반복하중을 받는 철근콘크리트 쉘구조의 비선형 해석

Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Shells Subjected to Cyclic Load

김 태 훈* 유 영 화** 신 현 목***
Kim, Tae Hoon Yoo, Young Hwa Shin, Hyun Mock

국문요약

본 논문에서는 반복하중을 받는 철근콘크리트 쉘구조물의 해석을 위한 비선형 유한요소 해법을 제시하였다. 유한요소로서는 층상화기법을 이용한 부재회전강성도를 갖는 4절점 평면 쉘요소가 개발되었다. 두께방향에 대한 철근과 콘크리트의 재료성질을 고려하기 위하여 층상화기법이 도입되었다. 재료적 비선형성에 대해서는 균열콘크리트에 대한 인장, 압축, 전단모델과 콘크리트중에 있는 철근모델을 조합하여 고려하였다. 이에 대한 콘크리트의 균열모델로서는 분산균열모델을 사용하였으며, 철근에 대해서는 1축 응력상태로 가정하여 등가의 분산 분포된 철근량으로 모델화하였다. 구성모델은 재하, 제하 그리고 재재하과정을 포함하며 요소는 반복하중하에서 철근콘크리트 쉘의 거동을 파악할 수 있다. 신뢰성 있는 실험결과와 비교를 통하여 본 논문의 해석방법이 반복하중을 받는 철근콘크리트 쉘구조의 비선형 해석에 적합한 방법임을 입증하고자 한다.

주요어 : 반복하중, 층상화기법, 부재회전강성도, 분산균열모델, 구성모델

ABSTRACT

In this paper, nonlinear finite element procedures are presented for the analysis of reinforced concrete shells subjected to cyclic load. The 4-node flat shell element with drilling rotational stiffness was developed by the layered approach. A layered approach is used to represent the steel reinforcement and to discretize the concrete behavior through the thickness. The material nonlinearities are taken into account by comprising the tension, compression and shear model of cracked concrete and a model for reinforcement in the concrete, and also a so-called smeared crack model is incorporated. The steel reinforcement is assumed to be in a uniaxial stress state and is modelled as a smeared layer of equivalent thickness. Since the constitutive models cover loading, unloading and reloading paths, the element is capable of predicting behaviors of reinforced concrete shells under cyclic loading. The method will be verified a useful tool to account for nonlinear analysis of reinforced concrete shells subjected to cyclic load through comparing with reliable experimental results.

Key words *: cyclic load, layered approach, drilling rotational stiffness, smeared crack model, constitutive model*

1. 서 론

최근 들어 지하 탱크, 핵폐기물 저장소, 대형 사일로, 해양구조물등과 같은 복잡한 철근 콘트리트 쉘구조물의 건설이 늘어나고 있다. 그러나, 복잡한 3차원 기하 형상, 하중 조건 그리고 철근콘크리트의 3차원 비선형거동으로 인해 이러한 구조물의 거동을 정확하게 예측하기가 어려운 실정이다. 이를 해결할 수 있는 가장 유력한 방법은 비선형 유한요소해석이며 이러한 유한요소 해석법의 개발 및 적용을 위하여 많은 노력을 해왔다.[(1),(2)] 그러나, 이러한 노력들은 특수한 요소와 효율적인 알고리즘의 개발에 중점 되었으며 철근콘크리트 쉘의 거동을 정확히 예측하기

* 학생회원 · 성균관대학교 토목공학과 박사과정
** 정회원 · 성균관대학교 토목공학과 강사
*** 정회원 · 성균관대학교 토목공학과 교수
본 논문에 대한 토의를 2000년 6월 30일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.

위한 구성모델의 개발을 위한 노력은 부족하였다.[3] 더욱이 반복하중하에서의 철근콘크리트 3차원 쉘을 위한 구성모델은 아직까지 정립되지 않았으며 이로 인해 반복하중하에서의 철근콘크리트 쉘의 거동을 예측하는 능력이 제한되고 있다.

이 연구에서 대상으로 하는 반복하중을 받는 철근콘크리트 쉘구조는 2방향 이상으로 철근이 분산 배치되어 있고 많은 균열이 분산하여 발생하기 때문에 부재의 균열 발생 진전보다는 오히려 균열 발생후 부재의 전체적인 거동을 종합적으로 파악하는 것이 더욱 중요하다. 이에 대한 콘크리트의 균열모델로서는 몇 개의 균열을 포함하고 유한의 연속체로 생각하는 분산균열모델(smeared crack model)을 사용하였다. 또한 철근콘크리트 쉘구조를 해석하는데 있어서 하중의 증가에 따른 인장 균열의 진행과 콘크리트의 강도 감소를 보다 자세히 고려하기 위하여 여러 층의 얇은 면응력요소가 두께방향으로 적층되어 있다고 보는 층상화기법(layer method)을 도입하였다. 이 방법은 쉘두께를 여러 개의 층으로 분할하여 두께에 따른 응력의 변화를 파악할 수 있는 방법으로서 각층의 재료성질이 변화해도 취급이 가능하므로, 철근콘크리트의 경우 철근의 위치나 철근과 콘크리트의 재료특성을 보다 정확하게 고려할 수 있다.

이 연구에서는 3차원 beam-column 요소와 조합하여 사용할 수 있도록 일반적인 쉘요소의 자유도에 부재회전 방향의 자유도인 drilling 회전강성도[4],[5]를 도입하였으며 2차원 구성방정식과 층상화기법을 이용하여 반복 하중을 받는 임의형상의 철근콘크리트 쉘구조에 대한 역학적 거동, 즉 탄성, 비탄성, 극한영역등 전응력상태에 걸친 하중과 변형의 관계와 균열의 진행, 콘크리트와 철근의 응력 추적등을 정확히 해석할 수 있는 3차원 철근콘크리트 쉘요소의 개발을 목적으로 하였다.

2. 쉘구조의 유한요소 정식화

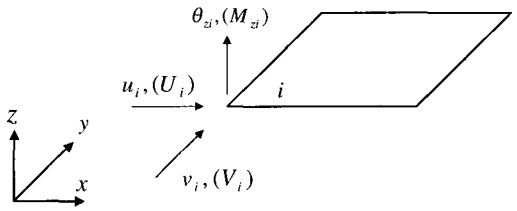
이 연구에서는 drilling 자유도를 갖는 면요소와 Kirchhoff의 이론에 근거한 판요소를 중첩하여 각 절점에서 6개의 자유도를 가지며 3차원 beam-column 요소와 조합하여 사용할 수 있는 4절점 평면 쉘요소를 개발하였다.(Fig. 1) 여기서 면외방향의 전단변형을 무시한 Kirchhoff의 이론에 근거한 판요소를 채택한 이유는 두께가 얇은 쉘에서는 전단변형의 영향을 무시할 수 있으며 이러한 가정으로부터 감차적분을 하지 않고서도 shear locking 현상으로부터 자유로울 수 있기 때문이다.

쉘 요소의 절점변위와 절점력은 Fig. 1과 같으며 다음 식으로 나타낼 수 있다.

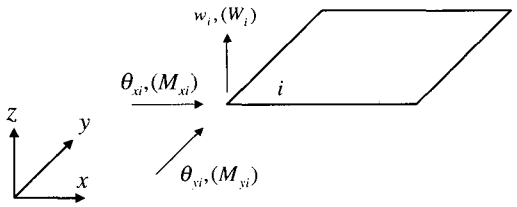
$$\{q_i\}=\{u_i,\ v_i,\ w_i,\ \theta_{xi},\ \theta_{yi},\ \theta_{zi}\}^T \qquad (1)$$

$$\{f_i\}=\{U_i,\ V_i,\ W_i,\ M_{xi},\ M_{yi},\ M_{zi}\}^T \qquad (2)$$

식 (1), (2)에서 면내거동을 표현하는 면요소에 관계되는 자유도는 u_i, v_i, θ_{zi} 단면력은 U_i, V_i, M_{zi} 이며 면외거동을 표현하는 판요소에 관계되는 자유도는 w_i, θ_{xi}, θ_{yi} 단면력은 W_i, M_{xi}, M_{yi}이다.



a) Plane membrane actions and deformations



b) Bending actions and deformations

Fig. 1 A flat shell element subjected to plane membrane and bending action

먼저 면요소의 유한요소 정식화에는 변분을 이용하여 Hughes[6]에 의해 제안된 다음 식을 사용하였다.

$$\Pi_\rho(\bar{u},\bar{\Phi}) = \frac{1}{2}\int_\Omega symm(\nabla\bar{u})\cdot C\cdot symm(\nabla\bar{u})d\Omega + \frac{1}{2}\rho\int_\Omega |skew\ (\nabla\bar{u})-\bar{\Phi}|^2 d\Omega - \int_\Omega \bar{u}\cdot f d\Omega \quad (3)$$

여기서 $\bar{u}$ 는 Ω 영역에서의 trial 변위, f 는 외력, ρ는 penalty이며, $\bar{\Phi}$는 Ω 영역에서의 drilling 자유도로서 Fig. 2와 같이 다음 식으로 나타낼 수 있다.[4),(5)]

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (4)$$

또한 식 (3)에 대하여 변분을 취하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} 0 &= D\Pi_\rho(u,\Phi)(\bar{u},\bar{\Phi}) \\ &= \int_\Omega symm(\nabla\bar{u})\cdot C\cdot symm(\nabla u)d\Omega \\ &+ \rho\int_\Omega [skew(\nabla\bar{u})-\bar{\Phi}]^T[skew(\nabla u)-\Phi]d\Omega \\ &- \int_\Omega \bar{u}\cdot f d\Omega A \end{aligned} \quad (5)$$

변분식인 (5)를 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$[K^m][q] = [f] \quad (6)$$

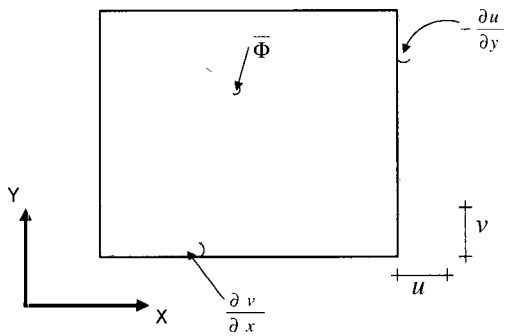


Fig. 2 Physical interpretation of the drilling degree of freedom

여기서 $[K^m]$은 drilling 자유도를 포함한 면요소의 강성행렬,[5] $[q]$는 절점변위행렬 그리고 $[f]$는 절점력행렬이다.

다음으로 면외거동을 표현하는 판요소는 Kirchhoff 이론에 근거한 12개의 자유도를 갖는 요소로서 변형에너지에 근거하여 다음과 같이 정식화되었다.[5]

$$U = \sum_e^n U_b^e \quad (7)$$

$$U_b^e = \frac{1}{2}\int_{A^e}[X]^T[D_b][X]dA^e \quad (8)$$

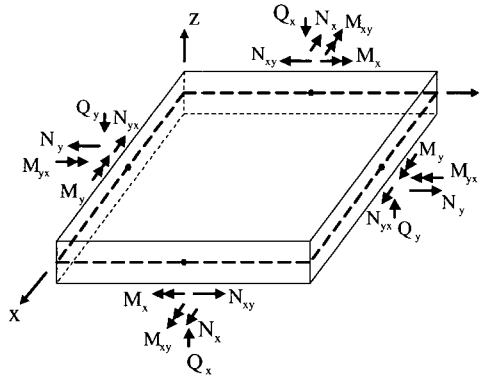
여기서 U_b^e는 휨에 의한 요소의 변형에너지이며 면외방향의 전단변형은 무시한다. $[X]$는 곡률 그리고 A^e는 요소의 면적이다. 등방성의 균질한 요소일 때 $[D_b]$는 다음 식과 같다.

$$[D_b] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, E는 탄성계수, ν는 Poisson 비 그리고 h는 두께이다. 다만, 식 (9)는 등방성 균질요소의 경우의 값으로써 철근콘크리트구조의 재료의 비선형성을 고려할 수 없다.

이 연구에서는 3차원 탄성 정식화를 근거한 위의 요소를 바탕으로 철근콘크리트 구조의 재료의 비선형성을 고려하기 위하여 다음과 같은 층상화기법이 도입되었다.

Fig. 3은 쉘에 작용하는 힘과 층상화요소이다. 부재의 크기에 비하여 두께가 얇은 쉘은 두께방향의 변형은 무시될 수 있으며[2] 따라서 이 연구에서는 쉘요소의 응력상태를 두께방향의 변형을 무시한 2차원 응력상태로 가정하고, 면외방향의 휨모멘트는 각 층에서의 응력을 두께방향으로 적분하고 이를 다시 중립축에 관한 모멘트의 합으로 표현한다. 각 층에서 면내 변형률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



(a) Forces acting on RC shells

(b) Layered element

Fig. 3 Shell element

$$\varepsilon_x^i = \overline{\varepsilon_x} + z\phi_x$$
$$\varepsilon_y^i = \overline{\varepsilon_y} + z\phi_y$$
$$\gamma_{xy}^i = \overline{\gamma_{xy}} + z\phi_{xy} \qquad (10)$$

여기서 ϕ_x, ϕ_y, ϕ_{xy}는 휨과 비틀림 곡률이며, ε_x^i, ε_y^i, γ_{xy}^i는 i층 xy 평면의 면내 변형률, $\overline{\varepsilon_x}$, $\overline{\varepsilon_y}$, $\overline{\gamma_{xy}}$는 요소두께의 중립면 xy 평면의 면내 변형률, z는 요소두께의 중립면으로부터 i층 중립면까지의 거리이다. 요소두께의 중립면 변형률과 곡률은 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{\varepsilon_x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\overline{\varepsilon_y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\overline{\gamma_{xy}} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\phi_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$$
$$\phi_y = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y}$$
$$\phi_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \qquad (11)$$

철근콘크리트 요소의 2차원 구성모델의 적용을 통해서 각층의 면내 변형률로부터 얻어지는 모든 층의 면내 응력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \sigma_{xy}^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^i \\ \varepsilon_y^i \\ \gamma_{xy}^i \end{pmatrix} \qquad (12)$$

여기서, $[C_{ij}]$는 2차원 응력상태에서의 철근콘크리트 요소의 구성방정식으로서 이에 대한 내용은 다음 절에서 다룬다.

철근콘크리트요소의 두께방향 적분은 층요소의 정식화를 통해 이루어진다. 각 층은 콘크리트와 철근콘크리트 층으로 정의되며, 철근은 Fig. 3의 철근콘크리트요소와 같이 층에 분포되어 있다. 각 층에서의 내력은 각 요소로부터 대응하는 적분점에서의 응력을 적분하여 얻을 수 있으며, 이를 다시 두께방향으로 적분하면 쉘요소의 면내력 N_i와 휨모멘트 M_i는 다음과 같다.

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \sum_1^n \sigma_x^i \, h^i$$
$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz = \sum_1^n \sigma_y^i \, h^i$$
$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz = \sum_1^n \sigma_{xy}^i \, h^i$$
$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, zdz = \sum_1^n \sigma_x^i \, zh^i$$
$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, zdz = \sum_1^n \sigma_y^i \, zh^i$$
$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, zdz = \sum_1^n \sigma_{xy}^i \, zh^i \qquad (13)$$

여기서 n은 두께에 걸친 층의 개수이며 h^i는 i층의 두께이다. 쉘요소에 균열이 발생하면 면내력의 평형조건을 만족시키기 위하여 중립축은 압축연측으로 이동하게 된다.

3. 철근콘크리트의 비선형 재료모델

철근콘크리트는 복합재료이며, 재료의 비선형성은 타구조재료에 비해 극히 복잡하다. 특히 균열발생후의 비선형성은 현저하게 나타나며, 이러한 재료적 비선형성에 대해서는 철근콘크리트 요소의 직교 이방성의 가정에 따라, 균열 직각방향으로 콘크리트가 부담하게 되는 인장응력을 고려하기 위한 인장강성모델과 균열방향으로의 압축강성 저하를 고려하기 위한 압축강성모델 및 균열면에서의 전단전달효과를 고려하기 위한 전단전달모델을 각각 적용한다.

3.1 균열의 취급 및 발생기준

철근콘크리트 부재에는 일반적으로 저응력하에서도 균열은 반드시 발생한다. 그러나 해석적인 관점에 있어서는 균열의 발생시점과 방향을 정확하게 예측하기는 어렵다. 철근콘크리트 부재의 변형거동은 해석에 사용되는 균열모델에 크게 영향을 받는다. 유한요소법을 사용한 해석에서 사용되는 균열모델은 크게 분산균열모델과 이산균열모델로 대별된다. 철근콘크리트 부재의 경우에는 철근이 직교 배근되어 있고 다수의 균열이 분포되어 발생하는 것이 보통이므로 개개 균열의 발생이나 진전과정보다는 부재전체의 거동을 표현할 수 있는 분산균열모델의 사용이 바람직하다. 따라서 철근콘크리트 요소의 해석모델은, 다수의 균열과 철근을 포함한 영역을 유한의 연속체로 간주하는 직교 이방성 분산균열모델에 근거하여 평균응력-평균변형률로 표현된다.[7]

분산균열모델은 다시 고정균열모델과 회전균열모델로 나눌 수 있다.[8] 두 경우 모두, 콘크리트의 주응력이 파괴 포락선에 도달하였을 때에 주응력과 직교인 방향으로 최초의 균열이 발생하는 것으로 가정하고 있다. 회전균열모델은 제 1균열과 2균열이 주변형률의 방향과 일치하도록 연속적으로 변화한다는 가정으로부터 균열면에서의 전단전달모델의 도입이 필요 없으며, 따라서 간단한 모델로 단조증가하중에 대한 역학적거동을 비교적 충실히 추적할 수 있다는 장점이 있다. 그러나, 하중이 반복적으로 작용하는 경우에는 균열면에서의 하중이력을 기록해 두어야 하는데 회전균열모델은 하중스텝에 따라 균열의 각도가 변화하고 있으므로 하중이력의 기억이 곤란하며 많은 용량을 차지하게 되어 반복하중을 받는 경우에는 그 적용성에 한계가 있다고 할 수 있다.

고정균열모델은 처음 발생한 균열의 각도를 고정시키고 하중증가에 따른 주응력방향의 변화는 균열면에서의 전단전달모델을 도입함으로써 해결하고자 하는 것으로써 균열발생후 주응력의 각도 변화가 큰 부재에 대해서는 실제보다 강성이 과대평가 되는 약점이 있다. 본 연구에서는, 제 2 균열의 발생을 제 1균열과 직교방향으로 발생하도록 제한하여 콘크리트의 강성이 과대평가 되는 직교 고정균열모델[9]과 달리, 제 2균열의 방향을 실제 주응력의 방향과 직각으로 발생하도록 함으로써 콘크리트의 강성을 보다 사실적으로 평가할 수 있으며 반복하중시에도 기억하여야 할 하중이력의 용량을 줄 일 수 있는 장점이 있는 비직교 고정 균열모델을 채용하였다.

이축응력상태에 대한 콘크리트의 파괴기준으로서는 콘크리트의 주인장변형률이 인장변형률에 도달할 때, 균열이 발생하는 것으로 하였으며, 압축-인장영역에 대해서는 Niwa의 제안식, 인장-인장영역에 대해서는 Aoyagi-Yamada의 제안식을 사용하였다.[10] 또 반복하중의 작용시에 기존균열과는 다른 방향으로 새로운 균열이 발생한다. 그러나 두 균열사이의 각이 25° 보다 작거나 155° 보다 큰 경우, 또는 제 2균열에 대한 주 변형률이 0보다 작은 경우에는 제 2균열은 발생하지 않은 것으로 간주하며, 제 2균열에 대한 균열발생기준은 1균열에 대한 기준과 같은 것으로 가정하였다.

3.2 균열발생전의 콘크리트 모델

콘크리트에 균열이 발생하기 전의 역학모델

은 이축응력상태에 대한 탄소성파괴모델의 기본개념에 의해서 표현할 수 있다.[10] 이 모델에 의하면, 식 (14)와 같이 콘크리트의 응력상태를 콘크리트의 초기탄성계수, 파괴 파라메터 및 등가의 소성변형률의 함수로 이루어진 등가응력-등가변형률 관계로 표현하고 있어서 임의의 하중이력에 대해서도 그 적용성이 높다.

$$\sigma = E_o \; K_o(\varepsilon - e_p) = E_o \; K_o \; \varepsilon_e \tag{14}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{\max} - \frac{20}{7}[1 - \mathrm{Exp}(-0.35 \; \varepsilon_{\max})] \tag{15}$$

$$K_o = \mathrm{Exp}\{-0.73 \; \varepsilon_{\max}[1 - \mathrm{Exp}(-1.25 \; \varepsilon_{\max})]\} \tag{16}$$

여기서 σ는 등가응력

$(= \sqrt{(\frac{0.6}{f_c}\sqrt{2}\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2})^2 + (\frac{1.3}{f_c}\sqrt{2}\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2})^2})$,

ε는 등가의 전체변형률

$(= \sqrt{(\frac{0.62}{\varepsilon_{co}}\sqrt{2}\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2})^2 + (\frac{0.98}{\varepsilon_{co}}\sqrt{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2})^2}$

$= \varepsilon_e + \varepsilon_p$), E_o는 콘크리트의 초기 탄성계수 그리고 K_o는 콘크리트 파괴 진전을 나타내는 파괴 파라메터이다. 등가 소성변형률은 콘크리트의 응력이 0이 될 때의 변형률이며, 파괴 파라메터는 제하시의 강성의 감소를 나타낸다. 등가응력은 평면응력상태에 작용하는 응력수준을 의미하며, 평균응력과 편차응력의 함수로 정의된다.

3.3 균열발생후의 콘크리트 모델

3.3.1 균열직각방향의 인장강성모델

콘크리트는 균열이 발생한 후에도 철근과 콘크리트의 부착작용에 의해서 균열면의 직각방향으로 응력의 일부분을 부담한다. 이와 같은 균열직각방향으로의 인장강성효과를 고려하기 위해서, 철근콘크리트부재의 일축인장실험을 기초로 한 실험식[11]을 Okamura등이 균열직각방향의 인장변형률의 함수로써 제안한 부착모델을 기본적으로 적용한다. 다만, 본 연구에서는 부착모델의 적용을 균열직각방향에 대하여 적용하지를 않고 원실험식에서와 같은 조건인 철근의 축방향에 대하여 적용함으로써 원실험식에 충실하도록 하였다.(Fig. 4)

$$\sigma_t = \sigma_{xt} \cos^2 \theta + \sigma_{yt} \sin^2 \theta \tag{17}$$

$$\tau_1 = -(\sigma_{xt} - \sigma_{yt}) \sin\theta \cos\theta \tag{18}$$

$$\frac{\sigma_{xt}}{\sigma_t'} = \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_x}\right)^c \quad \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_t'} = \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_y}\right)^c \tag{19}$$

여기서, σ_t는 균열직각방향으로의 콘크리트의 인장응력, σ_t'는 균열직각방향으로의 콘크리트의 인장강도, τ_1는 균열평행방향으로의 콘크리트의 전단응력, σ_{xt}, σ_{yt}는 철근 축방향으로의 콘크리트의 인장응력, ε_x, ε_y는 철근 축방향으로의 콘크리트의 인장변형률, ε_{cr}는 콘크리트의 균열변형률, c는 부착 파라메터(0.2 : 용접망, 0.4 : 이형철근, 0.6 : 원형철근) 그리고 θ는 철근축과 균열직각방향이 이루는 각이다.

제하 및 재재하의 경우에는 Tamai등이 제안한 모델[11]을 기본적으로 적용하였다.(Fig. 5) 이 모델에서는 콘크리트가 부담하는 인장응력은 철근과의 부착에 의한 응력과 균열면의 접촉에 의한 응력의 합으로 결정된다. 제하시의 경우, 균열면의 접촉은 콘크리트의 평균변형률이 완전히 0이 되기 전에 이미 시작되고 있으므로 균열면의 접촉개시 변형률을 정의하여 콘크리트의 인장변형률이 이보다 작을 경우에 한하여 접촉에 의한 응력이 발생하는 것으로 하였다.

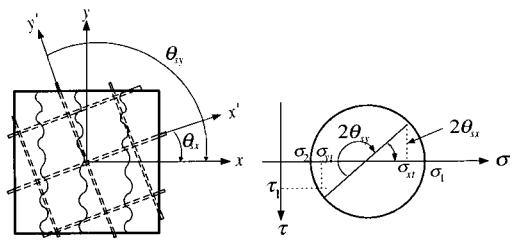


Fig. 4 Tensile stress evaluation of concrete normal to crack

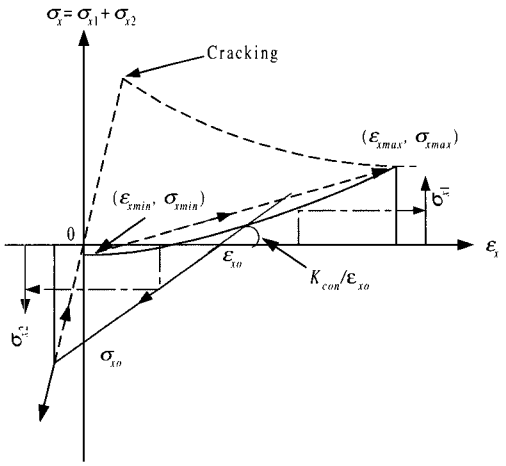


Fig. 5 Tension stiffness model for unloading and reloading

1) 제하시(Unloading)

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x\max}\left(\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{x\max}}\right)^2 + \sigma_{x1o} \quad (\varepsilon_x > 0) \tag{20}$$

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x1o} \quad (\varepsilon_x \le 0) \tag{21}$$

$$\sigma_{x2} = 0 \quad (\varepsilon_x \ge \varepsilon_{xo}) \tag{22}$$

$$\sigma_{x2} = K_{con}(\varepsilon_{xo} - \varepsilon_x)/\varepsilon_{xo} \quad (\varepsilon_x < \varepsilon_{xo}) \tag{23}$$

$$\sigma_{xt} = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} \tag{24}$$

여기서, $\varepsilon_{x\max}$는 포락선상에서 ε_x의 최대치, $\sigma_{x\max}$는 $\varepsilon_{x\max}$일 때의 σ_{x1}, σ_{x1o}는 부착으로 인한 잔류응력(= $-0.0016\,E_o\,\varepsilon_{x\max}$), ε_{xo}는 균열면이 접촉을 시작할 때의 균열직각방향의 변형률(= $0.00015 + 0.1\,\varepsilon_{x\max}$), σ_{xt}는 균열직각방향의 콘크리트의 인장응력, σ_{x1}는 부착작용으로 인한 콘크리트의 응력, σ_{x2}는 균열면의 접촉으로 인한 콘크리트의 응력 그리고 K_{con}는 $\varepsilon_{xo} \le \varepsilon_{xmax}/4$ 일 때 $-0.00005E_o$, $\varepsilon_{xo} > \varepsilon_{xmax}/4$ 일 때 $-\dfrac{0.00005E_o\varepsilon_{xmax}}{4\varepsilon_{xo}}$ 이다.

2) 재재하시(Reloading)

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x\max}\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_{xo})}{(\varepsilon_{x\max} - \varepsilon_{xo})} + \sigma_{x1\min} \tag{25}$$

$$\sigma_{x2} = K_{con}(\varepsilon_{xo} - \varepsilon_x)/\,\varepsilon_{xo} + \sigma_{x2\min} \tag{26}$$

$$\sigma_{xt} = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} \tag{27}$$

여기서, ε_{xmin}는 제하시 ε_x의 최소치, $\sigma_{x1\min}$는 ε_{xmin}일 때의 σ_{x1} 그리고 $\sigma_{x2\min}$는 제하시 σ_{x2}의 최소치이다.

3.3.2 균열평행방향의 압축강성모델

균열이 발생한 콘크리트는 균열이 없는 콘크리트에 비해서 강성이 작아진다는 사실은 이미 여러 연구자들[12]에 의해서 규명된 바가 있다. 균열이 발생한 콘크리트의 압축강성의 저하는, 균열직각방향으로의 인장변형률의 함수로 표현되고 있는 파괴 파라메터(ω)에 의해서 강성의 저감을 고려할 수 있다.(식 (28)) 즉, 균열을 포함한 콘크리트의 파괴 파라메터 K와 균열이 없는 콘크리트의 파괴 파라메터 K_o는 다음 식과 같은 관계에 있다.(Fig. 6)

$$K = \omega K_o \tag{28}$$

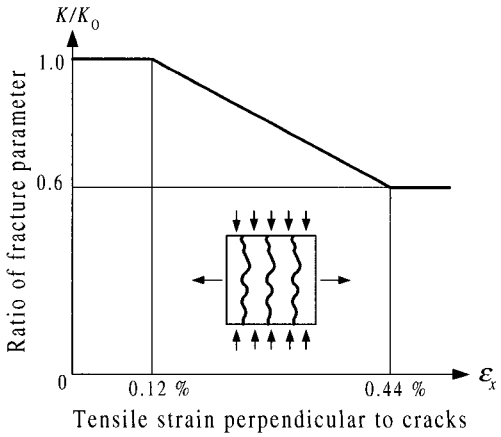


Fig. 6 Degradation in fracture parameter

따라서 균열이 발생한 콘크리트의 탄소성파괴모델은 다음 식과 같이 된다.(Fig. 7)

$$\sigma_y = E_o K(\varepsilon_y - \varepsilon_p) \tag{29}$$

여기서, E_o는 콘크리트의 초기탄성계수, ε_y는 균열평행방향의 변형률 그리고 ε_p는 균열평행방향의 소성변형률이다.

제하 및 재재하의 경우에도 균열이 발생한 콘크리트의 이력거동은 탄소성파괴모델에 의해서 표현할 수 있다. 이 모델에 의하면, 제하 및 재재하시 또는 포락선내부에서의 파괴는 진전하지 않으며, 파괴파라메터와 소성변형률의 선형적인 거동을 가정하고 있다. 따라서 제하 및 재재하 동안에는 에너지가 소비되지 않으며, 이것은 비교적 낮은 수준의 압축을 받는 경우, 콘크리트의 압축변형으로 인한 에너지의 소비가 총 에너지 소비량에 비해 무시할 수 있다는 가정에 기인한다. 본 연구에서는 제하 및 재재하와 같은 반복하중이력으로 인한 콘크리트의 손상증가 및 에너지 소비를 고려하는 것과 함께 수치해석상의 편리를 위해서, 제하시의 응력-변형률 관계를 제하시점과 잔류변형률을 지나는 단순 2차 포물선으로 가정하였으며 재재하시의 관계는 재재하시점과 제하점을 지나는 1차식으로 가정하였다.

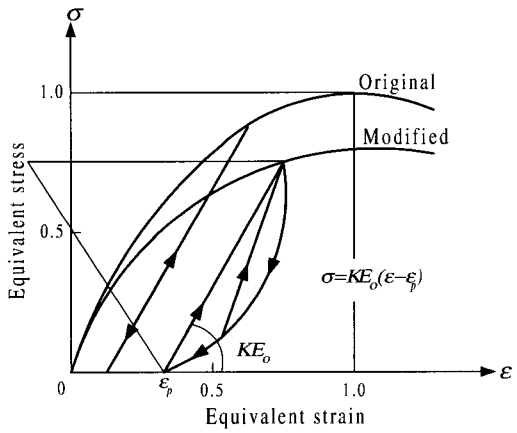


Fig. 7 Equivalent stress-equivalent strain relationship at unloading and reloading

3.3.3 균열면에서의 전단전달모델

균열면에서의 골재의 맞물림효과로 인한 전단응력의 전달효과는 접촉면밀도함수에 근거하여 고려하였다. 이 모델은 식 (30)과 식 (31)에서와 같이 균열면의 형상을 3개의 파라메터로 정의하여 균열면의 맞물림으로 인한 전단응력과 압축응력을 산정하고 있다.(Fig. 8) 이 모델은 외력에 대해서 탄소성적인 응답을 가정하고 있으며, 임의 하중이력에 대해서도 그 적용성이 높은 것으로 알려져 있다.

$$\tau = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [Z(\omega, \delta, \theta_s) \sin\theta_s] d\theta_s \tag{30}$$

$$\sigma = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [Z(\omega, \delta, \theta_s) \cos\theta_s] d\theta_s \tag{31}$$

여기서, τ는 균열면에서의 전단응력이고, σ는 균열면에서의 압축응력, Z는 접촉면 밀도함수, ω는 균열폭, δ는 전단미끄러짐 그리고 θ_s는 접촉면의 방향이다.

Li 등은 위 식으로부터, 균열면에서의 탄성변형과 균열폭의 영향을 무시한 후, 단조재하시에 대한 적분해를 구하였다.[10] 그러나 이 모델은 한 개의 균열에 대한 것이며, 평균응력의 개념을 도입함으로써 다수의 균열이 분포된 요소의 평균 전단강성은 균열면에서의 상대변위를 균열간격으로 나눈 값인 평균변형률을 사용하여 정의된다. 이 때, 요소의 평균 전단변형률은 균열면에서의 미끄러짐에 의한 변형률과 균열과는

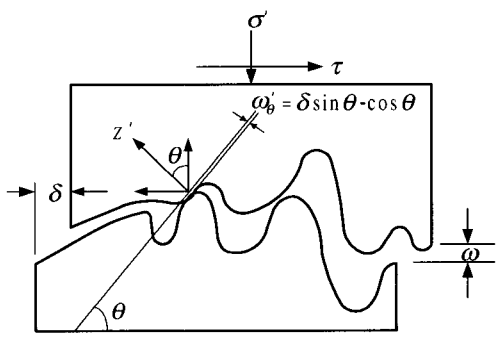


Fig. 8 Shear transfer mechanism at crack surface

무관한 전단변형률의 합으로 고려하고 있다. 그러나 반복하중의 경우에는 일반적으로 균열이 폐합하는 현상이 발생하며 이 위치에서의 전단강성이 증가하게 된다. 따라서 철근콘크리트 요소의 전단강성을 평가할 때에는, 균열의 개폐로 인한 전단강성의 연속성을 보장하기 위해서 균열사이의 콘크리트의 전단강성효과를 고려해야 한다.

따라서 평균응력의 개념과 전단강성효과를 고려하면, 재하시에 대한 철근콘크리트요소의 균열 평행방향의 전단응력과 전단전달로 인한 압축응력은 다음 식으로부터 산정한다.

$$\tau_{xy} = K_{shro}\,\gamma_{xy} \tag{32}$$

$$\sigma_{xs} = -\frac{\sigma_{sk}}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\beta_1}\right) - \frac{\beta_1}{1+\beta_1^2}\right] \tag{33}$$

여기서, τ_{xy}는 균열면에서의 전단응력, σ_{xs}는 균열면에서의 전단전달로 인한 압축응력, γ_{xy}는 균열면의 전단변형률, σ_{sk}는 전단전달강성, K_{shro}는 $\frac{1}{1/K_{stfo}+1/G_c}$, K_{stfo}는 단조재하시에 대한 균열면에서의 secant 전단강성(= $\sigma_{sk}\frac{\gamma_{xy}}{\gamma_{xy}^2+\varepsilon_x^2}$), 그리고 β_1는 $\sqrt{\tau_{xy}/(\sigma_{sk}-\tau_{xy})}$이다.

Shin등은 Li · Maekawa의 구성칙 및 실험에 기초한 다수의 재하이력에 대한 파라메터해석을 수행하여 유한요소법에 적용하기가 용이한 제하 및 재재하에 관한 전단전달모델을 개발하였다. 위의 제하 및 재재하 이력곡선은 거의 같은 선위를 지나고 있어서 이를 구분하는 것은 구분하지 않는 경우와 이력거동에서 실용적으로 큰 차이를 보이지 않으며 다만 복잡한 하중이력에 대하여 안정적인 수렴해를 얻기가 곤란한 약점을 갖고 있다. 따라서 본 연구에서는 Shin 등이 제안한 전단전달모델의 제하 및 재재하곡선을 하나로 통일시킴으로써 해의 발산을 막고 안정적인 수렴해를 얻도록 하였다. 즉, 단조재하시의 경우와 같이 분산균열모델의 평균변형률 개념을 도입하여 제하 및 재재하시의 전단전달모델을 다음 식과 같이 수정하였다.(Fig. 9)

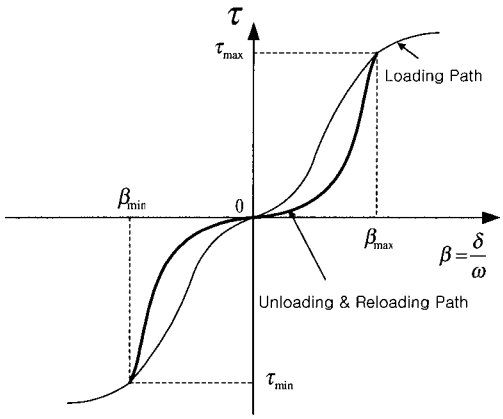


Fig. 9 Shear transfer model for unloading and reloading

1) $\beta \geq 0$

$$\tau_{\max} = \sigma_{sk}\frac{\beta_{\max}{}^2}{(1+\beta_{\max}{}^2)} \tag{34}$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{\sigma_{sk}}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\beta_{\max}}\right) - \frac{\beta_{\max}}{1+\beta_{\max}{}^2}\right] \tag{35}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{\max}\left(\frac{\beta}{\beta_{\max}}\right)^3 \tag{36}$$

$$\sigma_{xs} = \frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}}\,\tau_{xy} \tag{37}$$

2) $\beta < 0$

$$\tau_{\min} = \sigma_{sk}\frac{\beta_{\min}{}^2}{(1+\beta_{\min}{}^2)} \tag{38}$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{\sigma_{sk}}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{|\beta_{\min}|}\right) - \frac{|\beta_{\min}|}{1+\beta_{\min}{}^2}\right] \tag{39}$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{\min}\left(\frac{\beta}{\beta_{\min}}\right)^3 \tag{40}$$

$$\sigma_{xs} = -\frac{\sigma_{\min}}{\tau_{\min}}\,\tau_{xy} \tag{41}$$

여기서, $\beta = \delta/\omega$, $\beta_{\max}$는 재하시에 경험한 최대의 β, $\beta_{\min}$는 제하시에 경험한 최소의 β,

τ_{max}는 재하시에 경험한 최대의 τ, τ_{min}는 제하시에 경험한 최소의 τ, σ_{max}는 재하시에 경험한 최대의 σ 그리고 σ_{min}는 제하시에 경험한 최소의 σ이다.

3.4 철근콘크리트에 대한 철근모델

콘크리트속의 철근에 대한 항복후 거동은 철근만의 특성과 부착효과 등이 동시에 고려되어야 한다. 콘크리트 속의 철근응력은 일정하지 않고 균열면에서 최대가 된다. 철근의 응력-변형률 관계가 탄성영역에 있는 경우에는 철근만의 구성모델을 적용하면 된다. 그러나 균열면에서 철근이 최초로 항복하게 되면 철근의 평균응력-평균변형률 관계는 더 이상 탄성관계가 성립하지 않으며, 이 때 철근의 평균응력은 항복응력보다 작다.[10] 균열부분을 제외하면 철근의 응력은 항복응력보다 작기 때문에, 철근만의 응력-변형률 관계에서 볼 수 있는 항복고원현상은 나타나지 않으며 즉시 변형률 경화현상을 보인다. 본 연구에서는 포락선부분에 대한 철근의 항복후 거동을 다음 식에서와 같이 일정한 변형률 경화율을 갖는 것으로 제안된 bilinear 모델을 사용하였다.

$$\sigma_s = \sigma_{sy} + E_{sh}(\varepsilon_s - \varepsilon_{sy}) \tag{42}$$

여기서, σ_s는 철근의 평균응력, ε_s는 철근의 평균변형률, σ_{sy}는 철근의 변형률 경화 개시점, ε_{sy}는 철근의 변형률 경화 개시점에 대응하는 철근의 평균변형률 그리고 E_{sh}는 철근의 변형률 경화율이다.

제하 및 재재하에 대해서는 균열사이의 응력분포와 철근만의 응력-변형률 관계가 정의되면, 철근의 항복후 평균응력-평균변형률 관계를 구할 수 있다. 본 연구에서는 철근만의 응력-변형률 관계를 표현하고 있는 Kato 모델과 함께 철근의 응력분포를 정현곡선(Fig. 10과 Fig. 11)으로 가정함으로써 콘크리트 속의 철근의 거동을 표현하였다.[13] Kato가 제안한 반복하중에 대한 철근의 모델은 포락선부분(skeleton), 제하부분

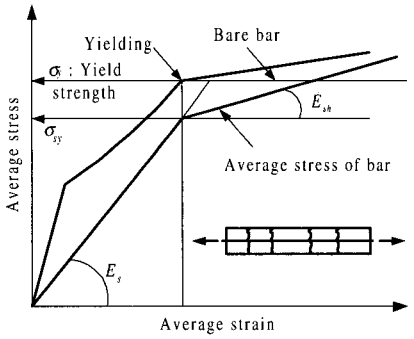


Fig. 10 Yield condition of reinforced concrete

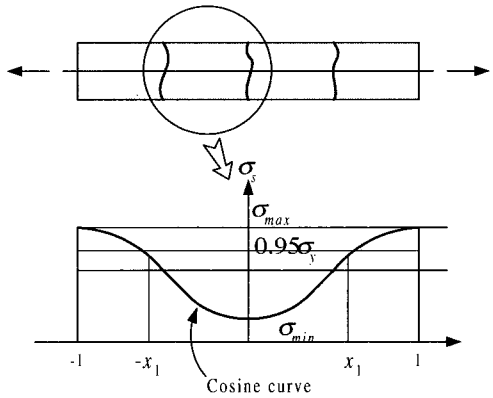


Fig. 11 Assumption for stress distribution of bar in concrete

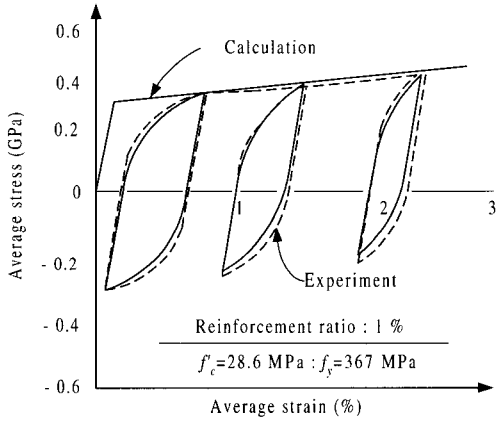


Fig. 12 Reinforcement model under reversed cyclic loading

및 연화(softening)부분의 3 부분으로 구성되어 있다. 즉, 포락선부분에 대해서는 단조재하 실험으로부터 얻은 강재의 포락선을 사용하였고, 제하부분의 거동은 탄성으로, 연화부분에 대해

서는 쌍곡선을 가정하여 그 정도가 비교적 높은 것으로 알려져 있다. 그러나 본 연구에서는 Kato가 제안한 제하 및 재재하시의 철근모델은 지진하중의 경우와 같이 하중이력이 복잡한 경우에는 수렴해를 얻는데 다소 어려움이 있음을 발견하였고, 제하 및 재재하시의 철근모델을 보다 간단하게 수정함으로써 임의의 하중이력에 대해서도 해의 안정성과 수렴성을 향상시켰다.(Fig. 12)

4. 유한요소해석 프로그램의 작성

본 연구에서 개발된 부재회전강성도를 갖는 RC쉘 요소 자체만으로도 적용 범위가 넓긴 하지만 쉘구조물 뿐 아니라 슬래브 전단벽 및 beam-column 요소로 구성되는 일반적인 구조물에의 적용을 전제로 한다면 RC쉘 요소만의 전용프로그램을 작성하는 것보다는 모듈화된 범용 유한요소해석 프로그램을 이용하는 것이 효과적이다. 이에 미국 버클리 대학의 Talyor가 개발한 범용 유한요소해석 프로그램인 FEAP[14]에 본 연구에서 개발된 RC쉘 요소를 이식하는 것으로 한다. FEAP은 FEAP자체가 보유하고 있는 트러스, 뼈대, solid등의 요소 이외에도 사용자가 개발한 50개의 요소를 추가할 수 있으며 이들의 조합 사용도 가능한 범용 유한요소해석 프로그램이다. 같은 대학의 Filippou도 FEAP을 사용하여 3차원 철근콘크리트 beam-column 요소[15]를 개발한 바 있다.

위로부터 본 연구의 결과는 RC쉘 구조물에의 적용뿐 아니라 여러 요소로 구성된 일반적인 구조물에의 적용도 기대된다.

5. 수치예제 및 고찰

개발된 RC 쉘 요소의 검증을 위하여 요소레벨의 시험체인 면내 교번 반복전단을 받는 Stevens등[16]의 시험체와 구조물레벨의 Irawan등[17]이 실험한 RC 쉘 시험체를 선정하여 해석하고 해석 결과를 고찰한다.

5.1 면내 교번 반복전단을 받는 요소

면내 교번 반복전단을 받는 콘크리트 판의 거동에 대해서 타당성이 있는가를 확인하기 위해서 Stevens등[16]이 실험한 이형철근으로 된 철근콘크리트 쉘요소를 해석하였다.

시험체의 크기는 1524×1524×285 mm이며 Fig. 13과 같이 하나는 철근이 등방성으로 배근되었고(SE9) 다른 두개는 이방성으로 배근되었다(SE8, SE10). 시험체의 재료 물성은 Table 1에 나와 있다.

교번 반복 전단하중은 철근과 45°의 두 직각방향으로 작용된 등가의 인장과 압축력(Fig. 13의 $f_v = f_h$)에 의해 철근방향에 작용된다.

요소에 걸쳐 힘의 분포가 균일하기 때문에 시험체의 응답을 예측하기 위해서 하나의 유한요소를 사용하였으며 요소당 층의 개수는 두개로 하였다.

Table 1 Material properties of SE-specimens[16]

Specimen	Concrete	Reinforcement				
	f_c'(MPa)	θ(degrees)	ρ_x(%)[a]	f_{yx}(MPa)	ρ_y(%)[a]	f_{yy}(MPa)
SE8	37.0	0	1.465	492	0.49	479
SE9	44.2	0	1.465	422	1.465	422
SE10	34.0	0	1.465	422	0.49	479

f_c' : compressive strength of concrete
θ : angle of the orientation of reinforcing bars to x direction of specimen
ρ_x, ρ_y : reinforcement ratio in x and y directions
f_{yx}, f_{yy} : yield strength of steel in x and y directions : [a] per layer

해석과 실험결과를 비교한 것이 Fig. 14부터 Fig. 16까지 나와 있다. 재하뿐만 아니라 제하와 재재하의 실험결과에서도 해석결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

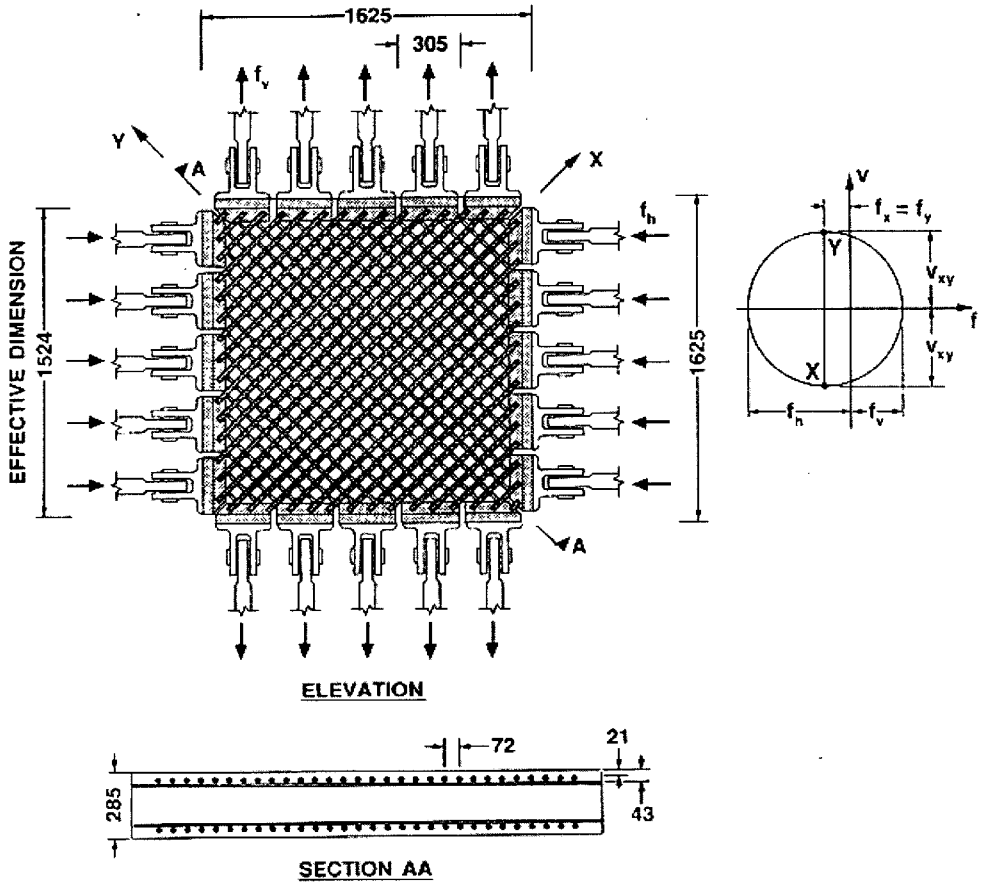


Fig. 13 Reinforcement layout and application of stresses of specimens

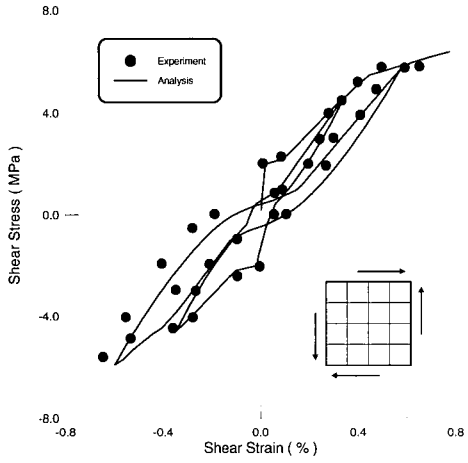


Fig. 14 Response of specimen SE8

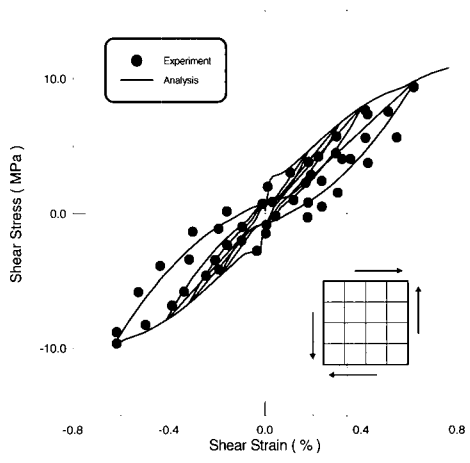


Fig. 15 Response of specimen SE9

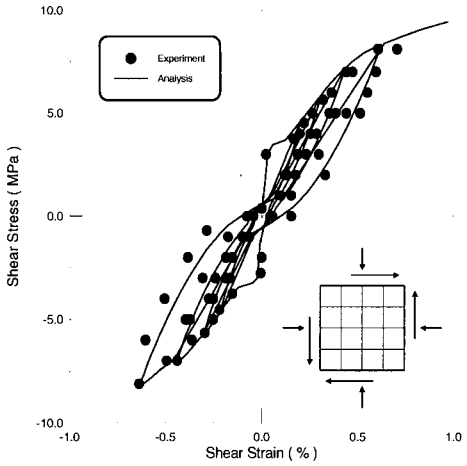


Fig. 16 Response of specimen SE10

5.2 반복횡하중을 받는 요소

반복하중하에서 철근콘크리트 쉘의 거동에 대해서 타당성이 있는가를 확인하기 위해서 슬래브의 중심에 반복횡하중을 받는 두 개의 슬래브로 이루어진 일련의 실험을 해석하였다.[17]

두 개의 슬래브의 치수는 1800×1800mm이며 등방성슬래브(IS1)는 철근비가 x와 y방향으로 같으며 이방성슬래브(IS2)는 x 방향 철근비가 y 방향의 2배이다. 철근은 두 시험체에서 각각 직각방향으로 두층에 배근된다. 같은 방향에서 상단과 하단층에 대한 철근비는 같다. 시험체에서 사용된 철근의 직경은 10mm이며 다른 철근비를 갖기 위해서 철근의 간격을 조정하였다. 시험체의 재료 물성은 Table 2에 나와 있다.

두 개의 슬래브는 1400×1400mm의 윤변에 걸쳐 단순 지지되어 있으며 이 부분만을 해석하였다. 지지점은 25mm의 두께와 100mm의 폭 그리고 40mm 직경의 철근봉으로 된 판으로 구성되며 두 개의 지지판이 국부파괴를 막기 위해 설치되었다. 횡반복하중은 슬래브의 중심에 240mm 직경의 하중판을 통해서 재하되었다.

이 해석에서 시험체는 모든 하중 조건에서 슬래브의 y 방향 대칭성을 이용하여 Fig. 17에서 보여진 6×3 망을 사용하였으며 요소당 6개의 층으로 나누었다.

등방성과 이방성 슬래브의 해석과 실험의 비교가 Fig. 18과 Fig. 19에 나와 있으며 해석으로 등방성과 이방성 슬래브의 하중-처짐 포락곡선을 예측할 수 있었다.

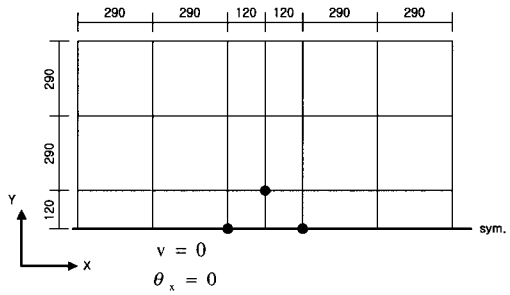


Fig. 17 Element mesh for IS specimens

Table 2 Slab-series test specimens[17]

Specimen	Concrete	Reinforcement						
	f_c(MPa)	x-direction			y-direction			f_y(MPa)
		$\rho_x(\%)^a$	x_1(mm)	x_2(mm)	$\rho_y(\%)^a$	y_1(mm)	y_2(mm)	
IS1	37.0	0.78	25	75	0.78	15	85	380
IS2	37.0	0.78	25	75	0.39	15	85	380

[a] Per layer
x_1 : distance between the center of first re-bar layer in x-direction to the bottom surface of specimen
x_2 : distance between the center of second re-bar layer in x-direction to the bottom surface of specimen
y_1 : distance between the center of first re-bar layer in y-direction to the bottom surface of specimen
y_2 : distance between the center of second re-bar layer in y-direction to the bottom surface of specimen

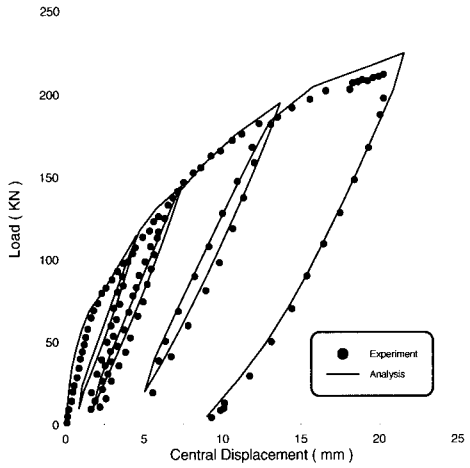


Fig. 18 Response of specimen IS1

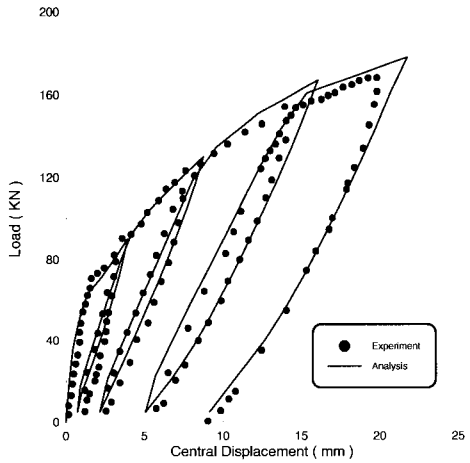


Fig. 19 Response of specimen IS2

6. 결 론

본 논문에서는 재료적 비선형성을 고려하여 반복하중을 받는 철근콘크리트 쉘구조의 해석을 위한 구성모델과 요소를 개발하였다. 콘크리트의 균열은 분산균열모델을 사용하였고 개발된 4절점 평면 쉘요소는 콘크리트와 철근콘크리트 층상화기법을 통해 콘크리트 인장강성, 압축연화와 1차원 응력하에서 철근을 포함한 콘크리트의 구성 모델을 성공적으로 사용할 수 있었다.

반복하중하에서 철근콘크리트 쉘요소의 하중-처짐등과 같은 해석 결과를 실험결과와 비교해 볼 때 잘 일치되는 것을 알 수 있었다.

본 연구에서 얻어진 결론은 다음과 같다.

(1) 재료적 비선형성을 고려하기 위해서 균열발생후의 콘크리트의 인장강성 및 압축강성, 균열면에서의 전단전달강성, 철근의 부착등에 대한 각각의 구성방정식을 조합하여 유한요소해석에 적용함으로써 반복하중과 교번 반복하중을 받는 철근콘크리트 쉘구조의 균열발생에서부터 철근의 항복 및 파괴에 이르는 모든 응력상태에 대한 비선형 거동을 정확하게 해석할 수 있었다.

(2) 층상화기법을 도입함으로써 두께방향에 대한 균열의 진행과 콘크리트 및 철근의 응력을 정확하게 추적할 수 있다.

(3) 본 연구에서는 3차원 beam-column 요소와 조합하여 사용할 수 있도록 일반적인 쉘요소의 자유도에 부재회전 방향의 자유도인 drilling 회전강성도를 도입하였으며 이 요소를 사용함으로써 RC 쉘구조물 뿐만 아니라 슬래브, 전단벽 및 beam-column으로 구성되는 일반적인 구조물의 해석도 가능할 것으로 기대된다.

(4) 본 연구에서는 기하학적 비선형성을 고려하지 못하였으므로 이에 대한 연구는 차후의 연구과제로 다루고자 한다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 지원, 지진공학연구센터(KEERC)의 연구비 지원에 의하여 이루어졌음을 밝히며 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. ASCE, "Finite element analysis of reinforced concrete structures," *Proceedings of the International Workshop*, 1993.

2. Hinton, E. and Owen, D. R. J., *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press Ltd., Swansea, UK, 1984.
3. Polak, M. A. and Vecchio, F. J., "Nonlinear analysis of reinforced concrete shells," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1993, pp. 3439-3462.
4. Zienkiewicz, O. C. and Talyor, R. L., *The Finite Element Method, Vol. 2 - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity*, McGraw Hill Book Co., 4th ed., 1991.
5. Jin, L., "Analysis and Evaluation of a Shell Finite Element with Drilling Degree of Freedom," Masters Thesis, University of Maryland at College Park, 1994.
6. Hughes T. J. R., "On drilling degrees of freedom," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 72, 1989, pp. 105-121.
7. Comite Euro-International Du Beton, "RC elements under cyclic loading," *state of the art report*, CEB, 1996.
8. Gupta, A. K. and Akbar, H., "Cracking in reinforced concrete analysis," *Journal of the Structural Engineering*, ASCE, Vol. 110, No. 8, 1984, pp. 1735-1746.
9. Cervenka, V., "Constitutive model for cracked concrete," *ACI Journal*, Vol. 82, No. 6, 1985, pp. 877-882.
10. 최정호, 김운학, 신현목, "철근 및 프리스트레스트 콘크리트 슬래브의 비선형 해석", 한국콘크리트학회 논문집, 제8권, 6호, 1996. pp. 223-234.
11. Shima, H. and Tamai, S., "Tension stiffness model under reversed loading including post yield range," IABSE Colloquium Delft, 1987, pp. 547-556.
12. Collins, M. P. and Vecchio, F. J., "The Response of Reinforced Concrete to In-plane Shear and Normal Stresses," University of Toronto, 1982.
13. Yoo, Y. H., Kim, W. H., and Shin, H. M., "Material and geometrical nonlinear analysis of reinforced concrete columns under cyclic loading," *Journal of Earthquake Engineering Society of Korea*, Vol. 3, No. 1, 1999, pp. 55-66.
14. Talyor, R. L., *FEAP-A Finite Element Analysis Program, Version 6.3 Users Manual, Volume 1 and Volume 2*, 1998.
15. Spacone, E., Filippou, F. C., and Taucer, F. F., "Fibre beam-column model for nonlinear analysis of R/C frames: Formulation," *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.*, Vol. 25, 1996, pp. 711-725.
16. Steven, N. J., Uzumeri, S. M., and Collins, M. P., "Reinforced concrete subjected to reversed cyclic shear-experiments and constitutive model," *ACI Structural Journal*, 1991, pp. 135-146.
17. Irawan, P. and Maekawa, K., "Path-dependent nonlinear analysis of reinforced concrete shells," *Proceeding of JSCE*, 1997.