

〈논 문〉

# 축방향 이송속도를 갖는 현의 모델링 및 진동해석

## Dynamic Modeling and Analysis for an Axially Moving String

신 창 호\* · 정 진 테\*\* · 한 창 수\*\*

C. H. Shin, J. Chung and C. S. Han

(2000년 5월 23일 접수 : 2000년 8월 23일 심사완료)

**Key Words** : Non-Linear Dynamic Analysis(비선형 동적해석), Axially Moving Material(축방향 이송체), Longitudinal Vibration(종방향 진동), Transverse Vibration(횡방향 진동)

### ABSTRACT

The vibration of an axially moving string is studied when the string has geometric non-linearity and translating acceleration. Based upon the von Karman strain theory, the equations of motion are derived considering the longitudinal and transverse deflection. The equation for the longitudinal vibration is linear and uncoupled, while the equation for the transverse vibration is non-linear and coupled between the longitudinal and transverse deflections. These equations are discretized by using the Galerkin approximation after they are transformed into the variational equations, i.e., the weak forms so that the admissible and comparison functions can be used for the bases of the longitudinal and transverse deflections respectively. With the discretized nonlinear equations, the time responses are investigated by using the generalized- $\alpha$  method.

### 1. 서 론

축방향으로 움직이는 재료(즉, 벨, 필름, 빔, 현)의 횡방향 진동에 관해 많은 연구들이 진행되어 왔다. 축방향으로 움직이는 현을 동역학적인 관점에서 분석하여 연구를 제시하였다.<sup>(1,2)</sup> 이 연구는 현의 진동과 안정성에 대한 해석이 대부분 횡방향 변위에 중점을 두고 있다. 비선형 진동에 대한 정성적 그리고 정량적 연구는 Mote<sup>(3)</sup>, Thurman과 Mote<sup>(11)</sup>에 의해 수행되었다. 이들은 기하학적 비선형성과 미소한 변형률을 동시에 고려한 비선형 변형률을 제시하였다. 그러나 선형 시스템에는 미소한 변형률을 사용하고, 비선형 시스템에서는 von Karman 변형률을 사용하므로 기하학적 비선형성은 von Karman 변형률을 고려하는 것이 타당하다.<sup>(5)</sup> 한편, 현이 축방

향의 가속도를 가질 때 진동과 안정성에 대한 연구가 수행되어 왔다.<sup>(6-9)</sup>

그러나, 이들 연구가 경계에서 질량의 유입, 유출이 있음에도 검사역(control volume)의 개념이 도입된 Extended Hamilton 원리<sup>(10)</sup>를 사용하여 운동방정식을 전개하지 않았고, 장력의 변화와 상대적으로 큰 횡방향 변위의 기하학적인 비선형성에 대한 고려를 하지 않았다.

따라서 본 연구는 Extended Hamilton 원리를 적용하여 현의 종방향 및 횡방향 운동방정식을 유도하였다. 또한 종방향과 횡방향 변위의 기하학적 비선형성과 이송 가속도를 고려하였다. 그리고 기하학적 비선형성은 근사화된 미소변형률 이론 대신 von Karman 변형률 이론을 적용하였다. 각각의 운동방정식에 해당하는 weak form을 Galerkin 방법을 통하여 이산화 하였다 이산화 과정에서 종방향과 횡방향 변위는 각각 허용함수(admissible function)와 비교함수(comparison function)를 기저함수(basis function)로 사용하였다. 이산화된 방정식으로부터 종방향과 횡방향 변위의 시간응답을 일반

\* 한양대학교 정밀기계공학과 대학원

\*\* 정회원, 한양대학교 공학대학 기계공학과

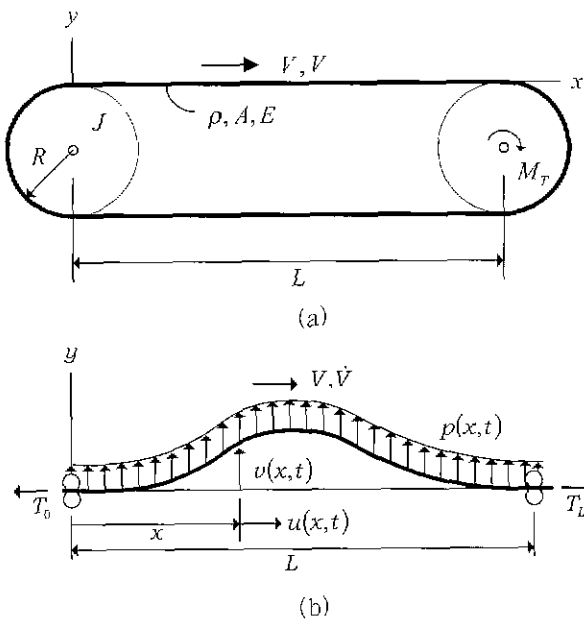


Fig. 1 Schematics of an axially moving string: (a) a string drive system between two pulleys; and (b) a theoretical model of the string with the longitudinal and transverse deflections.

화된 방법을 통하여 구하였다.

## 2. 이론적 모델과 운동 방정식

Fig. 1(a)에 도시된 현의 구동 시스템은 구동 풀리와 피구동 풀리로 구성되어 있으며, 같은 반경  $R$ 와 질량관성 모멘트  $J$ 를 가지고 있다. 구동하는 풀리의 토크는  $M_T(t)$ 이다. 현의 길이당 밀도는  $\rho$ , 단면적은  $A$ , Young률은  $E$ , 이송속도  $V(t)$ , 그리고 이송가속도  $\dot{V}(t)$ 이다. Fig. 1(b)처럼 축방향으로 움직이는 현에는 단위 길이당 수직하중  $p(x,t)$ 가 작용하고 있다. 두 풀리간의 길이가  $L$ 이고, 종방향과 횡방향 변위를 각각  $u(x,t)$ 와  $v(x,t)$ 로 표현했다. 만약 풀리와 축간에 마찰이 없다고 가정하면, 가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{V}(t) = \frac{R}{2(J + \rho LR^2)} M_T(t) \quad (1)$$

만약  $M_T = 0$ 일때  $x=0$ 에서 초기장력이  $T_0$ 이고  $M_T \neq 0$ 일때  $x=L$ 에서 장력이  $T_L$ 이라 하면,  $T_0$ 와  $T_L$ 의 관계는 다음식과 같다.

$$T_L = T_0 + \rho L \dot{V} \quad (2)$$

운동방정식은 Extended Hamilton원리<sup>(10)</sup>를 사용하여 구하

여야 한다. 왜냐하면 질량이  $x=0$ 와  $x=L$ 의 경계에서 유입, 유출되고 있기 때문이다. 이런 경우 Extended Hamilton원리는 다음식으로 표현된다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc} - \delta M) dt = 0 \quad (3)$$

여기서  $T$ 는 운동에너지,  $U$ 는 변형에너지,  $\delta W_{nc}$ 는 비보전력에 의한 가상일,  $\delta M$  경계를 통과하는 가상운동량 수송(virtual momentum transport)이다.

변형된 후의 임의의 점  $x$ 에 대한 위치벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{r} = (x + u)\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{i}$ 와  $\mathbf{j}$ 는 각각  $x$ 와  $y$ 축의 단위 벡터이다. 속도벡터는 위치벡터를 시간에 대해 물질미분을 취하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v} = \left( V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{j} \quad (5)$$

또한, 현의 기하학적 비선형성을 고려하기 위하여 변위-변형률 관계식과 응력-변형률의 관계식은 아래의 식을 사용하였다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad \sigma_x = E \epsilon_x \quad (6)$$

중력의 영향을 무시하고, 현의 운동에너지와 변형에너지는 아래의 식으로 구할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dx, \quad U = \frac{1}{2} A \int_0^L \sigma_x \epsilon_x dx \quad (7)$$

그리고, 비보전력에 의한 가상일과 가상운동량수송(virtual momentum transport)은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\delta W_{nc} = -T_0 \delta u|_{x=0} + T_L \delta u|_{x=L} + \int_0^L p(x,t) \delta v dx$$

$$\delta M = \rho (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{n}$ 은 경계에서 바깥쪽으로 향하는 수직 벡터이다 운동방정식은 식 (7)과 식 (8)을 식 (3)에 대입하여 유도할 수 있다.

현에 대한 종방향과 횡방향 운동 지배방정식은 아래와 같이 유도되었다.

$$\rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho \dot{V} \quad (9)$$

$$\rho \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = p \quad (10)$$

그리고 현의 경계조건은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} EA \frac{\partial u}{\partial x} &= T_0 + \rho L \dot{V} \text{ at } x=L, \\ EA \frac{\partial u}{\partial x} &= T_0 \text{ at } x=0, \\ v &= 0 \text{ at } x=0, L \end{aligned} \quad (11)$$

### 3. 운동방정식의 이산화

운동방정식의 이산화를 위해 유도된 운동방정식 식 (9),(10)과 경계조건 식 (11)으로부터 weak form을 만든 후 Galerkin 방법을 적용하였다. 이것은 경계조건이 복잡하기 때문이다. 함수(trial function)  $u$ 와  $v$ , 가중함수(weighting function)  $\bar{u}$ 와  $\bar{v}$ 를 사용하여 식 (9)와 식 (10)은 다음과 같은 weak form으로 표현된다.

$$\int_0^L \left[ \rho \left( \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + 2V \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + (EA - \rho V^2) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \dot{V} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx = \left( 1 - \frac{\rho V^2}{E} \right) [T_L u(L) - T_0 u(0)] - \rho \dot{V} \int_0^L \bar{u} dx \quad (12)$$

$$\int_0^L \left[ \rho \left( \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - V^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + V \bar{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - EA \bar{v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx = p \int_0^L \bar{v} dx \quad (13)$$

위에서 종방향 변위는 허용함수(admissible function)의 급수를, 횡방향 변위는 비교함수(comparison function)의 급수를 사용하였다. 왜냐하면 식 (12)의 weak form에서 에 대한 힘의 경계조건(natural boundary conditions)을 포함하고 있기 때문이다. 따라서, 종방향 변위와 횡방향 변위는 각각 허용함수(admissible function)와 비교함수(comparison function)가 선형 결합된 아래와 같은 시도함수(trial function)로 근사화할 수 있다.

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^J C_j(t) \cos \frac{j\pi}{L} x, \quad v(x, t) = \sum_{n=1}^N S_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (14)$$

마찬가지로 각각의 시도함수(trial function)에 대응하는 아래의 식과 같은 가중함수(weighting function)에 의해 근사

화할 수 있다.

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{i=1}^J \bar{C}_i(t) \cos \frac{i\pi}{L} x, \quad \bar{v}(x, t) = \sum_{m=1}^N \bar{S}_m(t) \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (15)$$

여기서,  $J$ 와  $N$ 은 각각 종방향과 횡방향 변위에 대한 기저함수(basis function)의 총갯수이다.

위의 weak form으로부터 운동방정식을 이산화하기 위해 Galerkin방법을 사용하였다.

식 (14)와 식 (15)를 식 (12)와 식 (13)에 대입하여 식 (12)와 식 (13)의 모든 항을 와 에 관해 정리하여 각각의 계수로부터 다음과 같은 이산화된 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J [m_y^c \ddot{C}_j + 2V g_y^c \dot{C}_j + (EA - \rho V^2) k_y^c C_j + \dot{V} g_y^c C_j] \\ = \left( 1 - \frac{\rho V^2}{E} \right) f_i^c, \quad i=1, 2, \dots, J \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left\{ m_{mn}^s \ddot{S}_n + 2V g_{mn}^s \dot{S}_n + \left[ EA \sum_{i=1}^J \alpha_{jmn} C_j - \rho V^2 k_{mn}^s \right] S_n \right. \\ \left. + \dot{V} g_{mn}^s S_n \right\} = f_m^s, \quad m=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$\begin{aligned} m_y^c &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \\ g_y^c &= \begin{cases} 0, & \text{for } i=j \\ \left[ 1 - (-1)^{i+j} \right] \frac{\rho j^2}{(i^2 - j^2)}, & \text{for } i \neq j \end{cases} \\ g_{mn}^s &= \begin{cases} 0, & \text{for } m=n \\ \left[ 1 - (-1)^{m+n} \right] \frac{\rho mn}{(m^2 - n^2)}, & \text{for } m \neq n \end{cases} \\ k_y^c &= \frac{i^2 \pi^2}{2L} \delta_{ij}, \quad k_y^s = \frac{m^2 \pi^2}{2L} \delta_{mn} \\ \alpha_{jmn} &= -\frac{jmn\pi^3}{L^3} \int_0^L \sin \frac{j\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{L} x \\ f_i^c &= \left( 1 - \frac{\rho V^2}{E} \right) [T_L (-1)^i - T_0] \\ f_m^s &= \int_0^L p \sin \frac{m\pi}{L} x dx \end{aligned} \quad (18)$$

$\delta_{ij}$ 와  $\delta_{mn}$ 은 Kronecker delta함수이다. 식 (16),(17)을 matrix형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_c \dot{\mathbf{C}} + 2V \mathbf{G}_c \dot{\mathbf{C}} + [(EA - \rho V^2) \mathbf{K}_c + \dot{V} \mathbf{G}_c] \mathbf{C} = \mathbf{F}_c \quad (19)$$

$$\mathbf{M}_s \dot{\mathbf{S}} + 2\mathcal{V}\mathbf{G}_s \dot{\mathbf{S}} + [\mathbf{K}_{sc}(\mathbf{C}) - \rho V^2 \mathbf{K}_s + \mathcal{V}\mathbf{G}_s] \mathbf{S} = \mathbf{F}, \quad (20)$$

여기서,

$$\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_J\}^T, \quad \mathbf{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}^T$$

$$\mathbf{K}_{sc}(\mathbf{C}) = EA \left[ \sum_{j=1}^J \alpha_{jmn} C_j \right] \quad (21)$$

식 (19)는 선형 상미분 방정식이며, 식 (20)은 비선형 상미분 방정식이다. 특히 식 (21)은 종방향 변위가 횡방향 변위와 연성되어 있음을 보여주고 있다. 이것은 횡방향 진동에 종방향 진동이 영향을 주고 있음을 의미한다.

#### 4. 시간응답

이산화된 운동방정식 (19)와 (20)의 시간응답을 구하기 위하여 일반화된  $\alpha$ 방법을 사용하였다.<sup>(11)</sup> 일반화된 방법은 Newmark 방법이 해결하지 못한 물리적 의미가 없는 고주파 성분의 제거를 가능하게 하였고, 2차의 정확도와 무조건적 안정성이 보장된다. 일반화된 방법의 기본 알고리즘은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f} = \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f} \quad (22)$$

여기서,

$$\mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} = (1-\alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\mathbf{v}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\mathbf{d}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{d}_n, \quad \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f} = \mathbf{F}((1-\alpha_f)t_{n+1} + \alpha_f t_n)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t_n \mathbf{v}_n + \Delta t_n^2 [(1/2-\beta)\mathbf{a}_n + \beta\mathbf{a}_{n+1}]$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t_n [(1-\gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}] \quad (23)$$

그리고  $\alpha_m, \alpha_f, \beta, \gamma$ 는 알고리즘 상수이다.

종방향과 횡방향 변위의 시간응답은 식 (19)와 (20)의 이산화된 식을 식 (22)에 적용하여 계산하였다. 그리고 토크는 식 (1)로부터 가속도에 비례하므로 토크의 종방향과 횡방향 변위에 대한 영향은 이송가속도가 현의 종방향과 횡방향 변위에 미치는 영향과 같다고 할 수 있다. 사용된 물성치는  $E=19 \text{ GPa}$ ,  $\rho=0.7754 \text{ kg/m}$ ,  $L=0.3681 \text{ m}$ ,  $a=5.202 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ ,  $T_0=76.22 \text{ N}$ ,  $b=10^{-3} \text{ N}$ 이며, 사용된 근사함수의 수는  $J=N=4$ 이다. Fig. 2(a)는 이송가속도가  $150 \text{ N/m}^2$ 의 증감과 이송가속도가 0 일때의 이송속도를 나타내며, Fig. 2(b,c)는 일반화된  $\alpha$ 방법에서 수치적 잡

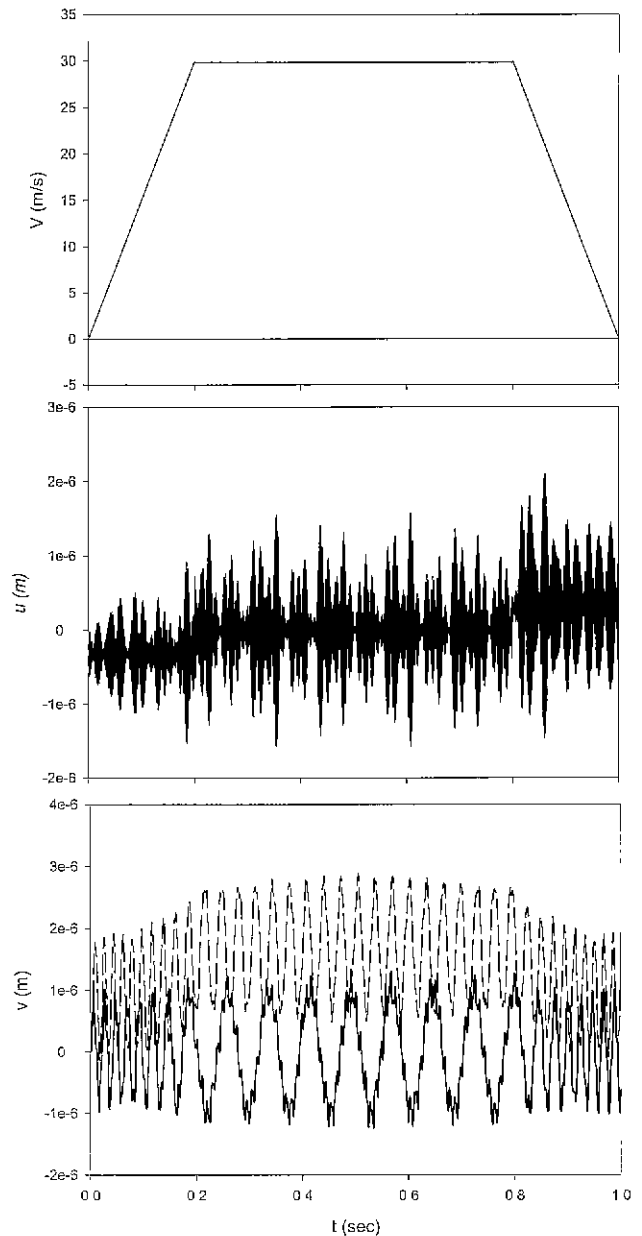


Fig. 2 Time histories of the deflections at for the given velocity profile : (a) the translating speed; (b) the longitudinal deflection; and (c) the transverse deflection.[non-linear (solid—) : linear (dotted ---) ]

쇠가 없는  $\rho_\infty=1$ (Newmark Method)일때 현의  $0.5L$ 에서 종방향과 횡방향의 시간응답이다. Fig 2.(b)의 그림은  $0 \leq t \leq 0.2$ 일때, 종방향 변위는 음의 평형위치에서 진동하며, 반면  $0.8 \leq t \leq 1.0$ 일때, 종방향 변위는 양의 평형위치에서 진동하는데 이것은 가속도에 의한 관성효과 때문이다. 가속도가 0 일때 즉  $0.2 \leq t \leq 0.8$ 일때, 종방향 진동의 평형위치

는 0인 것은 당연하다. Fig. 2(c)의 그림은 비선형과 선형인 경우의 횡방향 변위이다 선형의 경우 횡방향 변위는 이송가속도의 영향만으로 그림에서 점선으로 표시된 부분과 같이 진동한다. 반면, 비선형의 경우 횡방향 변위는 연성된 종방향 변위의 영향으로 진동의 평형위치가 0으로 이동되며, 이송가속도에 의해 주기가 증가됨을 알 수 있다. 이것은 각자 속도를 갖고 회전하는 디스크의 경우와 유사하다.<sup>(12)</sup>

## 5. 결 론

본 논문에서 기하학적 비선형성과 이송가속도를 고려하여 이송되는 현에 대한 종방향 및 횡방향 변위가 서로 연성된 운동 지배방정식을 유도하였다. 질량의 유입과 유출을 고려하여 Extended Hamilton원리를 도입하였다. 유도된 운동지배방정식은 종방향 진동에 대해선 선형 방정식이며, 횡방향 진동에 대해선 비선형 방정식으로 구성되어 있다. 특히 비선형 운동방정식은 종방향과 횡방향 변위가 서로 연성되어 있다. Galerkin방법을 적용하여 이산화된 운동방정식을 얻었으며, 이를 바탕으로 일반화된  $\alpha$ 방법을 사용하여 현의 시간응답을 계산하였다. 그리고 이송속도와 이송가속도 및 비선형성이 종방향과 횡방향 변위에 미치는 영향을 고찰하였다.

## 후 기

“이 논문은 1998년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 지원되었음”(KRF-98-018-E00113), 관계자 여러분에게 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

(1) Mote Jr. C. D., 1972, “Dynamic Stability of Axially Moving Materials”. Shock and Vibration Digest, Vol. 4, pp. 2~11.  
 (2) Wickert J. A. and Mote Jr. C. D., 1988, “Current Research on the Vibration and Stability of Axially Moving

Materials”. Shock and Vibration Digest, Vol. 20, pp. 313.  
 (3) Mote Jr. C. D., 1966, “On the Nonlinear Oscillation of an Axially Moving string”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 463~464.  
 (4) Thurman A. L. and Mote Jr. C. D., 1969, “Free, periodic, non-linear oscillation of an axially moving string”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 36, pp. 83~91.  
 (5) Fung Y. C., 1977. A First Course in Continuum Mechanics, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.  
 (6) Mote Jr. C. D., 1975, “Stability of Systems Transporting Accelerating Axially Moving Materials”, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, Vol. 97, pp. 96~98  
 (7) Pakdemirli, M., Ulsoy A. G. and A. Ceranoglu 1994, “Transverse Vibration of an Axially Accelerating String”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, pp. 179~196.  
 (8) Pakdemirli M. and Ulsoy A. G., 1997, “Stability of an Axially Accelerating String,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 203, pp. 815~832.  
 (9) Ozkaya E. and Pakdemirli M., 2000, “Lie Group Theory and Analytical Solutions for the Axially Accelerating String Problem”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 230, pp. 729~742.  
 (10) McIver D. B., 1972, “Hamilton’s Principle for Systems of Changing Mass”, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 7, pp. 249~261.  
 (11) Chung J. and Hulbert G. M., 1993, “A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: the Generalized- $\alpha$  Method”, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, pp. 371~375.  
 (12) Chung, J., Oh J.-E and Yoo H. H., 2000, “Non-linear Vibration of a Flexible Spinning Disc with Angular Acceleration”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 231, pp.375~391.