

유사등방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 고유치와 고유벡터 해석

김진광*, 조상봉**

An Analysis of Eigenvalues and Eigenvectors for V-notched Cracks in Pseudo-isotropic Dissimilar Materials

Jin Kwang Kim*, Sang Bong Cho**

ABSTRACT

The problem of eigenvalue and eigenvector is obtained from a V-notched crack in pseudo-isotropic dissimilar materials by the traction free boundary and the perfect bonded interface conditions. The complex stress function is assumed as the two-term William's type. The eigenvalue is solved by a commercial numerical program, MATHEMATICA to discuss stress singularities for V-notched cracks in pseudo-isotropic dissimilar materials. The RWCIM(Reciprocal Work Contour Integral Method) is applied to the determination of eigenvector coefficients associated with eigenvalues. The RWCIM algorithm is also coded by the MATHEMATICA.

Key Words : Eigenvalue(고유치), Eigenvector(고유벡터), Stress singularity(응력특이성), V-notched crack(V-노치 균열), Pseudo-isotropic material(유사등방성 재료), RWCIM(상반일 등고선 적분법)

1. 서론

이종재료간 접합구조물의 접합계면에서는 대개 응력의 특이성이나 응력의 불연속으로 인한 접합계면 균열이 발생하기 때문에 파괴역학적 접합강도 평가법의 확립이 아주 중요하다. 그러나, 이에 대한 연구는 아직 미흡한 상태이다.

이종재료 내의 V-노치 균열문제에서 중요한 연구과제로는 파괴역학적 인자(parameter)로 될 수 있는 응력특이성(고유치) 및 응력강도계수(고유벡터)에 관한 연구라 하겠다. 이와 같은 이론적 기초연구와 더불어 실험을 통하여 파괴역학적 강도평가법

을 확립할 수 있을 것이다.

등방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제에 대한 연구는 Bogy^(1,2)를 시작으로 중요성이 알려지면서 Hein과 Erdogan⁽³⁾ 등이 수학적으로 어려운 방법인 Mellin변환법을 이용하여 응력특이성에 관한 연구를 하였고, Carpenter와 Byers⁽⁴⁾는 간단한 방법인 이항 윌리엄 형태(two-term William's type)의 복소응력함수 및 상반일 등고선 적분법(reciprocal work contour integral method)을 이용하여 응력강도계수를 구하는 연구를 하였다.

이방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성에 관하여 Ting과 Chou⁽⁵⁾, Zwiers et al⁽⁶⁾,

* 경남대학교 대학원 기계설계학과

** 경남대학교 공과대학 기계자동화공학부

Ting⁽⁷⁾ 등이 일항 윌리엄 형태(one-term William's type)의 복소응력함수를 사용하여 연구하였다.

이방성재료에서 응력함수를 사용할 경우 특성방정식의 근을 사용하게 되며 특성근은 다음과 같이 3가지 형태로 분류할 수 있다.⁽⁸⁾ 첫째는 특성근이 실수부와 허수부로 구성되어있고 서로 다른 경우, 둘째는 특성근이 순허수이며 서로 다른 경우, 셋째는 순허수이며 특성근이 같은 경우이다.

본 연구에서는 순허수이며 특성근이 같은 유사등방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 고유치와 고유벡터에 관한 연구를 하고자 한다. 유사등방성 재료에 필요한 이항 윌리엄 형태의 복소응력함수의 형태를 가정하고 유사등방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력장과 변위장을 구하여 경계조건으로부터 고유치 문제를 얻는다. 그리고, 고유치 문제로부터 상용수치해석 프로그램인 Mathematica를 이용하여 고유치를 구하고, 상반일 등고선 적분법을 적용하여 고유벡터를 구하고자 한다.

2. 기본방정식

등방성재료 및 이방성재료의 탄성문제에서 평형방정식(equilibrium equation)은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (1)$$

여기서 b_i 는 체적력(body force)성분이다. 본 논문에서는 2차원 ($i=1,2$) 선형탄성문제에 대한 체적력이 없는 경우 ($b_i=0$)를 해석대상으로 한다.

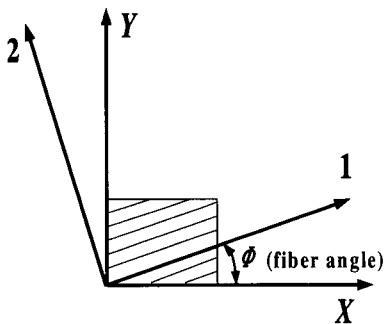


Fig. 1 Rotation of the coordinate system

2차원 선형탄성문제에서 평형방정식을 만족하

는 Airy의 응력함수를 복소응력함수 $U(x,y)$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

그리고, 이방성재료(anisotropic material)에 대한 평면응력상태의 구성방정식(generalized hooke's law)은 아래와 같다.⁽⁸⁾

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_{xx}, & a_{22} &= 1/E_{yy}, \\ a_{12} &= -\nu_{xy}/E_{xx} = -\nu_{yx}/E_{yy} \\ a_{21} &= a_{12}, & a_{66} &= 1/G_{xy}, \\ a_{16} &= \eta_{xy,x}/E_{xx} = \eta_{x,xy}/G_{xy}, & a_{16} &= a_{61}, \\ a_{26} &= \eta_{xy,y}/E_{yy} = \eta_{y,xy}/G_{xy}, & a_{26} &= a_{62} \end{aligned} \quad (4)$$

식(3)과 식(4)에서 E_{xx} , E_{yy} 는 영계수이고 G_{xy} 는 전단탄성계수이며 ν_{xy} 는 포아송 비이다. 그리고, $\eta_{xy,x}$ 와 $\eta_{xy,y}$ 는 제1종 영향계수이고 $\eta_{xy,x}$ 와 $\eta_{xy,x}$ 는 제2종 영향계수이다. 또한, 평면변형률의 경우에 대한 a_{ij}^* 는 다음과 같이 주어진다.

$$a_{ij}^* = a_{ij} - (a_{i3}a_{j3}/a_{33}) \quad (5)$$

이방성재료의 특수한 경우에 해당하는 직교이방성재료(orthotropic material)는 fig. 1에서 주축 1, 2와 x , y 축이 일치하는 경우이며 식(3)의 구성방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_{11}, & a_{22} &= 1/E_{22}, \\ a_{12} &= -\nu_{12}/E_{11} = -\nu_{21}/E_{22} \\ a_{66} &= 1/G_{12}, & a_{16} &= a_{61} = a_{26} = a_{62} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

또한, 변위의 연속조건을 표현하는 적합방정식

(compatibility equation)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

이방성재료에 대한 2차원 선형탄성문제에서 식(3)의 구성방정식과 식(2)를 식(7)의 적합방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 미분방정식을 얻는다.

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (8)$$

3. 유사등방성재료에 대한 복소응력함수

2차원 선형탄성문제에서 이방성재료에 대한 복소응력함수를 이항 윌리엄형태로 가정하면 다음과 같다.

$$U(z) = Az^{\lambda+1} + Bz^{\bar{\lambda}+1} \quad (9)$$

식(9)에서 $z = x + \mu y$ 이고, 계수 μ , A 와 B 는 복소수이다. 식(9)의 가정한 해를 식(8)의 미분방정식에 대입하여 정리하면 μ 에 대한 다음의 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (10)$$

식(10)의 특성방정식의 근 μ 는 실수부와 허수부를 가진 복소수이며 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, & \mu_2 &= \alpha_2 + i\beta_2, \\ \mu_3 &= \overline{\mu_1}, & \mu_4 &= \overline{\mu_2} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, α_j 와 β_j 는 실수이다.

직교이방성재료의 경우는 식(6)에서 $a_{16} = a_{26} = 0$ 이므로 식(10)의 특성방정식은 다음과 같이 된다.

$$a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + a_{22} = 0 \quad (12)$$

직교이방성재료에 대한 특성방정식(12)는 순허수만의 근을 가지므로 식(11)에서 α_1 과 α_2 가 영(0)인 경우가 된다. 그리고 직교이방성재료의 특수한 경우에 해당하는 유사등방성재료는 특성방정식(12)의 근이 중복근으로 $\mu_1 = \mu_2$ 이고, 순허근이 되는 경우이다. 특성방정식(12)의 근이 중복근이 되기 위한 조건으로부터 유사등방성 재료의 전단탄성계수는 다음의 관계가 있어야 한다.

$$G_{12} = E_{11} / \{2 \times (\nu_{12} + \sqrt{E_{11}/E_{22}})\} \quad (13)$$

즉, $i\beta_1 = i\beta_2$ 인 경우가 유사등방성재료이고 더욱이 $\beta_1 = \beta_2 = 1$ 이면 등방성재료(isotropic material)가 된다. 유사등방성재료의 특수한 경우에 해당하는 등방성재료와 유사등방성재료에 대한 해석에서 종래의 이방성재료와 직교이방성재료에 대한 복소응력함수를 사용할 경우 특이성이 발생하여 해석이 불가능하므로 유사등방성재료에 대한 복소응력함수는 다음과 같은 형태로 잡아야 한다.

$$U(z) = 2Re\{F_1(z_1) + \overline{z_1}F_2(z_1)\} \quad (14)$$

여기서,

$$F_1(z_1) = A_1 z_1^{\lambda+1} + B_1 z_1^{\bar{\lambda}+1} \quad (15)$$

$$F_2(z_1) = A_2 z_1^{\lambda+1} + B_2 z_1^{\bar{\lambda}+1} \quad (16)$$

4. 유사등방성 이종재료에 내의 V-노치 균열에 대한 응력장과 변위장

식(14)의 복소응력함수를 식(2)에 대입하여 직교좌표계에 대한 응력을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sigma_{xx} = 2Re\{ \mu_j^2 F_{j1}''(z_{j1}) - 2 \mu_j^2 F_{j2}'(z_{j1}) + \mu_j^2 z_{j1} F_{j2}''(z_{j1}) \} \quad (17)$$

$$\sigma_{yy} = 2Re\{ F_{j1}''(z_{j1}) + 2F_{j2}'(z_{j1}) + \overline{z_{j1}} F_{j2}''(z_{j1}) \} \quad (18)$$

$$\sigma_{xy} = -2Re\{ \mu_j F_{j1}''(z_{j1}) + \mu_j \overline{z_{j1}} F_{j2}''(z_{j1}) \} \quad (19)$$

이고, j 는 재료 j 를, 위첨자 '와 ''는 각각 1차 미분과 2차 미분을 의미한다. 그리고, 식(17), (18)과

(19)을 이용하여 구성방정식으로부터 변형률을 구할 수 있고 변형률을 적분하여 다음과 같이 변위장을 구할 수 있다.

$$u_{iy} = 2Re[q_{\beta} \{F_{\beta}'(z_{\beta}) + \overline{z_{\beta}} F_{\beta}'(z_{\beta})\} + q_{\beta} F_{\beta}(z_{\beta})] - w_{\beta} x + u_{iy} \quad (20)$$

$$u_{ix} = 2Re[p_{\beta} \{F_{\beta}'(z_{\beta}) + \overline{z_{\beta}} F_{\beta}'(z_{\beta})\} + p_{\beta} F_{\beta}(z_{\beta})] - w_{\beta} y + v_{ix} \quad (21)$$

여기서,

$$p_{\beta} = a_{\beta 11} \mu_{\beta}^2 + a_{\beta 12} \quad (22)$$

$$p_{\beta} = -3a_{\beta 11} \mu_{\beta}^2 + a_{\beta 12} \quad (23)$$

$$q_{\beta} = a_{\beta 21} \mu_{\beta} + \frac{a_{\beta 22}}{\mu_{\beta}} \quad (24)$$

$$q_{\beta} = -a_{\beta 21} \mu_{\beta} + 3 \frac{a_{\beta 22}}{\mu_{\beta}} \quad (25)$$

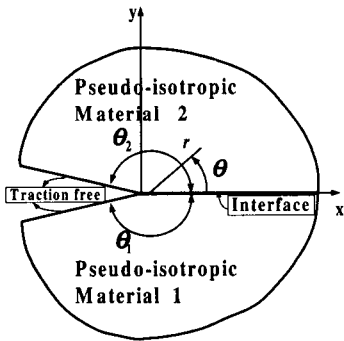


Fig. 2 V-notched crack in pseudo-isotropic dissimilar materials

이고, w_{β} , u_{ix} 와 v_{iy} 는 상수이며 강제변위를 표현하는 항이다. 이후 본 논문에서 강제변위는 없는 것으로 간주한다.

유사등방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제의 경우에 직교좌표계의 변위와 응력성분보다 극좌표계의 변위와 응력성분으로 표현하는 것이 편리하므로 다음의 응력변환식을 이용한다.

$$u_i' = a_{ij} u_j \quad (26)$$

$$\sigma_{ij}' = a_{ik} a_{jm} \sigma_{km} \quad (27)$$

여기서,

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (28)$$

5. 유사등방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 고유치문제

Fig. 2에서 보는 바와 같이 유사등방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 경계조건과 연속조건으로부터 다음과 같은 제차연립방정식을 얻을 수 있다.

$$[D(\lambda)]\{A\} = \{0\} \quad (29)$$

여기서,

$$\{A\} = [A_{11} \overline{B_{11}} A_{12} \overline{B_{12}} A_{21} \overline{B_{21}} A_{22} \overline{B_{22}}]^T \quad (30)$$

$$\{0\} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (31)$$

$$[D(\lambda)] = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ s_{12} & s_{21} \\ u_{12} & u_{21} \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix} \quad (32)$$

이고, 또한

$$[s_{11}] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = (\lambda + 1) \{ \cos[-\theta_1] + \mu_{11} \sin[-\theta_1] \}^{\lambda+1}$$

$$d_{12} = (\lambda + 1) \{ \cos[-\theta_1] + \overline{\mu_{11}} \sin[-\theta_1] \}^{\lambda+1}$$

$$d_{13} = \{ 2(\cos[-\theta_1] - \mu_{11} \sin[-\theta_1]) + (\lambda - 1)(\cos[-\theta_1] + \mu_{11} \sin[-\theta_1]) \} \times \{ \cos[-\theta_1] + \mu_{11} \sin[-\theta_1] \}^{\lambda}$$

$$d_{14} = \{ 2(\cos[-\theta_1] - \overline{\mu_{11}} \sin[-\theta_1]) + (\lambda - 1)(\cos[-\theta_1] + \overline{\mu_{11}} \sin[-\theta_1]) \} \times \{ \cos[-\theta_1] + \overline{\mu_{11}} \sin[-\theta_1] \}^{\lambda}$$

$$d_{21} = (\lambda + 1) \{ \sin[-\theta_1] - \mu_{11} \cos[-\theta_1] \} \times \{ \cos[-\theta_1] + \mu_{11} \sin[-\theta_1] \}^{\lambda}$$

$$d_{22} = (\lambda + 1) \{ \sin[-\theta_1] - \overline{\mu_{11}} \cos[-\theta_1] \} \times \{ \cos[-\theta_1] + \overline{\mu_{11}} \sin[-\theta_1] \}^{\lambda}$$

$$d_{23} = \{ 2(1 + \mu_{11}^2) \cos[-\theta_1] \sin[-\theta_1] + (\lambda - 1) \} \times \{ \sin[-\theta_1] - \mu_{11} \cos[-\theta_1] \} (\cos[-\theta_1] + \mu_{11})$$

$$\begin{aligned} & \times \sin[-\theta_1]) \times \{ \cos[-\theta_1] + \mu_{11} \sin[-\theta_1] \}^{\lambda-1} \\ d_{24} &= \{ 2(1 + \overline{\mu_{11}^2}) \cos[-\theta_1] \sin[-\theta_1] + (\lambda-1) \\ & \times (\sin[-\theta_1] - \overline{\mu_{11}} \cos[-\theta_1]) (\cos[-\theta_1] + \mu_{11} \\ & \times \sin[-\theta_1]) \} \times \{ \cos[-\theta_1] + \overline{\mu_{11}} \sin[-\theta_1] \}^{\lambda-1} \\ [s_{12}] &= \begin{bmatrix} d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ (\lambda+1)\mu_{11} & (\lambda+1)\overline{\mu_{11}} & & \\ & & 1 & \\ & & (\lambda-1)\mu_{11} & (\lambda-1)\overline{\mu_{11}} \end{bmatrix} \\ [s_{21}] &= \begin{bmatrix} d_{35} & d_{36} & d_{37} & d_{38} \\ d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & & & \\ -(\lambda+1)\mu_{21} & -(\lambda+1)\overline{\mu_{21}} & & \\ & & -1 & \\ & & -(\lambda-1)\mu_{21} & -(\lambda-1)\overline{\mu_{21}} \end{bmatrix} \\ [u_{21}] &= \begin{bmatrix} d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda+1)p_{11} & (\lambda+1)\overline{p_{11}} & (\lambda p_{11} + p_{12}) & (\lambda \overline{p_{11}} + \overline{p_{12}}) \\ (\lambda+1)q_{11} & (\lambda+1)\overline{q_{11}} & (\lambda q_{11} + q_{12}) & (\lambda \overline{q_{11}} + \overline{q_{12}}) \end{bmatrix} \\ [u_{22}] &= \begin{bmatrix} d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} \\ d_{65} & d_{66} & d_{67} & d_{68} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(\lambda+1)p_{21} & -(\lambda+1)\overline{p_{21}} & & \\ -(\lambda+1)q_{21} & -(\lambda+1)\overline{q_{21}} & & \\ & & -(\lambda p_{21} + p_{22}) & -(\lambda \overline{p_{21}} + \overline{p_{22}}) \\ & & -(\lambda q_{21} + q_{22}) & -(\lambda \overline{q_{21}} + \overline{q_{22}}) \end{bmatrix} \\ [s_{22}] &= \begin{bmatrix} d_{75} & d_{76} & d_{77} & d_{78} \\ d_{85} & d_{86} & d_{87} & d_{88} \end{bmatrix} \\ d_{75} &= (\lambda+1) \{ \cos[\theta_2] + \mu_{21} \sin[\theta_2] \}^{\lambda+1} \\ d_{76} &= (\lambda+1) \{ \cos[\theta_2] + \overline{\mu_{21}} \sin[\theta_2] \}^{\lambda+1} \\ d_{77} &= \{ 2(\cos[\theta_2] - \mu_{21} \sin[\theta_2]) + (\lambda-1)(\cos[\theta_2] \\ & + \mu_{21} \sin[\theta_2]) \} \times \{ \cos[\theta_2] + \mu_{21} \sin[\theta_2] \}^{\lambda} \\ d_{78} &= \{ 2(\cos[\theta_2] - \overline{\mu_{21}} \sin[\theta_2]) + (\lambda-1)(\cos[\theta_2] \\ & + \mu_{21} \sin[\theta_2]) \} \times \{ \cos[\theta_2] + \overline{\mu_{21}} \sin[\theta_2] \}^{\lambda} \\ d_{85} &= (\lambda+1) \{ \sin[\theta_2] - \mu_{21} \cos[\theta_2] \} \\ & \times \{ \cos[\theta_2] + \mu_{21} \sin[\theta_2] \}^{\lambda} \\ d_{86} &= (\lambda+1) \{ \sin[\theta_2] - \overline{\mu_{21}} \cos[\theta_2] \} \\ & \times \{ \cos[\theta_2] + \overline{\mu_{21}} \sin[\theta_2] \}^{\lambda} \\ d_{87} &= \{ 2(1 + \mu_{21}^2) \cos[\theta_2] \sin[\theta_2] + (\lambda-1)(\sin[\theta_2] \\ & - \mu_{21} \cos[\theta_2]) (\cos[\theta_2] + \mu_{21} \sin[\theta_2]) \} \\ & \times \{ \cos[\theta_2] + \mu_{21} \sin[\theta_2] \}^{\lambda-1} \\ d_{88} &= \{ 2(1 + \overline{\mu_{21}^2}) \cos[\theta_2] \sin[\theta_2] + (\lambda-1)(\sin[\theta_2] \\ & - \overline{\mu_{21}} \cos[\theta_2]) (\cos[\theta_2] + \overline{\mu_{21}} \sin[\theta_2]) \} \\ & \times \{ \cos[\theta_2] + \overline{\mu_{21}} \sin[\theta_2] \}^{\lambda-1} \end{aligned}$$

식(29)의 제차연립방정식이 비 자명해(non-trivial solution)를 가질 조건은 식(32)의 행렬식이 영(0)인 경우이며 이 행렬식을 특성다항식이라 부르고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$|D(\lambda)| = 0 \tag{33}$$

이 다항식의 해가 유사등방성 이중재료 내의 V-노치 균열에 대한 고유치가 되고, 각 고유치에 대하여 자명하지 않는 해가 바로 각 고유치에 대한 고유벡터가 된다.

또한, 식(33)의 특성다항식의 근을 구하면 복소수 고유치와 실수 고유치를 얻게 되므로 복소수 고유치에 대한 고유벡터와 실수 고유치에 대한 고유벡터를 구하여야 한다. 본 논문에서는 이들 고유치에 대한 고유벡터를 베타(betti)의 상반정리와 유한요소해석을 이용한 상반일 등고선 적분법으로 구하고자 한다.

6. 유사등방성 이중재료 내의 V-노치 균열에 대한 고유벡터

6.1 복소수 고유치에 대한 고유벡터

식(33)의 특성다항식의 근인 고유치 λ 가 복소수일 경우에 대한 고유벡터를 구하는 방법에 대하여 설명하고자 한다. 복소수 고유치와 관련된 고유벡터, 응력, 변위는 복소수 계수의 항으로 표현되므로 이들 계수들을 실수부와 허수부를 가진 식(30)의 복소수 계수 A_{11} 으로 나타내기 위해서 식(32)을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] \\ \overline{B_{11}} \\ A_{12} \\ \overline{B_{12}} \\ A_{21} \\ \overline{B_{21}} \\ A_{22} \\ \overline{B_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

여기서,

$$[D_{11}] = d_{11}$$

$$[D_{12}] = [d_{12} \ d_{13} \ d_{14} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[D_{21}] = [d_{21} \ d_{31} \ d_{41} \ d_{51} \ d_{61} \ 0 \ 0]^T,$$

$$[D_{22}] = \begin{bmatrix} d_{22} & d_{23} & d_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & d_{37} & d_{38} \\ d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} \\ d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} \\ d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} & d_{67} & d_{68} \\ 0 & 0 & 0 & d_{75} & d_{76} & d_{77} & d_{78} \\ 0 & 0 & 0 & d_{85} & d_{86} & d_{87} & d_{88} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_{jr} \\ u_{j\theta} \\ \sigma_{jrr} \\ \sigma_{j\theta\theta} \end{Bmatrix} &= 2Re \left[[G_j] \begin{Bmatrix} \frac{A_{j1}}{B_{j1}} \\ \frac{A_{j2}}{B_{j2}} \end{Bmatrix} \right] \\ &= 2Re \left[[G_j] [E_j] [F] \begin{Bmatrix} Re[A_{11}] \\ Im[A_{11}] \end{Bmatrix} \right] \\ &= 2Re \left[[J_j] \begin{Bmatrix} Re[A_{11}] \\ Im[A_{11}] \end{Bmatrix} \right] \\ &\equiv [M_j] \begin{Bmatrix} Re[A_{11}] \\ Im[A_{11}] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

이며, 식(34)으로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

여기서,

$$\begin{Bmatrix} \overline{B_{11}} \\ A_{12} \\ \overline{B_{12}} \\ A_{21} \\ \overline{B_{21}} \\ A_{22} \\ \overline{B_{22}} \end{Bmatrix} = -[D_{22}]^{-1}[D_{21}]A_{11} = \begin{Bmatrix} Y(1) \\ Y(2) \\ Y(3) \\ Y(4) \\ Y(5) \\ Y(6) \\ Y(7) \end{Bmatrix} A_{11} \quad (35)$$

$$[G_j] = \begin{bmatrix} G_{j11} & G_{j12} & G_{j13} & G_{j14} \\ G_{j21} & G_{j22} & G_{j23} & G_{j24} \\ G_{j31} & G_{j32} & G_{j33} & G_{j34} \\ G_{j41} & G_{j42} & G_{j43} & G_{j44} \end{bmatrix} \quad (40)$$

이고,

식(35)에서 복소수 고유치에 대한 재료1의 고유벡터와 재료2의 고유벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} G_{j11} &= r^\lambda(\lambda+1)(p_{j1}C + q_{j1}S)(C + \mu_{j1}S)^\lambda \\ G_{j12} &= r^\lambda(\lambda+1)(\overline{p_{j1}}C + \overline{q_{j1}}S)(C + \overline{\mu_{j1}}S)^\lambda \\ G_{j13} &= r^\lambda \{ \lambda(p_{j1}C + q_{j1}S)(C + \overline{\mu_{j1}}S) \\ &\quad + (\overline{p_{j1}}C + \overline{q_{j1}}S)(C + \mu_{j1}S) \} (C + \mu_{j1}S)^{\lambda-1} \\ G_{j14} &= r^\lambda \{ \lambda(\overline{p_{j1}}C + \overline{q_{j1}}S)(C + \mu_{j1}S) \\ &\quad + (p_{j1}C + q_{j1}S)(C + \overline{\mu_{j1}}S) \} (C + \overline{\mu_{j1}}S)^{\lambda-1} \\ G_{j21} &= r^\lambda(\lambda+1)(q_{j1}C - p_{j1}S)(C + \mu_{j1}S)^\lambda \\ G_{j22} &= r^\lambda(\lambda+1)(\overline{q_{j1}}C - \overline{p_{j1}}S)(C + \overline{\mu_{j1}}S)^\lambda \\ G_{j23} &= r^\lambda \{ \lambda(q_{j1}C - p_{j1}S)(C + \overline{\mu_{j1}}S) \\ &\quad + (\overline{q_{j1}}C - \overline{p_{j1}}S)(C + \mu_{j1}S) \} (C + \mu_{j1}S)^{\lambda-1} \\ G_{j24} &= r^\lambda \{ \lambda(\overline{q_{j1}}C - \overline{p_{j1}}S)(C + \mu_{j1}S) \\ &\quad + (q_{j1}C - p_{j1}S)(C + \overline{\mu_{j1}}S) \} (C + \overline{\mu_{j1}}S)^{\lambda-1} \\ G_{j31} &= r^{\lambda-1}(\lambda+1)\lambda(S - \mu_{j1}C)^2(C + \mu_{j1}S)^{\lambda-1} \\ G_{j32} &= r^{\lambda-1}(\lambda+1)\lambda(S - \overline{\mu_{j1}}C)^2(C + \overline{\mu_{j1}}S)^{\lambda-1} \\ G_{j33} &= r^{\lambda-1} \lambda \{ 2(S^2 - \mu_{j1}^2 C^2) + (\lambda-1)(C + \overline{\mu_{j1}}S) \\ &\quad \times (S - \mu_{j1}C)^2(C + \mu_{j1}S)^{-1} \} (C + \mu_{j1}S)^{\lambda-1} \\ G_{j34} &= r^{\lambda-1} \lambda \{ 2(S^2 - \overline{\mu_{j1}}^2 C^2) + (\lambda-1)(C + \mu_{j1}S) \\ &\quad \times (S - \overline{\mu_{j1}}C)^2(C + \overline{\mu_{j1}}S)^{-1} \} (C + \overline{\mu_{j1}}S)^{\lambda-1} \\ G_{j41} &= r^{\lambda-1}(\lambda+1)\lambda(S - \mu_{j1}C)(C + \mu_{j1}S)^\lambda \\ G_{j42} &= r^{\lambda-1}(\lambda+1)\lambda(S - \overline{\mu_{j1}}C)(C + \overline{\mu_{j1}}S)^\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ \overline{B_{11}} \\ A_{12} \\ \overline{B_{12}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ Y(1) \\ Y(2) \\ Y(3) \end{Bmatrix} \{A_{11}\} = [E_1] \{A_{11}\} \quad (36)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{21} \\ \overline{B_{21}} \\ A_{22} \\ \overline{B_{22}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y(4) \\ Y(5) \\ Y(6) \\ Y(7) \end{Bmatrix} \{A_{11}\} = [E_2] \{A_{11}\} \quad (37)$$

여기서,

$$\{A_{11}\} = [1 \ i] \begin{Bmatrix} Re[A_{11}] \\ Im[A_{11}] \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} Re[A_{11}] \\ Im[A_{11}] \end{Bmatrix} \quad (38)$$

이고, 식(36), (37), (38)으로부터 복소수 고유치 λ 에 대한 응력과 변위를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G_{j\lambda 3} = r^{\lambda-1} \lambda \{ 2CS(1 + \mu_{ji}^2) + (\lambda-1)(C + \overline{\mu_{j\lambda}}S)(S - \mu_{j\lambda}C) \} (C + \mu_{j\lambda}S)^{\lambda-1}$$

$$G_{j\lambda 4} = r^{\lambda-1} \lambda \{ 2CS(1 + \overline{\mu_{ji}^2}) + (\lambda-1)(C + \mu_{j\lambda}S)(S - \overline{\mu_{j\lambda}}C) \} (C + \overline{\mu_{j\lambda}}S)^{\lambda-1}$$

식(39)과 식(40)에서 $-\theta_1 \leq \theta \leq 0$ 이면 $j=1$ 이고, $0 \leq \theta \leq \theta_2$ 이면 $j=2$ 이다. 그리고, $C = \cos[\theta]$ 를 $S = \sin[\theta]$ 를 의미한다.

식(35)과 식(39)에서 보는 바와 같이 각 복소수 고유치에 대한 고유벡터와 응력, 변위는 복소수 계수 A_{11} 의 실수부와 허수부의 항으로만 표현됨을 알 수 있다.

6.2 실수 고유치에 대한 고유벡터

식(33)의 특성다항식의 근인 고유치 λ 가 실수일 경우에 식(29)은 다음과 같이 된다.

$$[D(\lambda)]\{Ar\} = \{0\} \tag{41}$$

여기서,

$$\{Ar\} = [Ar_{11} \overline{Ar_{11}} Ar_{12} \overline{Ar_{12}} Ar_{21} \overline{Ar_{21}} Ar_{22} \overline{Ar_{22}}]^T \tag{42}$$

이고, $[D(\lambda)]$ 는 식(32)과 같고, $\{0\}$ 는 식(31)과 동일하며 식(41)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[D(\lambda)]\{Ar\} = [D(\lambda)]\{UI\}\{ar\} = [Dr(\lambda)]\{ar\} = \{0\} \tag{43}$$

여기서,

$$\{Ar\} = [UI]\{ar\} \tag{44}$$

$$\{ar\} = [Re[Ar_{11}] \ Im[Ar_{11}] \ Re[Ar_{12}] \ Im[Ar_{12}] \ Re[Ar_{21}] \ Im[Ar_{21}] \ Re[Ar_{22}] \ Im[Ar_{22}]]^T \tag{45}$$

$$[UI] = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \tag{46}$$

복소수 고유치의 경우와 같은 방법으로 실수 고유치 λ 에 대한 응력과 변위를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{cases} u_{jr} \\ u_{j\theta} \\ \sigma_{jrr} \\ \sigma_{j\theta\theta} \end{cases} = 2Re[[Gr_j][Fr][Er_j]] Re[Ar_{11}]$$

$$= 2Re[[Jr_j]] Re[Ar_{11}]$$

$$= [Mr_j] Re[Ar_{11}] \tag{47}$$

여기서,

$$[Gr_j] = \begin{bmatrix} G_{j\lambda 1} & G_{j\lambda 3} \\ G_{j\lambda 2} & G_{j\lambda 4} \\ G_{j\lambda 3} & G_{j\lambda 4} \\ G_{j\lambda 4} & G_{j\lambda 3} \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$[Er_j] = \begin{bmatrix} Er_{j1} \\ Er_{j2} \\ Er_{j3} \\ Er_{j4} \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$[Fr] = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} \tag{50}$$

식(47)에서 보는 바와 같이 실수 고유치에 대한 고유벡터와 응력, 변위는 복소수 계수 Ar_{11} 의 실수부인 $Re[Ar_{11}]$ 의 항으로만 표현됨을 알 수 있다.

7. 상반일 등고선 적분법

Fig. 3에서와 같이 평형상태에 놓여 있는 두께 t 의 선형탄성체에 서로 다른 두 하중계가 작용하고 있는 경우 배티의 상반정리는 다음과 같다.

$$\oint_c \sum_{i=1}^2 (\sigma_i \widehat{u}_i - \widehat{\sigma}_i u_i) ds = \oint_c T ds = 0 \tag{51}$$

식(51)에서 1과 2는 계 I 과 계 II 의 폐곡선에 대한 법선방향과 접선방향의 성분을 표시한다.

Fig. 4의 V-노치 문제에 배티의 상반정리를 이용한 식(51)을 적용하면 폐곡선 C 는 다음과 같다.

$$C = C_i + C' + C_o + C'' \tag{52}$$

또한, 식(52)의 V-노치를 포함하는 폐곡선 C 에

서 C' 와 C'' 는 표면력이 없으므로 식(51)은 다음과 같이 된다.

$$\int_{C_i} T ds = - \int_{C_o} T ds \quad (53)$$

계 I에서 C_o 의 경로를 따른 응력과 변위들은 유한요소해석으로부터 얻을 수 있고, C_i 의 경로를 따른 응력과 변위들은 다음식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_{jr} \\ u_{j\theta} \\ \sigma_{jr} \\ \sigma_{j\theta} \end{Bmatrix} &= \left[\sum_{i=0}^n [M_j(\lambda_i, r, \theta)] \begin{Bmatrix} Re[A_{11}(\lambda_i)] \\ Im[A_{11}(\lambda_i)] \end{Bmatrix} \right. \\ &+ \left. \sum_{i=n+1}^m [Mr_j(\lambda_i, r, \theta)] [Re[Ar_{11}(\lambda_i)]] \right] \quad (54) \\ &\equiv [K_j(\lambda_i)] [A(\lambda_i)] \end{aligned}$$

식(54)에서 n 은 복소수 고유치의 개수이고 m 은 전체 고유치의 개수이며, 실수 고유치의 개수는 $(m-n)$ 이다. 그리고, 계II에서 C_i 와 C_o 경로를 따른 응력과 변위들은 음의 실수부를 가진 고유치와 고유벡터로부터 식(54)을 이용하여 구할 수 있다.

Fig.3에서 C_i 경로를 따른 선적분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{C_i} T ds &= - \int_{\theta=-\theta_1}^{\theta=\theta_2} Tr_r d\theta \\ &= - \{A(+\lambda)\}^T [CI] \{A(-\lambda)\} \quad (55) \end{aligned}$$

여기서,

$$[CI] = r_i \int_{\theta=-\theta_1}^{\theta=\theta_2} [K_j(+\lambda)]^T [II] [K_j(-\lambda)] d\theta \quad (56)$$

또한,

$$[II] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

그리고, C_o 경로를 따른 선적분은 다음과 같다.

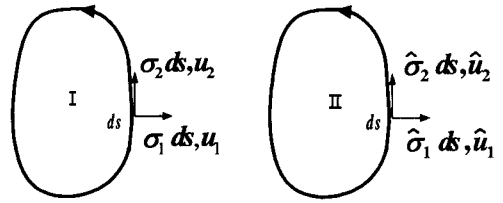


Fig. 3 Closed Contour

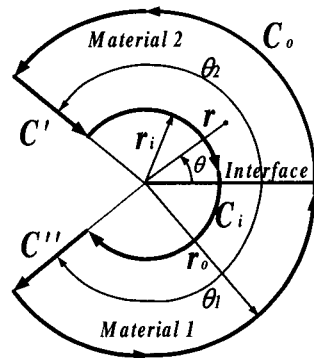


Fig. 4 V-notched configuration to which Betti's law is applied

$$\begin{aligned} \int_{C_o} T ds &\equiv \int_{\theta=-\theta_1}^{\theta=\theta_2} Tr_o d\theta \\ &= [CO] \{A(-\lambda)\} \quad (58) \end{aligned}$$

여기서,

$$[CO] = r_o \int_{\theta=-\theta_1}^{\theta=\theta_2} [X]^T [II] [K_j(-\lambda)] d\theta \quad (59)$$

이고, $[X]$ 는 유한요소해석에 의한 응력과 변위로 다음과 같다.

$$[X] = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix}_{FEA} \quad (60)$$

C_i 경로를 따른 선적분값 식(55)과 C_o 경로를 따른 선적분값 식(58)을 식(53)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\{A(\lambda)\}^T = [CO][CI]^{-1} \quad (61)$$

8. 수치해석 결과 및 고찰

8.1 고유치에 대한 수치해석 및 고찰

8.1.1 유사등방성 단일재료에 대한 고유치 해석

직교이방성재료의 특수한 경우에 해당하는 유사등방성재료는 특성방정식(12)의 근이 중복근으로 순 허근이 되는 경우이다. 특성방정식(12)의 근이 순 허근으로 중복근이 되는 경우는 전단탄성계수가 식(13)을 만족할 때이다.

이와 같은 유사등방성재료가 서로 접합된 이중재료간 V-노치 균열에서 고유치는 상용수치해석 프로그램인 Mathematica를 이용하여 특성다항식(33)의 수치해석으로부터 구할 수 있다.

Fig. 6는 전단탄성계수 식(13)을 만족하는 유사등방성 단일재료의 탄성계수 비 $m(E_{22}/E_{11})$ 과 특성방정식(12)의 순 허근(μ)의 변화를 나타낸 것으로 유사등방성재료의 특성방정식(12)의 근이 중복근으로 i 일 경우에 등방성재료가 됨을 알 수 있다.

등방성재료는 유사등방성재료의 특수한 경우에 해당되는 재료이므로 유사등방성재료의 물성치를 등방성재료가 되도록 선택하여 등방성 단일재료 내의 V-노치 균열에 대한 평면응력상태의 응력특이성을 가지는 고유치를 썬기각도의 변화에 대하여 구해본 결과 기존의 Dunn et al⁽⁹⁾의 결과와 잘 일치함을 확인할 수 있었고, 그 결과를 Fig. 5에 나타내었다.

8.1.2 유사등방성 이중재료에 내의 V-노치 균열에 대한 고유치 해석

유사등방성 이중재료 내의 V-노치 균열문제에 대한 응력특이성을 가지는 고유치를 수치해석하기 위하여 다음과 같은 재료를 선택하였다.

$$\begin{aligned} E_{111} &= 3.0GPa, & E_{122} &= 2.0GPa, & \nu_{112} &= 0.3 \\ E_{211} &= 2.0GPa, & E_{222} &= 1.0GPa, & \nu_{212} &= 0.29 \end{aligned} \quad (62)$$

Fig. 6은 썬기각도가 $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ 에서 180° 로 변화하는 경우에 대한 응력특이성을 가지는 고유치 ($0.5 \leq \text{Re}[\lambda] < 1$)를 도식한 것이다. 고유치 λ 는 $\theta_1 = \theta_2$ 가 90° 와 131.795° 사이에서 실수인 고유치

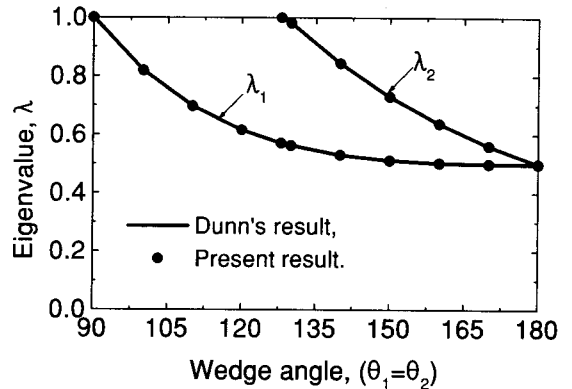


Fig. 5 Eigenvalue vs. various notch angles for a cracks in a isotropic material v-notched crack in an pseudo-isotropic material

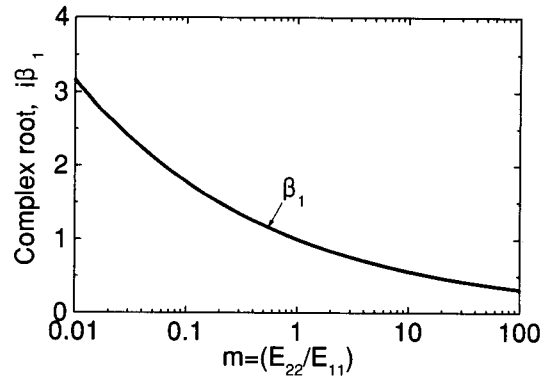


Fig. 6 Complex root for ratio of elastic modulus.

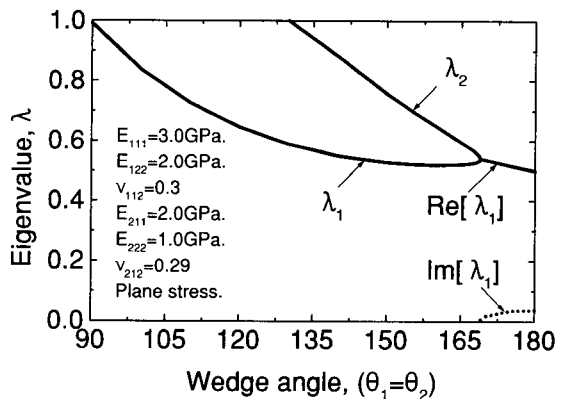


Fig. 7 Eigenvalue vs. wedge angle for a v-notched crack in an pseudo-isotropic dissimilar materials.

가 1개, 131.795°와 168.91°사이에서 실수인 고유치가 2개, 168.91°에서 180°사이에서 복소수인 고유치가 1개 있다. 이러한 성질은 등방성 이종재료 내의 V-노치 균열 및 이방성 이종재료 내의 V-노치 균열의 응력특이성과 유사한 경향을 나타내고 있다.^{(10),(11)}

8.2 고유벡터에 대한 수치해석 및 고찰

8.2.1 프로그래밍의 검증

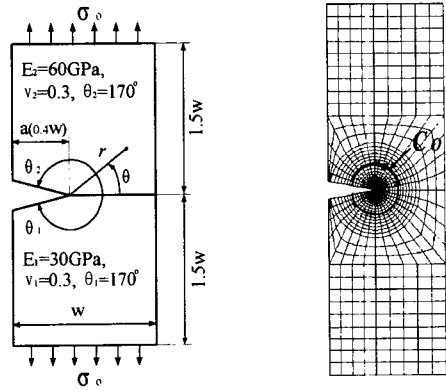
유사등방성 이종재료 내의 V-노치 균열에서 각 고유치에 대한 고유벡터는 앞의 7장에서 설명한 상반일 등고선 적분법을 이용한 수치해석으로부터 구하였고 수치해법 및 그 프로그램의 타당성 여부를 다음의 방법들로 검증하였다.

첫째, 고유벡터값을 임의로 정한 다음, 식(54)에 대입하여 응력과 변위를 구하고 이 값을 식(60)의 유한요소해석에 의한 결과값 대신 사용해서, 역으로 임의로 정한 고유벡터를 찾아내는 지를 확인하였다. 한 가지 예로, 노치각도 ($\theta_1 = \theta_2$)가 170°이고, 1영역의 재료 $E_{111}=6.0\text{GPa}$, $E_{122}=2.5\text{GPa}$, $\nu_{112}=0.3$ 인 유사등방성재료와 2영역의 재료가 $E_{211}=1.5\text{GPa}$, $E_{222}=1.0\text{GPa}$, $\nu_{112}=0.29$ 인 유사등방성재료로 접합된 이종재료에서 평면응력상태의 고유치 λ 는 $0.535686 + i0.0575848$ 으로 구해진다. 이 복소수 고유치에 대한 고유벡터를 임의로 $A_{11}=1.0 + i1.0$ 으로 가정하고 이들 고유치와 고유벡터로부터 얻은 응력과 변위를 식(60)의 유한요소해석에 의한 결과값 대신 사용하여 수치해석한 결과, 역으로 정확하게 $A_{11}=1.0 + i1.0$ 으로 구해짐을 확인할 수 있었다.

둘째, 범용 유한요소해석 프로그램인 ANSYS⁽¹²⁾로부터 식(60)의 응력과 변위를 구하고 이 값들을 상반일 등고선 적분법 프로그램에 사용하여 각 고유치에 대한 고유벡터를 얻은 다음, 식(54)에 대입하여 유한요소해석에 의한 응력과 변위와 일치하는 지를 검토하였다. 본 방법으로 검토하기 위하여 유사등방성 이종재료의 특수한 경우에 해당하는 등방성 이종재료를 Fig. 8의 a와 같이 선택하였으며 외부등고선 C_0 는 $r_0/a=0.5$ 를 따르는 위치를 선정하였다. 이 경우에 대한 평면응력상태의 고유치와 고유벡터를 구하여 Table. 1에 표현하였고 이들 고유치에 대한 고유벡터를 식(54)에 대입하여 얻은

Table 1 Coefficients associated with each eigenvector

Eigenvector	Eigenvalue(λ)	Associated coefficient	Coefficient value
1a	0.5311+i0.02595	Re[$A_{11}(\lambda_1)$]	0.416103
1b	0.5311+i0.02595	Im[$A_{11}(\lambda_1)$]	0.062200
2	1.125371	Re[$A_{11}(\lambda_2)$]	0.114160
3	1.509138	Re[$A_{11}(\lambda_3)$]	0.036485
4	1.679738	Re[$A_{11}(\lambda_4)$]	-0.003773
5	1.992206	Re[$A_{11}(\lambda_5)$]	0.000321



a) Configuration of 2 materials b) FEA model

Fig. 8 V-notched crack in isotropic dissimilar materials

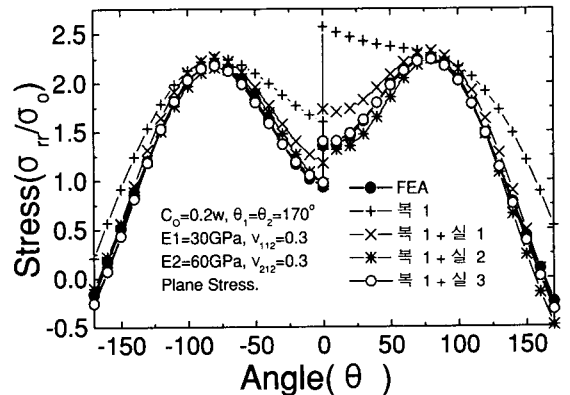


Fig. 9 Comparison of the state of stress for RWCIM and FEA

응력값과 유한요소해석에 의한 응력값을 무차원화시켜 Fig. 9에 나타냈다. Fig. 9에서 복소수 고유치 1개만을 사용하여 응력을 구하였을 경우 유한요소해석에 의한 응력값과 상당한 차이가 있었으나 양적으로 고유치를 몇 개 이상 정했을 때부터 해의 수렴이 잘되었다.

셋째, 유사등방성 이종재료간 균열문제를 포함하는 V-노치 균열문제에서 응력특이성을 나타내는 고유치에 대한 고유벡터를 본 수치해법으로 구하고, 기존의 수치해석결과와 비교, 검토하여 본 프로그램의 신뢰성 여부를 확인하였다. 유사등방성 이종재료의 특수한 경우에 해당하는 등방성 이종재료 접합계면 균열문제에서 응력특이성을 나타내는 고유치에 대한 고유벡터를 본 방법으로 구하고 기존의 결과와 비교하기 위하여 기존의 이종재료 접합계면 균열문제에 사용된 응력강도계수(K_1, K_2)와 본 방법으로 구한 고유벡터 A와의 관계를 맺어 두어야 한다. 이종재료 접합계면 균열문제에서 첫 번째 고유치 $\lambda_1=0.5+i\epsilon$ 이므로 첫 번째 고유치와 그에 해당하는 고유벡터를 이용하여 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \sqrt{2\pi}(1+e^{2\pi\epsilon})[(\epsilon Re[A_{12}]-Im[A_{12}])\sin\{\epsilon \ln(a)\}] \\
 &+ (Re[A_{12}]-2\epsilon Im[A_{12}])\cos\{\epsilon \ln(a)\} \\
 K_2 &= \sqrt{2\pi}(1+e^{2\pi\epsilon})[(\epsilon Re[A_{12}]-Im[A_{12}])\cos\{\epsilon \ln(a)\}] \\
 &- (Re[A_{12}]-2\epsilon Im[A_{12}])\sin\{\epsilon \ln(a)\}
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

여기서 a 는 편측균열길이이며 $Re[A_{12}]$ 과 $Im[A_{12}]$ 은 고유치 λ_1 에 대한 고유벡터이다.

Fig. 8의 a에서 $\theta_1=\theta_2=180^\circ$ 인 등방성 이종재료의 편측균열문제를 본 방법으로 구한 결과와 기존의 결과⁽¹³⁾를 Table. 2에 나타내었고, 두 결과가 거의 일치함을 확인할 수 있었다. Table. 2에서 $F_i=\sqrt{K_1^2+K_2^2}/\sigma\sqrt{\pi a}$ 와 K_2/K_1 는 무차원 응력강도계수이다.

Table 2 Comparison of stress intensity factors
(Plane stress, $\epsilon=0.037306$)

(a/W=0.4)	$F_i (K_2/K_1)$
Present Method	2.117 (-0.068)
BEM' Result ⁽¹³⁾	2.117 (-0.094)

9. 결론

유사등방성 이종재료간 V-노치 균열문제에서 V-노치각도 및 이종재료의 물성치에 따른 고유치와 상반일 등고선 적분법을 이용한 수치해법으로 고유벡터를 계산한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 중복근이 $i\beta$ 인 유사등방성 이종재료의 특수한 경우에 해당하는 등방성재료(i)에 대한 수치해석결과는 기존의 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있었고, 유사등방성 이종재료에 대한 응력특이성을 나타내는 고유치 λ 는 $0.5 \leq Re[\lambda] < 1$ 의 범위에서 복소수인 경우는 1개가 있으며, 실수인 경우에는 2개 혹은 1개의 근이 있었다.

2) 상반일 등고선 적분법을 이용한 고유벡터 해석은 유사등방성 이종재료 내의 V-노치 균열문제에 대한 자료가 많지 않은 실정에서 유사등방성 이종재료의 강도해석 및 균열문제를 체계적으로 해석할 수 있는 기초적인 토대가 될 수 있을 것이라 사료된다.

참고문헌

1. Bogy. D. B, "On the Problem of Edge-bonded Elastic Quarter-planes Loaded at the Boundary," Int. J. Solids Structures, Vol. 6, pp. 1287-1313, 1970.
2. Bogy. D. B, "Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction," J.Applied Mechanics, Vol. 38, pp. 377-386, 1971.
3. Hein. V. L. and Erdogan. F, "Stress Singularities in a Two-material Wedge," Int. J. Fract. Mech., Vol. 7, pp. 317-330, 1971.
4. Carpenter. W. C. and Byers. C, "A Path Independent Integral for Computing Stress Intensities for V-notched Cracks in a Bi-material," Int. J. Fract., Vol. 35, pp. 245-268, 1987.
5. Ting. T. C. T. and Chou. S. C, "Edge Singularities in Anisotropic Composites," Int. J. Solids Structures, Vol. 17, No. 11, pp. 1057-1068, 1981.
6. Zwiers. R. I., Ting. T. C. T and Spiker. R. L, "On the Logarithmic Singularity of Free-edge Stress in Laminated Composites under Uniform Extension,"

- J.Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 561-569, 1982.
7. Ting, T. C. T, "Explicit Solution and Invariance of the Singularities at an Interface Crack in Anisotropic Composites," Int. J. Solids Structures, Vol. 22, No. 9, pp. 965-983, 1986..
 8. Lekhnitskii. S. G, "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body," Holden-Day, Inc., 1963.
 9. Dunn, M. L., Suwito, W., and Cunningham, S., 1997, "Stress intensities at Notch Singularities," Engng Fracture Mech., Vol. 57, No. 4, pp. 417-430, 1997.
 10. 조상봉, 윤성관, "이종재료간 V-노치균열의 응력특이성과 응력강도계수의 특성 및 결정에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제16권 제10호, pp. 1890- 1899, 1992.
 11. 조상봉, 양장홍, "이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성에 관한 연구," 대한기계학회논문집, A권, 제 22권 제 7호, pp. 1307- 1315, 1998.
 12. ANSYS User's Manual, Revision 5.3
 13. R. Yuuki, and S. B. Cho, "Efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface crack in dissimilar materials," Engng. Frac. Mech, Vol. 34, pp. 179-188, 1989.