법(wavelet shrinkage)의 이론적 근거는 원 신호가 상대적으로 큰 소수의 웨이블릿 계수로 잘 표현되는 반면, 가우스 잡음은 작은 크기를 가지면서 모든 웨이블릿 계수에 걸쳐 고르게 분포한다는 사실에 있다. 따라서 가우스 잡음의 표준편차(standard deviation)를 평가하여 잡음에 의한 웨이블릿 계수를 제거함으로써, 원 신호를 추정할 수 있다는 것이다. 그러나 이 방법은 잡음이 가우시안 분포를 따른다는 가정 하에서 전개되었기 때문에, 실제로 흔하게 발견되는 이상치(outlier)들이 포함된 잡음을 갖는 신호의 처리에는 적당하지 않다. 다시 말해서 비가우스 잡음이 신호에 두드러지게 분포하고 있을 경우에, 일반적인 웨이블릿 축소 기법은 원하는 수준의 결과를 제공해 줄 수 없다.

최근에 기존의 웨이블릿 축소 방법을 비가우스 잡음의 제거에 확장시키려는 시도에서 새로운 방법이 제시되었다.

* 정회원, 서울대학교 공과대학 기계항공공학부

** 서울대학교 대학원 기계설계학과

*** 강원대학교 공과대학 제어계측공학과

Bruce 등⁽⁶⁾에 의해 제안된 이 방법은 웨이블릿 분해의 각 단계에서 중간 필터를 이용한 전처리 과정을 추가하여 비가우스 잡음을 제거하게 되며, 잔존하는 가우스 잡음은 기존의 축소 방법에 의하여 처리할 수 있도록 하였다. 이 방법은 이상치들을 포함하는 비가우스 잡음에 훨씬 강건하므로 원 신호를 왜곡 없이 효과적으로 추정한다.

일반적으로 우리가 접하게 되는 전달함수는 많은 비가우스 잡음을 포함하고 있기 때문에 기존에 알려진 방법^(6,7)으로는 잘 추정되지 않는다. 본 논문에서는 수정된 웨이블릿 축소 기법을 전달함수의 추정에 처음으로 적용해 보았다. 전달함수간의 단순 평균처리에 의한 추정 방법에 비하여 수정된 웨이블릿 축소 방법은 전달함수를 보다 정확하게 추정할 뿐만 아니라, 추정에 필요한 평균 연산 시간을 크게 단축시킬 수 있음을 제시하였다.

2. 시스템 추정 문제

선형 동적 시스템의 시스템 추정 문제에서는 Fig. 1과 같은 모델을 사용할 수 있다. Fig. 1에서처럼, 다음과 같은 관측 신호 $x(t)$, $y(t)$ 를 얻는다고 하자.

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + m(t) \\ y(t) &= v(t) + n(t) = h(t) * u(t) + n(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $m(t)$, $n(t)$ 는 각각 정규분포 $N(0, \sigma_m^2)$ 와 $N(0, \sigma_n^2)$ 을 따르는 가우스 잡음이고, (*)는 컨볼루션 연산자를 의미한다. 이 때, 참 전달함수는 충격응답함수 $h(t)$ 의 푸리에 변환으로 다음과 같이 정의된다.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

과제는 관측신호 $x(t)$, $y(t)$ 로부터 참 전달함수 $H(\omega)$ 를 추정하는 것이다. 관측 신호들은 스펙트럼 밀도 함수와 누설 오차를 줄이기 위한 윈도우 함수를 통해서 측정 전달함수 $\hat{H}(\omega)$ 를 구성하게 되는데, 이 측정된 전달함수는 부가적인 잡음에 의하여 왜곡된다.

$$\hat{H}(\omega) = H(\omega) + Z(\omega) \quad (3)$$

$h(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $m(t)$, $n(t)$ 등의 변수들과 연관되어 있다고 생각되는 $Z(\omega)$ 는 시스템과 통계적 오차 등에 의한 복소잡음이라고 할 수 있으며, $Z(\omega)$ 를 효과적으로 제거해야만 참 전달함수를 추정할 수 있다. 그러나 주목해야 할 점은 $H(\omega)$ 를 추정하는데 있어, 출력 $Y(\omega)$ 가 입력 $X(\omega)$ 로 나누어지는 형태가 사용되는 등의 이유로 해서

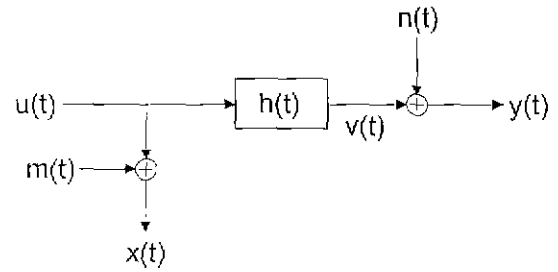


Fig. 1 A noisy model used in system identification

일반적으로 $Z(\omega)$ 는 가우시안 분포를 따르지 않는다는 사실이다. 심지어 입력과 출력 신호가 순수한 가우스 잡음에 의해 오염되어 있을 경우에도 유도된 전달함수의 잡음은 가우시안 성질을 보유할 수 없고, 이상치들을 포함하는 비가우시안 성질의 잡음으로 변질되게 된다. 따라서 우리는 이 $Z(\omega)$ 를 다음과 같이 가우스 잡음과 비가우스 잡음의 합으로 표현할 수 있다고 가정하였다.

$$Z(\omega) = P(\omega) + Q(\omega) \quad (4)$$

가우스 잡음 $P(\omega)$ 와 비가우스 잡음 $Q(\omega)$ 를 동시에 제거하기 위해서 표준적인 웨이블릿 축소 방법을 확장한 수정된 방법을 도입하였다.

3. 수정된 웨이블릿 기법에 의한 추정

3.1 웨이블릿 축소 기법

웨이블릿 변환은 함수를 표현하는 효과적인 방법으로써 $L^2(R)$ 공간은 스케일링 함수 ϕ 에 의해 구성되는 부분 공간의 합으로 표현되며, 부분 공간의 차이는 웨이블릿 함수 ϕ 에 의해 표현된다.⁽⁹⁾ 스케일링 함수와 웨이블릿 함수는 2-스케일 관계에 의하여 다음의 관계식을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \phi(2^{j-1}t) &= \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2^j t - k) \\ \psi(2^{j-1}t) &= \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2^j t - k) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 상첨자 j 는 스케일을 나타내는 정수 인덱스이며, h_k 와 g_k 는 원하는 웨이블릿 함수 ϕ 에 따라 결정되는 값으로 일종의 이산 필터로 볼 수 있다. 이러한 이산 필터 h, g 의 값은 참고문헌 (9)와 (10)에 잘 나타나 있다.

웨이블릿 변환을 이용한 잡음 제거는 Donoho와 Johnstone에 의해 제안되었는데, 소위 웨이블릿 축소 방법으로 불린다. 웨이블릿 축소 방법은 신호로부터 잡음을 제거하거나 통계학에서 무변수 추정 등에 널리 이용된다.

다음과 같은 노이즈 신호 $y(t_i)$ 를 관측한다고 가정하자.

$$y(t_i) = f(t_i) + z(t_i), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (6)$$

여기서 $f(t_i)$ 는 원 신호이며, $z(t_i)$ 는 정규분포 $N(0, \sigma^2)$ 을 따르는 가우스 잡음을 의미한다. 웨이블릿 축소 방법은 신호로부터 잡음을 제거하기 위하여 웨이블릿 변환에 의해 구해지는 웨이블릿 계수 중에서 잡음에 해당하는 계수들을 적절한 문턱값(threshold)에 의해 제거하거나 축소시키는 원리에 기초한다. 이는 다음과 같은 과정에 의해 실행된다

- (1) 오염된 신호의 웨이블릿 변환
- (2) 문턱값의 선택

$$\lambda = \sigma\sqrt{2\log N} \quad (7)$$

- (3) 웨이블릿 계수들에 대하여 약 문턱값함수(soft thresholding) 적용

$$S_\lambda(x) = \begin{cases} x - \lambda, & x > \lambda \\ 0, & |x| < \lambda \\ x + \lambda, & x < -\lambda \end{cases} \quad (8)$$

- (4) 웨이블릿 역 변환

널리 사용되는 문턱값인 $\lambda = \sigma\sqrt{2\log N}$ 은 여러 경우에서 확인된 것처럼 좋은 이론적 성질들을 만족한다고 알려져 있다.

3.2 수정된 웨이블릿 축소 기법

본 방법의 목적은 비가우스 잡음에 강건하도록 수정된 웨이블릿 분해⁽⁵⁾를 이용하여 전달함수를 보다 정확하고 효율적으로 구하는데 있다. 이 방법은 일반적인 웨이블릿 축소 방법과 유사하게 수행되나, 각 분해 레벨에서 비가우스 잡음을 처리하기 위해서 중간 필터를 이용한 전처리 과정을 추가하여 비가우스 잡음 환경에까지 적용될 수 있다. 이 방법은 L^1 에 기초한 다른 기법과는 달리 웨이블릿 변환의 빠른 연산 특성을 그대로 갖고 있다는 특징이 있다. Fig. 2는 기본 알고리즘을 보여준다.

이 방법은 다음과 같은 과정을 통하여 수행된다. 잡음을 포함한 전달함수 $\hat{H}(\omega)$ 의 샘플링된 이산 신호를 a_0 라고 할 때,

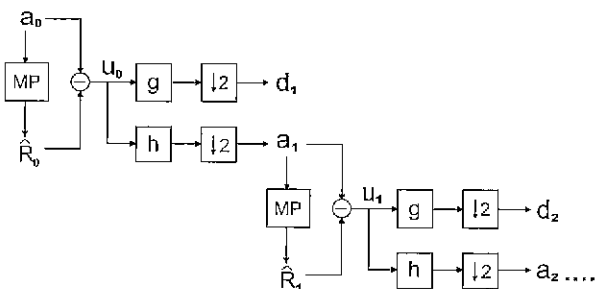


Fig. 2 Basic algorithm of the modified wavelet decomposition

Step 1: 임의의 레벨 j 에 대하여.

$$\begin{aligned} \hat{R}_j &= T_\mu[a_j - \hat{a}_j] = T_\mu[R_j] \\ &\approx T_\mu[P_j + Q_j] \approx Q_j \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 \hat{a}_j 는 a_j 를 중간 필터링한 신호이며, T_μ 는 문턱값 μ 를 갖는 약 문턱값 적용함수이다. 따라서 약 문턱값 적용함수를 이용해서 가우스 잡음 P_j 를 제거하면 \hat{R}_j 는 비가우스 잡음 Q_j 로만 구성된다고 가정할 수 있다.

Step 2: a_j 와 \hat{R}_j 의 차는 비가우스 잡음이 제거된 수정된 스케일링 계수 u_j 를 제공한다.

$$u_j = a_j - \hat{R}_j \approx a_j - Q_j \quad (10)$$

Step 3: 이산 웨이블릿 변환에 의해 u_j 를 다음 레벨의 스케일링 계수와 웨이블릿 계수로 나누고, 웨이블릿 계수를 문턱값에 대하여 축소시킨다.

Step 1에서 중간 필터의 크기는 일반적인 경우에 5내지 7이면 충분하다고 알려져 있으며, 필터링의 적용 깊이는 평활 효과의 극소화를 위해서 적절히 선택될 수 있다. 잉여값 R_j 는 주로 가우스 잡음 P_j 와 비가우스 잡음 Q_j 로 구성되는데, 문제는 P_j 의 표준편차를 정확히 예측하여 R_j 에서 P_j 를 제거하기 위한 문턱값 μ 를 결정하는데 있다. 일반적으로 오염된 신호의 가우스 잡음 강도는 웨이블릿 계수의 중간값 추정에 의해 상당히 정확하게 추정될 수 있음이 알려져 있으므로⁽⁶⁾ 여기서도 그 방법을 이용하였다. 즉 가우스 잡음 P_j 의 잡음 강도 σ 는 레벨에 따라 일정하며,

$$\sigma = \frac{1}{0.6745} \text{median}(|\langle R_1, \phi_{1,k} \rangle|), \quad 0 \leq k \leq N/2 \quad (11)$$

식 (11)과 같이 추정된다. 여기서 $\phi_{1,k} = \sqrt{2}\psi(2t-k)$ 이다. 또한, P_j 가 정규분포를 따를 것이므로 95% 신뢰도를 갖도록 하여 μ 를 1.96σ 로 결정하였다. 문턱값 μ 에 대하여 상대적으로 크기가 작은 P_j 가 제거되어, \hat{R}_j 는 비가우스 잡음만을 포함하게 되며, 결국 Step 2의 u_j 는 가우스 잡음만 섞인 수정된 스케일링 계수가 된다. Step 3의 웨이블릿 축소에서는 널리 사용되는 $\sigma\sqrt{2\log N}$ 을 문턱값 λ 로 이용하였다. 또한 축소 방법으로써, 소위 SureShrink라고 불리는 레벨 의존 축소 방법을 적용하였다. SureShrink 방법은 레벨에 따라 다른 축소 파라미터를 사용하는 것으로, 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\lambda_j = \frac{\lambda_1}{2^{j-1}}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

여기서 j 는 스케일을 의미한다. 또한 축소 함수로서 약 문턱값 적용 함수를 이용하였다. 한편, 웨이블릿 축소 방법에서 나타날 수 있는 예기치 않은 부산물을 막기 위해서 이동 불변 웨이블릿 변환(translation invariant wavelet transform)을 결합하였다. 끝으로, 잡음이 제거되어 평활화된 각각의 전달함수들의 평균 처리를 통하여 참 전달함수를 추정하게 된다.

$$\hat{H}^{[M]}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{H}^{[j]}(\omega) \quad (13)$$

여기서 $\bar{H}(\omega)$ 는 잡음이 제거된 각각의 전달함수이며, $\hat{H}(\omega)$ 는 최종적으로 추정된 전달함수이다.

4. 적용 예제

Fig. 3과 같은 2-DOF를 갖는 이론적인 선형 시스템을 구성하였다. (여기서 고유진동수 f_1, f_2 는 각각 10Hz, 25Hz로서 질량 M_i , 점성 C_i , 강성 K_i 는 주어진 f_1, f_2 값

을 갖도록 정의되었다.) 참 입력/출력 신호에 각각 SNR=21.2, SNR=36인 가우시 잡음을 첨가하여 잡음에 의해 오염된 전달함수를 구성하였다. Fig. 4(a), (b)는 참 전달함수와 잡음을 포함하는 전달함수를 보여준다.

Fig. 4(b)의 전달함수의 실수 부분과 허수 부분의 각각에 대한 잡음은 제시된 웨이블릿 축소 방법에 의하여 제거되며, 평균 처리 과정을 거쳐 참 전달함수를 추정하게 된다. 크기가 7인 중간 필터가 사용되었고, 극소적인 평활 효과를

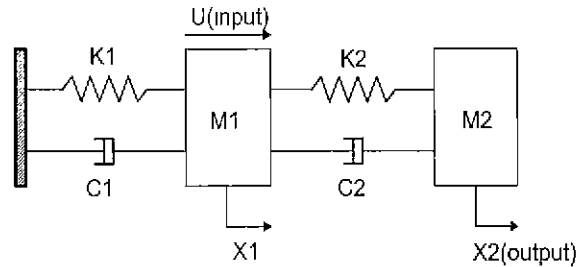
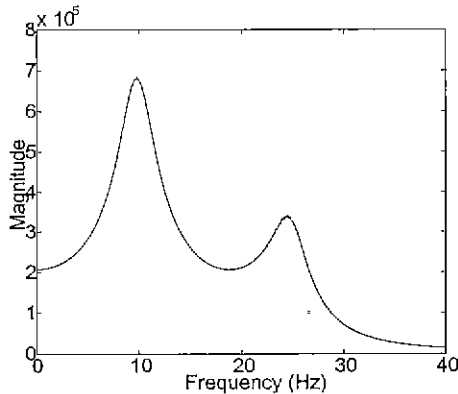
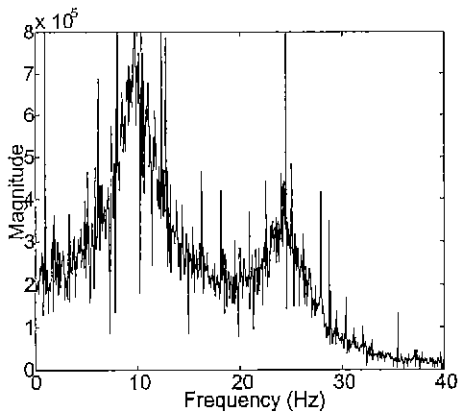
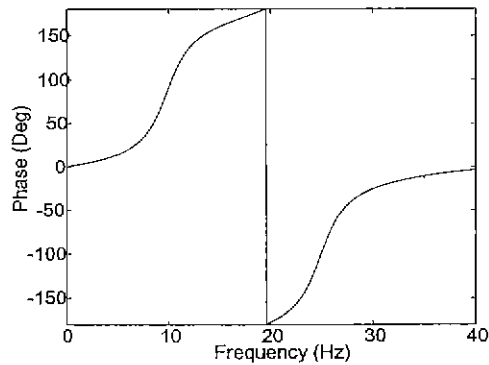


Fig. 3 2-DOF simulation model ($f_1 = 10\text{Hz}, f_2 = 25\text{Hz}$. M_i, C_i, K_i are adjusted to yield the given eigenfrequencies)



(a) True transfer function



(b) Noisy transfer function

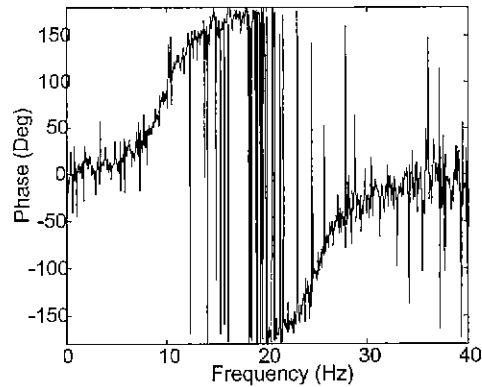


Fig. 4 True and noisy transfer functions

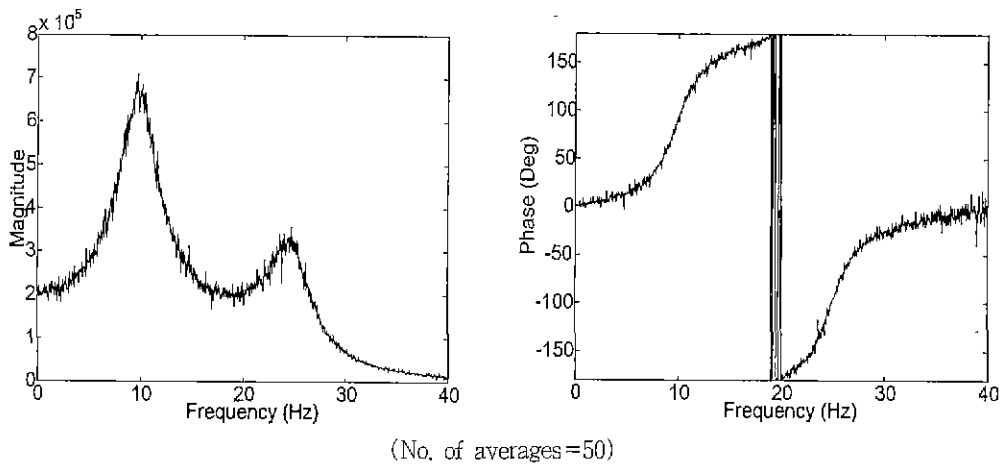


Fig. 5 Estimated transfer function by the mean averaging

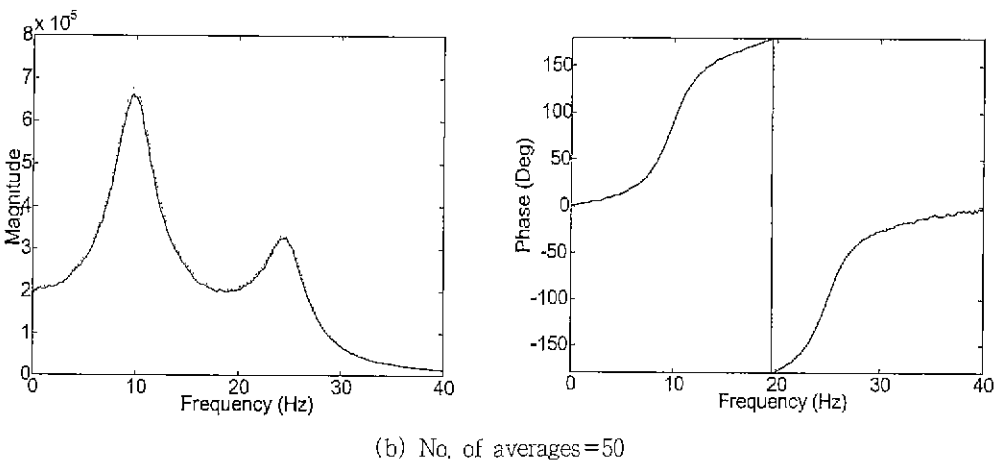
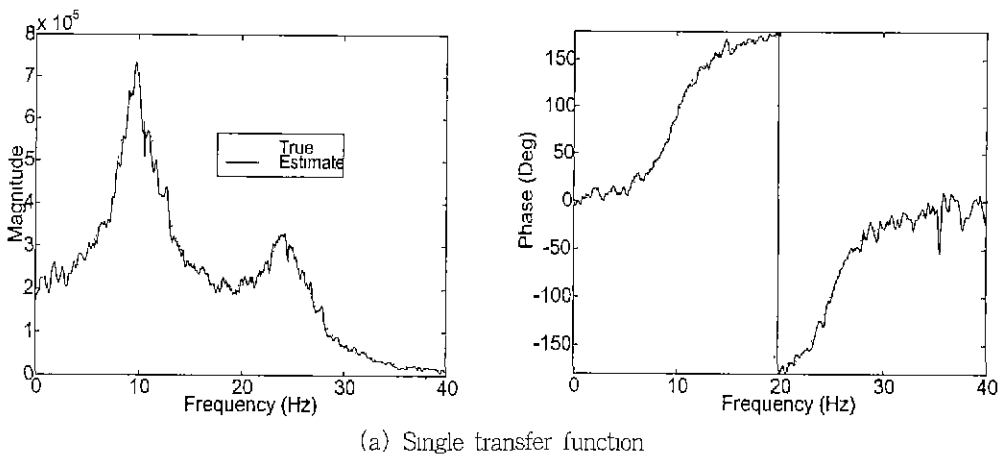


Fig. 6 Estimated transfer functions by the modified wavelet shrinkage method

과를 위해 작용 깊이는 2로 정하였다. 웨이블릿 축소 과정에서는 쌍직교 웨이블릿⁽¹¹⁾인 $\psi_{6.8}$ 을 사용하였고, 5 레벨까지 수행되었다. Fig. 5, 6에서 본 방법을 통해 잡음이 완화된 전달함수간의 평균 처리 횟수에 따른 추정 성능을 비교하였다.

두 방법의 추정 성능을 Fig. 7에서 RMS 상대오차의 관점에서 정량적으로 비교하였다. Fig. 7에서 보이는 것처럼 제시된 방법은 단순 평균처리 방법에 비하여 매우 향상된 잡음 제거 효과를 가짐을 알 수 있다.

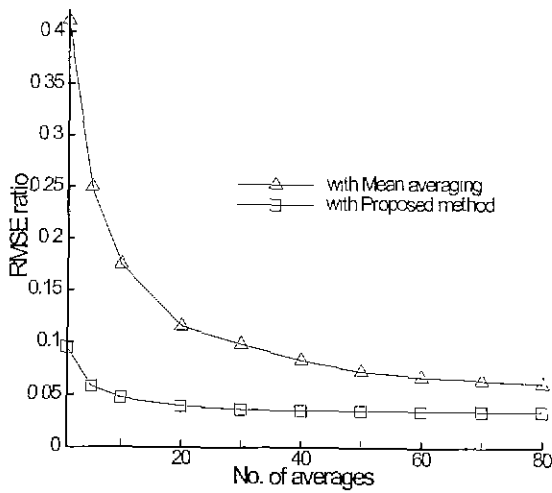


Fig. 7 Comparison of the relative RMS errors

5. 결 론

잡음의 비가우시안 성질을 고려하는, 수정된 웨이블릿 축소 방법을 이용한 전달함수 추정 방법을 제시하였다. 이 방법의 특징은 다량의 이상치들을 포함하는 비가우스 잡음은 중간 필터를 사용하는 전처리 단계에 의하여 제거되며, 가우스 잡음은 표준적인 웨이블릿 축소 방법을 이용하여 처리된다는 데 있다. 기존의 평균처리 과정과 비교해서 본 논문에서 적용된 방법은 전달함수를 매우 잘 추정할 뿐만 아니라, 평균처리 과정을 크게 단축시킬 수 있음을 알 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Julius, S. B. and Allan, G. P., 1996, Random Data : Analysis and Measurement Procedures, 2nd ed, John Wiley & Sons, Inc., New York.

(2) Newland, D. E., 1993, Random Vibration, Spectral and Wavelet Analysis, 3rd ed, John Wiley & Sons, Inc., New York.

(3) Donoho, D. L. and Johnstone, I. M., 1995, "Adapting to Unknown Smoothness Via Wavelet Shrinkage". J Amer. Statist. Assoc., Vol. 90, pp. 1200~1244.

(4) Donoho, D. L and Johnstone, I. M., 1994, "Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage". Biometrika, Vol. 81, pp. 425~455.

(5) Bruce, A. G., Donoho, D. L., Gao, H. Y. and Martin, R. D., 1994, "Denoising and Robust Non-linear Wave Analysis". Proceedings SPIE Conference 2241, pp. 325~336.

(6) Bodin, P. and Wahlberg, B., "A Wavelet Approach to Frequency Response Estimation", Proc. SYSID '94, pp. 2441~2446.

(7) Bodin, P. and Wahlberg, B., 1998, "A frequency Response Estimation Method Based on Smoothing and Thresholding", Int. J. Adapt. Control Signal Processing, Vol. 12, pp. 407~416.

(8) Coifman, R. R. and Donoho, D. L., 1995, "Translation Invariant De-noising", Tech. Report, Dept. of Statistics, Stanford University.

(9) Mallat, S. G., 1998, A Wavelet Tour Of Signal Processing, Academic Press, USA.

(10) Daubechies, I., 1992, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, PA.

(11) Cohen, A., Daubechies, I. and Feauveau, J-C., 1992, "Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets", Comm. Pure Appl. Math., Vol. 45, pp. 54~81