

웨이블릿을 이용한 파수영역 전자파 산란 해석법 연구

A Study of Spectral Domain Electromagnetic Scattering Analysis Applying Wavelet Transform

빈영부* · 주세훈* · 이정흠* · 김형동**

Youngboo Vin* · Saehoon Ju* · Jeongheum Lee* · Hyeongdong Kim**

요 약

파수영역에서 모멘트법의 임피던스 행렬의 특징을 관찰하고 이를 웨이블릿 변환을 이용하여 효율적으로 표현하는 방법을 연구하였다. 영상 신호처리 분야에서 자주 사용되는 이차원 쿼드트리(2-D Quadtree)방법(행렬의 ϕ 부분에만 웨이블릿 변환을 적용하는 방법)을 적용하여 모멘트 행렬을 성기게 만들었다. 웨이블릿이 적용된 모멘트 행렬을 CG(Conjugate-Gradient)법을 이용하여 모멘트 법의 계산량과 메모리를 줄였다. 수치적 결과는 정사각형 실린더의 경우 임피던스 행렬의 0이 아닌 값이 $O(N^{1.6})$ 으로 증가하는 것을 관찰하였다.

Abstract

The wavelet analysis technique is applied in the spectral domain to efficiently represent the multi-scale features of the impedance matrices. In this scheme, the 2-D quadtree decomposition (applying the wavelet transform to only the part of the matrix) method often used in image processing area is applied for a sparse moment matrix. CG(Conjugate-Gradient) method is also applied for saving memory and computation time of wavelet transformed moment matrix. Numerical examples show that for rectangular cylinder case the non-zero elements of the transformed moment matrix grows only as $O(N^{1.6})$.

I. 서 론

전자파 수치해석에 있어서 모멘트법은 정확하지만 전기적으로 큰 문제에 적용할 경우 많은 계산량을 필요로 하는 수치 해석법이다^[1]. 기존의 모멘트법은 주어진 적분방정식을 펄스함수를 기저로 전개하고, 테스트함으로써 임피던스 행렬을 구하게 된다. 기존의 방법으로 구해진 임피던스 행렬은 그린함수의 진동하는 부분으로 인하여 항상 밀집된 행렬로 나타난다. 펄스함수를 기저로 사용한 모멘트법을 이

용하여 구한 행렬방정식은 전기적으로 큰 문제의 경우 행렬의 크기가 커지기 때문에 막대한 계산량과 메모리를 필요로 하게 된다.

최근에 신호처리분야에서 데이터 압축에 성공적으로 사용된 바 있는 웨이블릿을 모멘트법에 적용함으로써 계산량과 메모리를 줄이기 위한 연구가 활발히 진행되고 있다^{[2],[3]}. 적분방정식에 웨이블릿 변환을 적용할 경우 성긴 행렬식을 얻게 되어, 유기된 전류를 구하는데 CG법(Conjugate Gradient method)과 같은 반복 계산 알고리즘을 이용하여 적은 메모

「본 연구는 정보통신부 대학기초연구지원사업(접수번호 C1-1999-1194-00)에 의해 수행되었습니다.」

* 한양대학교 전파공학과(Dept. of Radio Science Eng., Hanyang Univ.)

** 한양대학교 전자전기공학부(Div. of Electrical & Computer Eng., Hanyang Univ.)

· 논문 번호 : 990831-068

· 수정완료일자 : 1999년 10월 20일

리와 빠른 계산의 장점을 살리게 된다. 하지만 기존의 웨이블릿 변환의 적용은 행렬을 성기게 만들 수 있지만 0이 아닌 행렬의 요소가 여전히 $O(N^2)$ 으로 증가하게 되는 단점을 가지고 있다^[4]. 최근에 이러한 증가율을 낮추기 위하여 공간 영역에서 최적의 기저함수를 찾아가는 알고리즘과 그린함수의 k_0 부분을 확대하는 기저함수를 사용한 연구가 수행되어 0이 아닌 행렬요소의 증가율을 $O(N^{1.4})$ 근방까지 줄이게 되었다^{[5],[6]}. 그러나 이러한 연구에서는 파수 영역에서 국부적인 그린함수의 특성을 효율적으로 나타내기 위해서 공간 영역에서 폭이 넓은 웨이블릿 기저함수를 사용하게 되며, 이는 폭이 좁은 웨이블릿 기저함수를 적용하는 경우에 비하여 행렬변환에 상대적으로 많은 계산시간이 필요하게 된다.

본 연구에서는 그린함수와 해석구조의 함수인 임피던스 행렬의 특성을 파수영역에서 관찰하고 이를 효과적으로 이용하기 위하여 파수영역에서 웨이블릿 변환을 적용하였다. 제안된 방법은 웨이블릿 변환을 파수영역에서 적용하기 때문에 기저함수의 폭이 짧은 Haar 웨이블릿 기저함수를 이용하여 계산량을 줄이게 된다. 또한 기존의 방법들이 1차원의 웨이블릿 변환을 적용한 반면, 제안된 방법은 2차원 웨이블릿 변환을 사용함으로써 임피던스 행렬의 0인 요소의 개수를 최대화하였다. 성긴 모멘트 임피던스 행렬에 CG(Conjugate-Gradient)법을 적용하여 계산시간과 메모리를 줄였다. 수치해석 예제로는 여러 가지 모양의 실린더에 평면파가 입사된 산란문제를 해석하여 표면의 전류분포를 구하고 정사각형 실린더의 경우에 대해서 0이 아닌 행렬요소의 증가율을 살펴보았다.

II. 해석 방법

모멘트법은 식 (1)과 같이 적분방정식을 행렬방정식으로 바꾸어 해를 구하는 방법이다.

$$\int G(\rho, \rho') J(\rho') d\rho = -E^i(\rho)$$

$$\rightarrow [Z][J] = -[E^i] \quad (1)$$

이 때, 일반적인 모멘트법은 구하고자 하는 전류를 펄스 기저함수를 사용하여 전개하고, 테스트하여

임피던스 행렬을 구성한다. 임피던스의 행렬은 식 (2)에서와 같이 그린함수와 해석구조, 그리고 사용되는 기저함수에 따라서 그 형태가 변하게 된다.

$$[Z_{mn}] = \int \int B_m(\rho') G(\rho, \rho') B_n(\rho) d\rho' d\rho$$

$$= \langle B_m(\rho'), \langle G(\rho, \rho'), B_n(\rho) \rangle \rangle \quad (2)$$

여기서 $G(\rho, \rho')$ 은 그린함수를, $B_n(\rho)$ 과 $B_m(\rho')$ 은 각각 전개하는 기저함수와 테스트하는 기저함수를 나타낸다. 펄스 기저함수의 사용은 그린함수의 진동하는 부분(Oscillating kernel) 때문에 항상 밀집된 행렬방정식이 된다는 것이 연구되었다^[7]. 따라서 펄스함수를 적용하는 기존의 모멘트법은 전기적으로 큰 문제를 해석하기 위해서는 막대한 메모리와 계산시간을 필요로 하게 된다.

공간 영역에서의 웨이블릿 변환의 적용은 공간영역에서 모멘트법의 기저함수로 웨이블릿 기저함수를 사용함으로써 가능하다. 웨이블릿의 기저함수가 공간영역과 파수영역에서 국부적인 신호를 표현하기 적합하기 때문에 그림 1과 같이 원거리로 갈수록 k_0 부근으로 집중되는 그린함수의 특성을 효과적으로 표현할 수 있게 된다^[6]. 그러나 공간영역에서 웨이블릿을 적용할 때에는 공간영역에 넓게 퍼져있는 k_0 부근의 신호를 효과적으로 나타내기 위하여 폭이 넓은 웨이블릿을 사용해야 하는 단점을 가지고 있다. 이러한 단점은 파수영역에서 웨이블릿을 적용함으로써 해결할 수 있다. 파수영역에서 국부적인 k_0 부근의 신호는 폭이 작은 Haar 웨이블릿을 적용함으로써 효과적으로 표현하게 된다.

웨이블릿 변환을 파수영역에서 적용하기 위하여

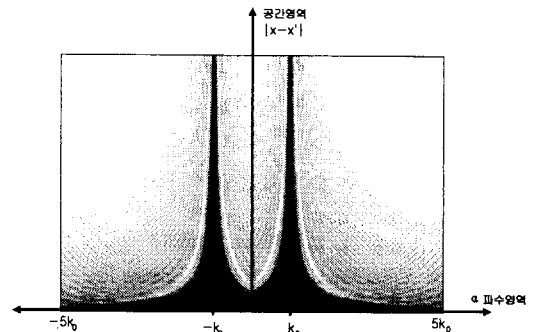


그림 1. 공간-파수영역에서의 그린함수의 형태

공간영역에서 구한 모멘트 행렬방정식을 식 (3)과 같이 푸리에 변환행렬을 이용하여 파수영역에서의 행렬방정식을 얻게되며, 이렇게 구해진 파수영역의 임피던스 행렬을 그림 2에 나타내었다^[7].

$$\begin{aligned} [Z][J] &= -[E^i] \\ [Z] &= [F][z][F]^T \\ [J] &= [F][J], [E^i] = [F][E^i] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 행렬 $[F]$ 는 푸리에 변환 행렬이다. 파수영역의 임피던스 행렬은 파수영역에서의 필스함수를 기저로 전개하고 테스트하여 구한 행렬을 의미한다.

그림 2는 여러가지 실린더 모양의 파수영역 임피던스 행렬의 형태를 나타내고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 파수영역에서 임피던스 행렬의 모양이 구조체의 크기가 커질 때, 일정한 형태를 가지면서 좀더 세밀해져 가는 모습을 볼 수 있다. 이는 임피던스 행렬에서 근거리 기저함수 사이에 계산되는 값이 파수영역에서 넓게 퍼져있으면서 해석 구조체가 커짐에 따라 파수영역에서 근거리 함수 값에 국부적인 원거리 함수 값이 더해지고 있음을 의미한다. 따라서 파수영역에서 웨이블릿 변환을 적용하는 것이 효율적이라는 것을 알 수 있다.

파수영역에서 임피던스 행렬에 웨이블릿을 적용하여 기저함수를 바꾸는 식은 다음과 같다^[8].

$$[W][Z][W]^T [W][J] = -[W][E^i] \quad (4)$$

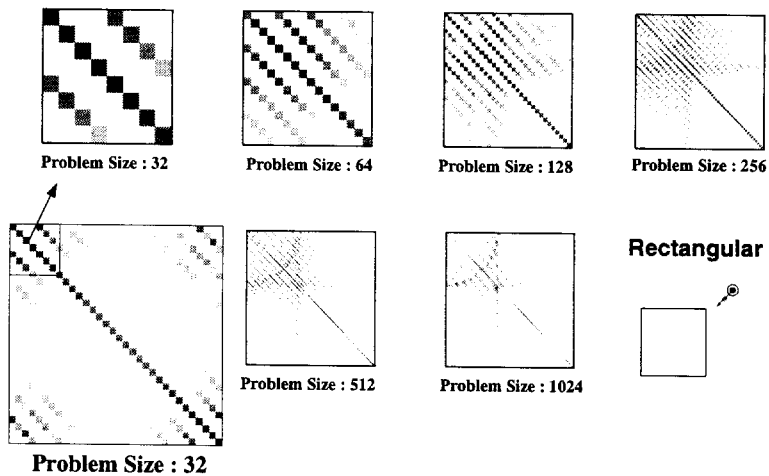
여기서 행렬 $[W]$ 는 웨이블릿 변환 행렬이다. 식 (4)와 같이 1차원 웨이블릿 변환을 두 번 적용하게 되면 변환된 행렬 방정식을 계산하여 웨이블릿 영역에서의 전류를 구하게 된다. 이렇게 구해진 전류는 다시 역변환을 거쳐 공간 영역에서의 전류로 바뀌게 된다

그림 3에는 공간영역과 파수영역에서 각각 임피던스 행렬의 웨이블릿 변환된 형태와 공간-파수영역에서의 기저함수의 분포가 나타나 있다. 임피던스 행렬에 웨이블릿 변환을 적용하면 그림과 같이 행렬을 네 부분으로 나눌 수 있다. 이 때, 공간영역에서 변환된 행렬의 $\phi\phi$ 부분은 낮은 스펙트럼(low-spectral interaction)을, $\psi\psi$ 부분은 높은 스펙트럼(high-spectral interaction)의 특성을 가지고 있는 성분이다. 그리고 파수영역에서의 $\phi\phi$ 부분과 $\psi\psi$ 부분은 각각 근거리 필드(near-field interaction)과 원거리 필드(far-field interaction)의 특성을 가지고 있는 성분이다. 그림 3의 공간-파수영역에서의 기저함수의 분포를 살펴보면 그린함수의 특성을 고려하지 못한 공간영역에서보다 파수영역에서 웨이블릿 변환의 적용이 효율적이라는 것을 알 수가 있다. 그린함수가 소스 점과 관찰 점간의 거리가 멀수록 k_0 값 부근에만 집중되어 있기 때문에 해석 구조체의 크기가 커질수록 임피던스 행렬의 $\phi\phi$ 부분에는 0인 값의 요소들이 많이 생기게 된다.

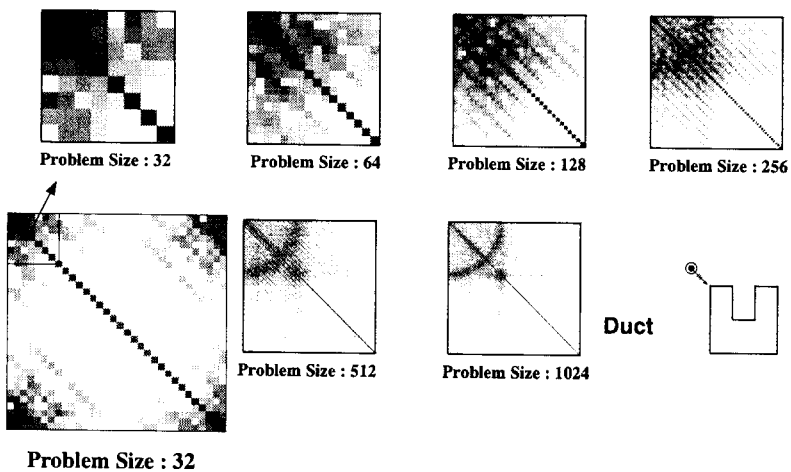
본 연구에서는 영상 신호처리분야에서 사용되는 방법과 유사하게 행렬의 $\phi\phi$ 부분만을 웨이블릿 변환을 적용함으로써 임피던스 행렬의 0인 요소의 개수를 최소화 하였다. 제안된 방법으로 얻어진 행렬 방정식은 행렬의 $\phi\phi$ 부분에만 웨이블릿 변환을 적용하였기 때문에 보통의 행렬 곱셈 방법을 사용할 수는 없다. 이는 GG(Conjugate-Gradient)법을 적용할 때 행렬간의 곱셈을 특별하게 처리해 주는 알고리즘을 사용함으로써 계산할 수 있다.

III. 수치적 결과

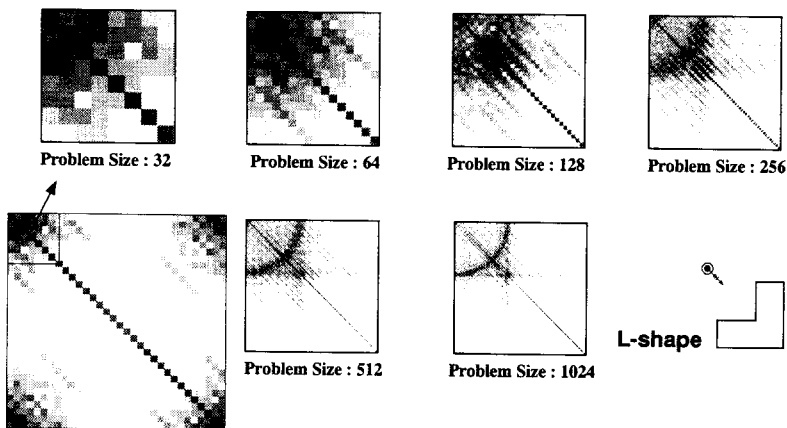
해석 구조는 그림 4의 z축 방향으로 무한히 긴 여러 가지 모양의 실린더에 평면파가 입사할 때 표면에 유기되는 전류를 구하는 산란 문제이다. 각 전류 소스 점간의 거리는 0.1λ 이고 소스 점의 순서는 산란체의 오른쪽 윗부분으로부터 시작하여 시계방향으로 돌아가는 순서로 개수를 32에서 1024까지 변화시키면서 유도된 전류를 관찰하였다. 그림 5는 각각 정사각형 실린더, 덕트 실린더, L-모양 실린더의 산란문제의 경우 이 연구에서 제시된 파수영역에서 웨이블릿 변환을 적용한 모멘트법의 임피던스 행렬의 모양과 실린더 표면에 유기된 전류를 기존의 모멘트법으로 구한 전류와 비교하여 보여주고 있다. 그림 5는 전류 소스점의 개수가 512인 비교적 큰 구조체에 적용한 예이다. Haar 웨이블릿 기저함수를 사용하여 임피던스 행렬을 웨이블릿 변환 후 CG(Conjugate-Gradient)법을 적용해서 계산의 속도를 높였다. 정사각형 실린더의 경우 약 15%의 행렬요소만을 이용하여 3%의 오차이내의 모멘트법의 전류를 구할 수 있음을 알 수 있다.



(a)



(b)



(c)

그림 2. 해석 구조체의 크기의 변화에 따른 파수영역에서의 임피던스 행렬의 형태
(a) 정사각형 실린더, (b) 덕트 실린더, (c) L-모양 실린더

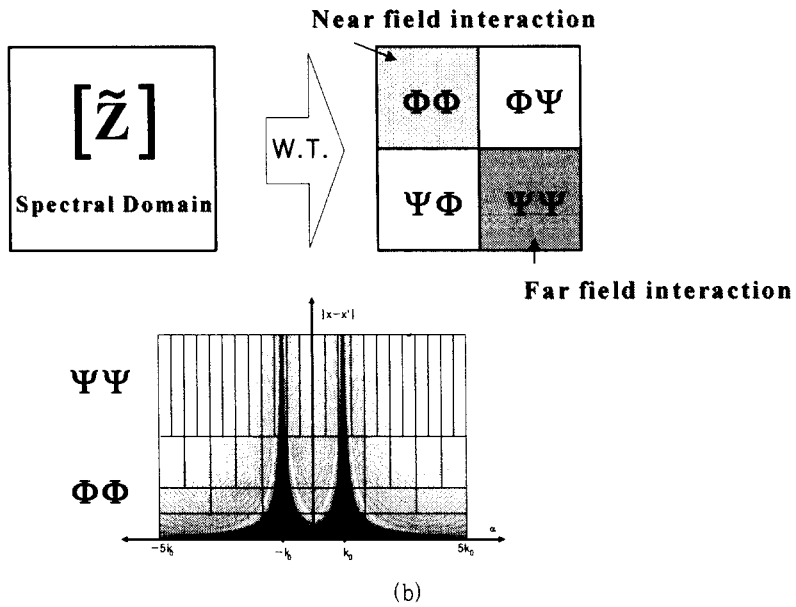
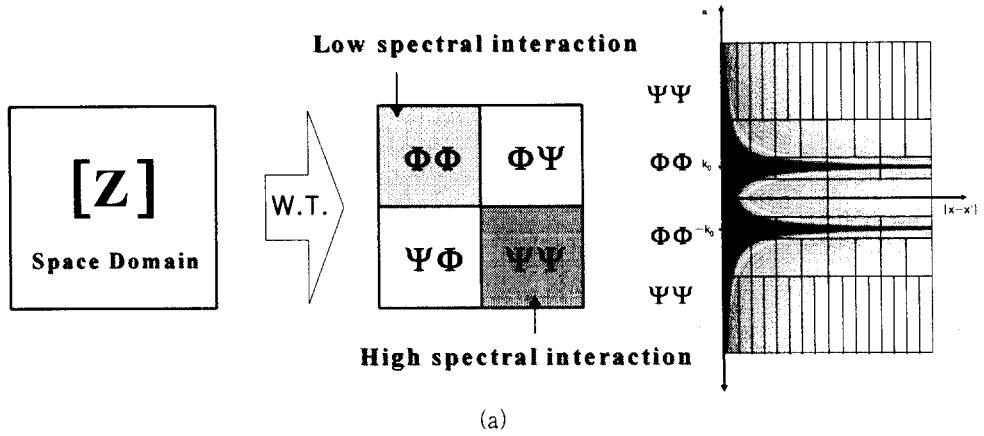


그림 3. 제한된 파수영역 웨이블릿 변환 방법. (a) 공간영역, (b) 파수영역

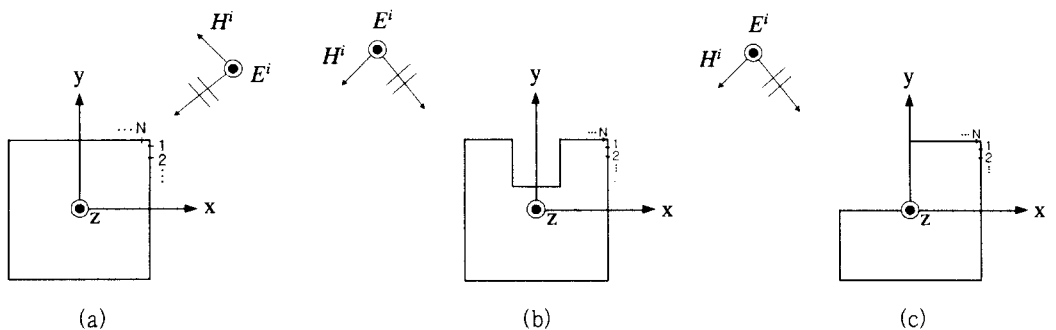
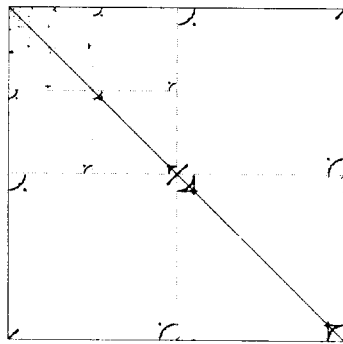
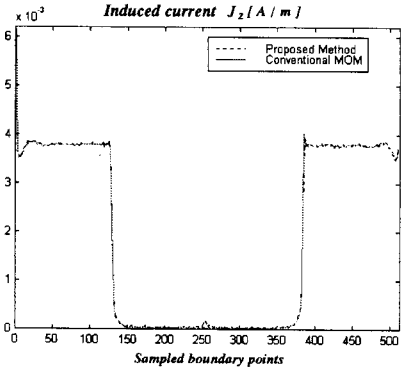


그림 4. z축 방향으로 무한히 긴 여러 가지 모양의 실린더에 입사하는 평면파
(a) 정사각형 실린더, (b) 덕트 실린더, (c) L-모양 실린더

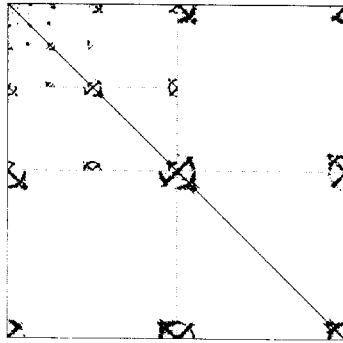


Wavelet Transform of Impedance matrix
Problem Size : 512

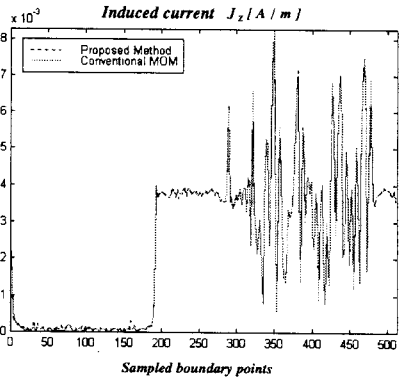


RMS error: 2.7756 %
Sparsity: 85.3024 %

(a)

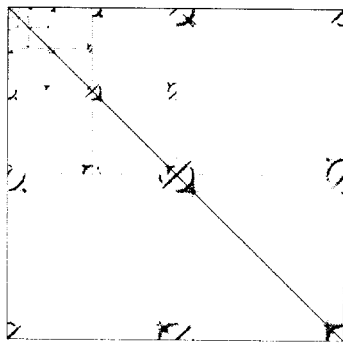


Wavelet Transform of Impedance matrix
Problem Size : 512

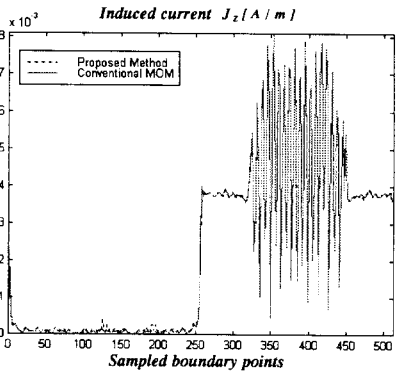


RMS error: 2.7698 %
Sparsity: 66.5089 %

(b)



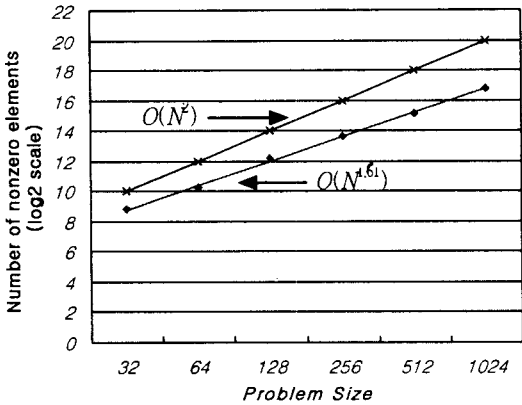
Wavelet Transform of Impedance matrix
Problem Size : 512



RMS error: 2.9388 %
Sparsity: 73.2716 %

(c)

그림 5. 웨이블릿 변환을 적용한 파수영역 임피던스 행렬과 실린더 표면에 유기된 전류
(a) 정사각형 실린더, (b) 덕트 실린더, (c) L-모양 실린더



• Proposed Method —*— MOM — O(N1.61) curve
 * Reference: Maximum value of the matrix

그림 6. 3% 오차내에서 구조체 크기에 따른 정사각형 실린더 임피던스 행렬의 0이 아닌 요소들의 개수

그림 6에서는 정사각형 실린더의 경우 3%의 오차 이내에서 해석 구조체의 크기가 커짐에 따른 임피던스 행렬의 0이 아닌 요소들의 개수의 증가율을 나타내었다. 보통의 공간영역에서의 웨이블릿의 적용은 $O(N^2)$ 에 따라 증가하지만, 이 연구에서 제시된 방법은 대략 $O(N^{1.6})$ 으로 증가한다.

그러나 실제로 전류 소스 점의 개수가 1024개 이내에서의 0이 아닌 행렬 요소들의 증가율은 보통의 모멘트법과 거의 비슷하게 증가하는 것으로 알려져 있다^[5]. 이는 그린함수가 근거리 필드 영역에서는 파수영역에서 전 구간에 걸쳐 넓게 퍼져 있기 때문이다. 따라서 산란체가 커질수록 소스점과 관찰 점의 거리가 멀어짐에 따라 파수영역에서 존재하는 영역이 훨씬 작기 때문에 해석 구조체의 크기가 커질수록 훨씬 낮은 비율로 증가할 것이라 기대된다.

IV. 결 론

그린함수의 특성과 파수영역에서 임피던스 행렬의 모양을 관찰하고, 웨이블릿 적용이 효과적임을 살펴보았다. 그리고 파수영역에서 웨이블릿 변환을 적용하여 모멘트법의 임피던스 행렬에 0인 값의 요소를 많이 생기게 함으로써 계산량과 메모리를 줄이

는 특별한 알고리즘을 제시하였다. 이 연구에서 제시된 알고리즘을 이용하여 정사각형, 덕트, L-모양 실린더의 산란문제에 적용하여 유도된 표면전류를 구하고, 정사각형 실린더의 경우 산란체의 크기에 따른 임피던스 행렬의 0이 아닌 요소의 증가율을 보여줌으로써 모멘트법의 계산량을 줄일 수 있음을 보여주고 있다.

참 고 문 헌

- [1] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, The Macmillan Co., New York, 1968.
- [2] H. Kim and H. Ling, "Wavelet analysis of electromagnetic backscattering data," *Electronics Letters*, vol. 28, no. 3, pp. 279-281, Jan., 1992.
- [3] H. Kim and H. Ling, "Wavelet analysis of radar echo from finite-size targets," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 41, no. 2, pp. 200-207, Feb., 1993.
- [4] R. L. Wagner and W. C. Chew, "A study of wavelets for the solution of electromagnetic integral equations," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, pp. 802-810, Aug., 1995.
- [5] H. Deng and H. Ling, "Moment matrix sparsification using adaptive wavelet packet transform," *Electronics Letters*, vol. 33, pp. 1127-1128, June, 1997.
- [6] S. Kahng, S. Ju, and H. Kim, "A continuous wavelet representation of Green's function in layered media," *Electronics Letters*, vol. 34, no. 4, pp. 378-379, Feb., 1998.
- [7] H. Kim and H. Ling, "On the application of fast wavelet transform to the integral equations solution of electromagnetic scattering problems," *Microwave Opt. Tech. Lett.*, vol. 6, pp. 168-173, Mar., 1993.
- [8] H. Kim, H. Ling, and C. Lee, "A fast moment algorithm using spectral domain wavelet concepts," *Radio Science*, vol. 31, pp. 1127-1128,

June, 1997.

빈 영 부



1998년 2월: 한양대학교 전파공학과(공학사)
2000년 3월: 한양대학교 전자통신 전파공학과(공학석사)
2000년 3월~현재: 주식회사 한원 R&B Lab. 연구원
[주 관심분야] 안테나 및 마이크로

로파 회로 설계, 전자파 수치 해석

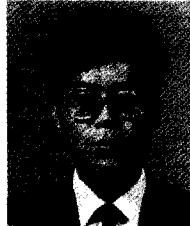
주 세 훈

1997년 2월: 한양대학교 전파공학과(공학사)
1999년 3월: 한양대학교 전파공학과(공학석사)
1999년 3월~2000년 2월: 서울대 수중음향특화연구센터 연구원
2000년 3월~현재: 한양대학교 전자통신전파공학과(박사 과정)
[주 관심분야] 안테나 및 마이크로파 회로 설계, 전자파 수치해석

이 정 흠

1997년 2월: 한양대학교 전파공학과(공학사)
1999년 3월: 한양대학교 전파공학과(공학석사)
1999년 3월~현재: 한양대학교 전자통신전파공학과(박사 과정)
[주 관심분야] 전자파 수치해석

김 형 동



1984년 2월: 서울대학교 공과대학 전자공학사(공학사)
1986년 2월: 서울대학교 공과대학 전자공학과(공학석사)
1992년 5월: The University of Texas at Austin(Ph. D.) 안테나 및 電波傳播 마이크로파공학

전공

1989년 5월~1992년 5월: Microwave Research Lab., Dept. of Electrical and Computer Engineering, The University of Texas at Austin: Research Assistant
1992년 6월~1993년 1월: Microwave Research Lab., Dept. of Electrical and Computer Engineering, The University of Texas at Austin: Postdoctoral Fellow
1993년 3월~1996년 2월: 한양대학교 전파공학과 전임강사
1996년 3월~현재: 한양대학교 전파공학과 조교수
[주 관심분야] 이동통신용 안테나, 마이크로파 회로, 초음파 공학, 전자파 수치해석, 웨이블릿 변환의 수치해석 응용