

Slope Rotatability Over All Directions and Average Slope Variance in Spherical Surface

Jung-wook Sim¹⁾, Mi-ra Oh²⁾

Abstract

Hader and Park (1978) introduced the idea of slope rotatability, and Park (1987) introduced the concept of slope rotatability over all directions, and gave necessary and sufficient conditions. Park and Kim (1992) proposed a measure that represent the extent of slope rotatability for a given response surface design. Kim (1993) proposed a measure that represent the extent of slope rotatability over all directions. In this paper, we embodied the measure of slope rotatability over all directions. Examples of applying this measure to some response surface designs are also given. In this response surface design of slope rotatability over all directions, we obtain the mean slope variances on the spherical surface to select better experimental design varying the number of center points and radius.

Keywords : slope rotatability, average slope variance, center point, spherical radius.

1. 서론

반응표면분석은 독립변수들과 종속변수간의 함수관계를 데이터로부터 추정하여 독립변수의 변화에 따라서 반응량이 어떻게 달라지는가를 예측하는 것이 중요하다. 그러나 최근에는 반응변수의 값 자체보다는 두 점에서의 반응량의 차이를 추정하는 문제에 관심이 고조되고 있다. 이것은 반응표면의 기울기를 추정하는 문제와 직결되는 것이다. Hader와 Park(1978)은 “축 방향에서의 기울기 회전성(slope rotatability over axial directions)”을 제시했고, Park(1987)이 “모든 방향에서의 기울기 회전성(slope rotatability over all directions)”을 제시한 이래 Ying, Pukelsheim & Draper(1995, 1995a)등에 의하여 이 방면의 연구가 활발히 되어왔다.

본 논문에서는 실험점의 추가에 의해서 모든 방향에서의 기울기 회전성의 측도가 어떻게 변화하는지를 살펴보고, 만약 측도의 값이 같을 경우에는 어떤 실험계획을 쓰는것이 더 효율적인지를 살펴보기 위해서 구면반경과 중심점의 변화에 따른 구면 평균 기울기 분산들을 비교해 보았고, 그런 경우 어떤 실험점을 추가했을 때 더 효율적이면서도 경제적으로 비용이 적게 드는지 알 수

1) Professor, Department of Statistics, Chonnam National University, Kwangju, 500-757, Korea

E-mail : jwsim@chonnam.chonnam.ac.kr

2) Information and Telecommunication Research Institute, Chonnam National University,

Kwangju, 500-757, Korea

있는지를 고려했다.

반응표면 분석기법은 k 개의 독립변수가 종속변수에 영향을 주는 함수적 모형을 규명하는 것이 하나의 과제이며, 일반적으로 독립변수(설명변수) x_1, x_2, \dots, x_k 와 종속변수(반응변수) η 의 관계는 $\eta = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 로 표현된다. 여기서, f 의 명확한 형태는 일반적으로 알려져 있지 않을 뿐만 아니라 일반적인 복잡한 형태를 갖는다. 많은 경우에 흥미영역 안에서는 다음과 같은 2차 다항모형

$$\eta(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} x_i x_j$$

으로 표현할 수 있다. 이 식을 행렬 표현식으로 나타내면

$$\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_s' \boldsymbol{\beta}$$

와 같이 된다. 여기서 $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ 이고 $\mathbf{x}_s' = (1, x_1, x_2, \dots, x_k, x_1^2, \dots, x_k^2, x_1 x_2, \dots, x_{k-1} x_k)$ 는 $1 \times p$ 벡터이고, $\boldsymbol{\beta}$ 는 회귀계수들로 $p \times 1$ 열 벡터이다. 이때 p 는 $(k+1)(k+2)/2$ 이다. 회귀계수들은 반응변수의 관찰치

$$y_i(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x}_i) + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, N$$

로부터 최소제곱법에 의하여 추정될 수 있다. ε_i 들은 평균이 0 이고 일정한 분산 σ^2 을 가지며 서로 상관관계가 없는 랜덤 오차항들이다.

$\boldsymbol{\beta}$ 를 최소제곱법에 의해 추정하면 추정량은

$$\mathbf{b} = (X'X)^{-1} X'y$$

와 같이 표현되며, 여기서 X 는 실험점에 있는 \mathbf{x}_s' 의 p 요소의 값에 대한 $N \times p$ 행렬이고 y 는 $N \times 1$ 행렬이다. $\hat{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_s' \mathbf{b}$ 를 사용한다면 $\hat{y}(\mathbf{x})$ 의 분산은 다음과 같다.

$$\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})] = \sigma^2 \mathbf{x}_s' (X'X)^{-1} \mathbf{x}_s$$

따라서, $\text{Var}[\hat{y}(\mathbf{x})]$ 는 벡터 \mathbf{x}_s 와 행렬 $(X'X)^{-1}$ 에 의존함을 알 수 있다.

본 논문의 2절에서는 모든 방향에서의 기울기 회전성의 정의와 그 성질을 갖기 위한 조건을, 그리고 그에 대한 측도에 관하여 소개하였고, 반응표면계획에서 구면 평균 기울기 분산을 구하는 방법을 소개하였다.

3절에서는 중심점과 구면반경의 변화에 따른 구면 평균 기울기 분산이 어떻게 변하는가를 예를

들어 비교해 보았고, 모든 방향에서의 기울기 회전성의 측도를 예를 들어 구하였으며, 이에 대한 결론을 요약하였다.

2. 기울기 회전성

2.1 모든 방향에서의 기울기 회전성

모든 방향에서의 기울기 회전성을 갖는 실험계획이란 실험계획상의 원점으로부터 같은 거리에 있는 모든 점들에 대하여 평균분산을 일정하게 할 수 있는 실험계획을 말한다.

$\eta(\mathbf{x})$ 의 1차 도함수를 추정해 보자. 이 도함수는 접선의 기울기를 나타낸다. 2차 모형의 경우 x_i 에 대한 $\hat{y}(\mathbf{x})$ 의 1차 도함수는

$$\frac{\partial \hat{y}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = b_i + 2b_{ii}x_i + \sum_{j=1, j \neq i} b_{ij}x_j$$

이며, 이 도함수의 분산은 도함수가 추정되는 점 \mathbf{x} 의 좌표와 실험계획의 함수이다.

$\eta(\mathbf{x})$ 의 1차 도함수(기울기)를 추정하는 데에 반응표면상의 한 점 \mathbf{x} 에서 기울기 벡터를 추정하면

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial \hat{y} / \partial x_1 \\ \partial \hat{y} / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial \hat{y} / \partial x_k \end{bmatrix} = A \mathbf{b}$$

이다. 여기서 $A = [0, I_k, 2diag(x_1, \dots, x_k), A^*]$ 는 각각 독립인 k 개 변수 \mathbf{x}_s' \mathbf{b} 의 미분에서 얻어진 행렬이다.

A^* 의 행렬은 다음과 같다.

$$A^* = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_k & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & \cdots & 0 & x_3 & x_4 & \cdots & x_k & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & x_{k-1} & x_k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & x_{k-2} & 0 & x_k \\ 0 & 0 & \cdots & x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 & x_{k-2} & x_{k-1} \end{pmatrix}$$

$k \times 1$ 벡터의 방향 코사인인 $\mathbf{c}' = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ 이라 할 때, \mathbf{x} 점에서 추정된 도함수는

$\mathbf{c}' \mathbf{g}(\mathbf{x})$ 이고, $\sum_{i=1}^k c_i^2 = 1$ 이다. 여기에서 기울기의 분산은

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \text{var}[\mathbf{c}' \mathbf{g}(\mathbf{x})] \\ &= \mathbf{c}' \mathbf{A} \text{var}(\mathbf{b}) \mathbf{A}' \mathbf{c} \\ &= \sigma^2 \mathbf{c}' \mathbf{A} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{c} \end{aligned}$$

이 되고, 모든 가능한 방향에서의 $V(\mathbf{x})$ 의 평균값 즉, 기울기 분산 평균은

$$\bar{V}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2}{k} \text{tr}[\mathbf{A} (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}']$$

이 된다.

Park (1987)은 모든 방향에 걸친 기울기 회전성을 갖기 위한 필요충분조건이 다음과 같다는 것을 보였다.

(1) 모든 i 에 대하여

$$2 \text{cov}(b_i, b_{ii}) + \sum_{j=1, j \neq i}^k \text{cov}(b_j, b_{ij}) = 0$$

(2) $i \neq j$ 인 모든 (i, j) 에 대하여

$$2[\text{cov}(b_{ii}, b_{ij}) + \text{cov}(b_{jj}, b_{ij})] + \sum_{l=1, l \neq i, j}^k \text{cov}(b_{il}, b_{jl}) = 0$$

(3) 모든 i 에 대하여

$$4 \text{var}(b_{ii}) + \sum_{j=1, j \neq i}^k \text{var}(b_{ij})$$

는 같은 값을 갖는다.

위의 필요충분조건이 만족되면 모든 방향에서의 기울기 회전성을 완전히 갖게되지만, 위의 조건이 만족되지 않는 경우에 모든 방향에서의 기울기 회전성은 어느 정도나 이탈되는가 하는 측도를 구하는 것은 흥미있는 일이다. 이제 그 측도를 구하는 문제에 관하여 알아보자.

2.2 모든 방향에서의 기울기 회전성 측도

반응표면의 한 점 \mathbf{x} 에서 임의의 방향으로 그은 접선의 기울기 분산은 접점 \mathbf{x} 의 좌표와 접선의 방향 및 실험계획의 함수이다. 만약 모든 가능한 방향에서의 기울기의 분산을 평균한 값을 생각한다면 이 평균 분산은 접점 \mathbf{x} 의 좌표와 실험계획만의 함수가 된다. 이 평균을 $\bar{V}(\mathbf{x})$ 라 하면 $\bar{V}(\mathbf{x})$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\bar{V}(\mathbf{x}) &= \frac{\sigma^2}{k} \operatorname{tr} [\mathbf{A} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}'] \\ &= a + \sum_{i=1}^k c_i x_i + \sum_{i < j}^k d_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k f_i x_i^2\end{aligned}\quad (2.1)$$

여기서

$$\begin{aligned}v_i &= \operatorname{Var}(b_i) \\ a &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i \\ c_{i,ii} &= \operatorname{Cov}(b_i, b_{ii}) \\ c_i &= \frac{2}{k} \left(2c_{i,ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^k c_{j,ij} \right) \\ d_{ij} &= \frac{4}{k} \left(2c_{ii,ij} + 2c_{jj,ij} + \sum_{l=1, l \neq i, j}^k c_{il,jl} \right) \\ f_i &= \frac{1}{k} \left(4v_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^k v_{ij} \right)\end{aligned}\quad (2.2)$$

이다.

Kim (1993)은 주어진 임의의 실험계획에서, 모든 방향에서의 기울기 회전성의 정도를 나타내주는 측도를 제시하였는데 그 측도 $S_k(D)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}S_k(D) &= \frac{1}{\sigma^4} \left\{ (k+4) \sum_{i=1}^k c_i^2 + \sum_{i < j}^k d_{ij}^2 + \frac{2(k-1)}{k} \left(\sum_{i=1}^k f_i \right)^2 - 4 \sum_{i < j}^k f_i f_j \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma^4} \left[(k+4) \sum_{i=1}^k c_i^2 + \sum_{i < j}^k d_{ij}^2 + \frac{2}{k} \left\{ (k-1) \sum_{i=1}^k f_i^2 - 2 \sum_{i < j}^k f_i f_j \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^4} \left\{ (k+4) \sum_{i=1}^k c_i^2 + \sum_{i < j}^k d_{ij}^2 + \frac{2}{k} \sum_{i < j}^k (f_i - f_j)^2 \right\}\end{aligned}\quad (2.3)$$

주어진 실험계획 D 가 모든 방향에 대해서 기울기 회전계획인 경우에 측도 $S_k(D)$ 는 0의 값을 취하며, D 가 모든 방향에 대해서 기울기 회전계획에서 멀어질수록 $S_k(D)$ 는 큰 값을 갖는다.

$S_k(D)$ 의 큰 장점중의 하나는, 이 측도가 대칭·비대칭을 막론하고, 어떠한 형태로 배치되어 있는 실험점들에 대해서도 계산될 수 있다는 점이다. 다시 말하면 $S_k(D)$ 는 어떠한 종류의 실험계획에도 적용될 수 있다.

$S_k(D)$ 가 가지고 있는 문제점 중 한 가지는 상한선이 없기 때문에 이러한 문제점을 다소 해결하기 위한 방법으로 측도를

$$H_k(D) = \frac{1}{1 + S_k(D)}\quad (2.4)$$

로 정해주는 방법이 있다. 이렇게 해주면 $H_k(D)$ 는 0과 1사이의 값을 갖게 된다. D 가 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획일 때 $H_k(D)$ 는 1이 되며, D 가 모든 방향에 걸친 기울기 회전계획으로부터 멀어질수록 $H_k(D)$ 는 0에 가까운 값을 갖는다.

2.3 구면 평균 기울기 분산

반응표면계획에서 접선 기울기의 평균분산 예측량의 그래프적 접근은 Jang과 Park(1993)에 의하여 소개되었다. 구면 분산은 구면의 반경과 구면의 위치에 따른 분산으로 추정될 수 있다. 구면 평균 기울기 분산 $\bar{V}(r)$ 은 구면의 반경 r 의 표면을 통해서 추정될 수 있다. 구면 평균 기울기 분산의 양은 다음과 같다.

$$\bar{V}(r) = \frac{\phi}{\sigma^2} \int_{U_r} \bar{V}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

여기서 $U_r = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^k x_i^2 = r^2 \right\}$ 이고, $\phi^{-1} = \int_{U_r} d\mathbf{x}$ 는 U_r 의 표면 영역이다.

구면 평균 기울기 분산 $\bar{V}(r)$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{V}(r) &= \frac{\phi}{\sigma^2} \int_{U_r} \frac{\sigma^2}{k} \text{tr}[A(X'X)^{-1}A'] d\mathbf{x} \\ &= \frac{\phi}{k} \text{tr} \left[\int_{U_r} A'A(X'X)^{-1} d\mathbf{x} \right] \\ &= \frac{1}{k} \text{tr}[S(X'X)^{-1}] \end{aligned}$$

여기서 $S = \phi \int_{U_r} A'A d\mathbf{x}$ 는 구면 영역 적분 행렬이다.

3. 예제 및 결과

여기에서는 모든 방향에서의 기울기 회전성의 측도를 $k=2$ 인 경우와 $k=4$ 인 경우에 대하여 알아보기로 한다.

예제 1) 먼저 $k=2$ 인 경우를 살펴보자.

두 개의 실험계획을 예로 들어보면 다음과 같다.

$$D_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -2.5 & 0 \\ 2.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -3.35 & 0 \\ 3.35 & 0 \\ 0 & -3.35 \\ 0 & 3.35 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

예제를 여기에 적용하면 변수가 2개이므로

$$(X'X)^{-1}\sigma^2 = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 & c_{0,11} & c_{0,22} & c_{0,12} \\ 0 & v_1 & c_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,1} & v_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11,0} & 0 & 0 & v_{11} & c_{11,22} & c_{11,12} \\ c_{22,0} & 0 & 0 & c_{22,11} & v_{22} & c_{22,12} \\ c_{12,0} & 0 & 0 & c_{12,11} & c_{12,22} & v_{12} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

이 된다.

(2.2)식에서 $k=2$ 이므로 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} c_1 &= 2c_{1,11} + c_{2,12} \\ c_2 &= 2c_{2,22} + c_{1,12} \\ d_{12} &= 4(c_{11,12} + c_{22,12}) \\ f_1 &= \frac{1}{2}(4v_{11} + v_{12}) \\ f_2 &= \frac{1}{2}(4v_{22} + v_{12}) \\ S_2(D) &= \frac{1}{\sigma^4} \{6(c_1^2 + c_2^2) + d_{12}^2 + (f_1 - f_2)^2\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

이 경우 D_1 의 $(X'X)^{-1}$ 는

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.16 & -0.10 & -0.16 \\ 0 & 0.07 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ -0.16 & 0 & 0 & 0.04 & 0.03 & 0.01 \\ -0.16 & 0 & 0 & 0.03 & 0.04 & -0.01 \\ -0.10 & 0 & 0 & 0.01 & -0.01 & 0.19 \end{pmatrix}$$

이 되며 $c_1 = c_2 = d_{12} = 0$, $f_1 = 0.17\sigma^2$, $f_2 = 0.17\sigma^2$ 이 된다. 이 계획에 대한 모든 방향에서의 기울기 회전성의 측도는 $S_2(D) = 0$ 의 값을 가지며, $H_2(D) = 1$ 을 가진다. 그러므로 모든 방향에서의 기울기의 회전성이 만족된다.

또한 D_2 의 $(X'X)^{-1}$ 는

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.09 & -0.09 & -0.28 \\ 0 & 0.03 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0.03 & 0 & 0 & 0 \\ -0.09 & 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.02 \\ -0.09 & 0 & 0 & 0.01 & 0.01 & 0.02 \\ -0.28 & 0 & 0 & 0.02 & 0.02 & 0.15 \end{pmatrix}$$

이 되며 $c_1 = c_2 = 0$, $d_{12} = 0.16\sigma^2$, $f_1 = 0.10\sigma^2$, $f_2 = 0.10\sigma^2$ 이 된다. 이 계획에 대한 모든 방

항에서의 기울기 회전성의 측도는 $S_2(D)=0.02$ 의 값을 가지며, $H_2(D)=0.98$ 을 가진다.

위에서 두 개의 실험계획은 회전성의 측도가 $H_2(D)$ 가 크게 차이가 나지 않는다. 그러나 이와 같이 기울기의 회전성의 측도의 차이가 나지 않을때는 어떤 실험계획을 선택하는 것이 더 좋은지를 알아보기 위해서 구면 평균 기울기 분산을 구해보기로 하자. 위에서 정의한 A 는

$$A = [0, I_2, 2diag(x_1, x_2), A^*]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

과 같이 됨을 알 수 있다.

구면 영역 적률 행렬 S 와 구면 평균 기울기 분산 $\bar{V}(r)$ 을 구해보자.

$$A' A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2x_2 & x_1 \\ 0 & 2x_1 & 0 & 4x_1^2 & 0 & 2x_1x_2 \\ 0 & 0 & 2x_2 & 0 & 4x_2^2 & 2x_1x_2 \\ 0 & x_2 & x_1 & 2x_1x_2 & 2x_1x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

이 되고, 구면 영역 적률 행렬 S 는 다음과 같이 된다.

$$S = \phi \int_{U_r} A' A d \mathbf{x}$$

$$= diag(0, 1, 1, 4\sigma_2, 4\sigma_2, 2\sigma_2)$$

여기서 $\sigma_2 = \frac{r^2}{2}$ 이다. $X'X$ 의 역행렬을

$$(X'X)^{-1} = (c^{ij}) \quad (i=0, 1, \dots, 5; j=0, 1, \dots, 5)$$

로 놓으면,

$$\bar{V}(r) = \frac{1}{2} tr[S(X'X)^{-1}]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (c^{11} + c^{22}) + \frac{r^2}{2} [4(c^{33} + c^{44}) + 2c^{55}] \right\}$$

와 같이 된다.

구면 평균 기울기 분산을 설명하기 위해서 표1과 표2, 그림 1과 그림 2를 비교해보자. 표1과 표2는 가중치를 실험수만큼 집어넣어 구한 값이다. 그림 1과 그림 2는 n_0 (중심점의 수)가 변화할 때 반경 r 을 0에서 2까지 변화를 주면 구면 평균 기울기 분산이 어떻게 변화하는지를 나타내고 있다. 그림 1은 불균형 자료인데 $n_0=3$ 일 때 반경이 커짐에 따라 구면 평균 기울기 분산이 가장 작아지고, 반경이 작으면 $n_0=1$ 일 때 가장 작은 구면 평균 기울기 분산을 가진다. 그러므

로 반경이 작을 때는 $n_0=1$ 일 때, 반경이 클 때는 $n_0=3$ 을 적용시키면 좋은 결과를 가져올 수 있다고 말할 수 있다. 그리고 그림 2는 반경이 $r>0.5$ 이면 $n_0=3$ 일 때 가장 작은 구면 평균 기울기 분산을 가지고, $r<0.5$ 면 $n_0=1$ 일 때 가장 작은 구면 평균 기울기 분산을 가진다. 그러므로 반경이 클 때는 중심점의 수가 3이나 5인 경우를 쓰고 반경이 작을 때는 중심점의 수가 1인 경우를 쓰면 효율적이다.

표 1. D_1 자료의 구면 평균 기울기 분산

$r \backslash n_0$	1	3	5	7	10
0.0	0.4354	0.5598	0.6842	0.8086	0.9952
0.5	0.7373	0.8510	1.0271	1.2061	1.4768
1.0	1.6429	1.7244	2.0559	2.3985	2.9216
1.5	3.1523	3.1802	3.7705	4.3859	5.3296
2.0	5.2654	5.2182	6.1710	7.1682	8.7008

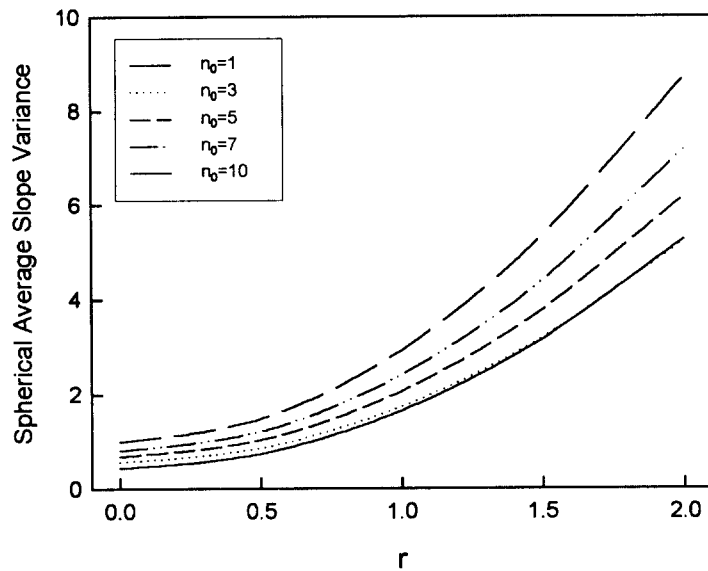


그림 1. D_1 자료의 구면 평균 기울기 분산

표 2. D_2 자료의 구면 평균 기울기 분산

$r \backslash n_0$	1	3	5	7	10
0.0	0.2952	0.3608	0.4264	0.4920	0.5904
0.5	0.5186	0.5346	0.6084	0.6904	0.8181
1.0	1.1898	1.0560	1.1544	1.2855	1.5012
1.5	2.3081	1.9250	2.0644	2.2774	2.6397
2.0	3.8736	3.1416	3.3384	3.6660	4.2336

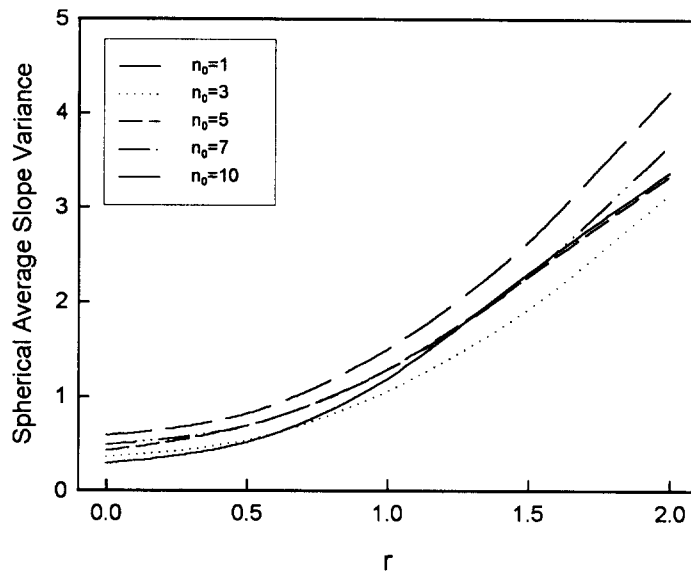


그림 2. D_2 자료의 구면 평균 기울기 분산

예제 2) $k=4$ 인 경우에 모든 방향에서의 기울기 회전성 측도를 생각해 보자. 여기에서는 Roquemore, K. G. (1976)의 디자인 416A, 416B, 416C를 적용해 보았다.

$$D_{416A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1.7844 \\ 0 & 0 & 0 & -1.4945 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0.6444 \\ \pm 1.6853 & 0 & 0 & -0.9075 \\ 0 & \pm 1.6853 & 0 & -0.9075 \\ 0 & 0 & \pm 1.6853 & -0.9075 \end{pmatrix}$$

$$D_{416B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.7658 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0.5675 \\ \pm 1.4697 & 0 & 0 & -1.0509 \\ 0 & \pm 1.4697 & 0 & -1.0509 \\ 0 & 0 & \pm 1.4697 & -1.0509 \end{pmatrix}$$

$$D_{416C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.7317 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2692 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0.6045 \\ \pm 1.5177 & 0 & 0 & -1.0498 \\ 0 & \pm 1.5177 & 0 & -1.0498 \\ 0 & 0 & \pm 1.5177 & -1.0498 \end{pmatrix}$$

416A는 $S_4(D) = 0.3960$ 이고, $H_4(D) = 0.7163$ 인데 여기에 중심점을 1개씩 추가해 나가면 기울기 회전성에 아주 가깝게 접근하게 된다. 그리고 416B와 416C는 기울기 회전성이 있다.

표 3. $k=4$ 인 경우 모든 방향에서의 기울기 회전성 측도

전체실험수	측 도	416A	416B	416C
N=16	$S_4(D)$	0.3960	0.0016	0
	$H_4(D)$	0.7163	0.9984	1
N=17	$S_4(D)$	0.0045	0.0006	
	$H_4(D)$	0.9955	0.9994	
N=18	$S_4(D)$	0.0017	0	
	$H_4(D)$	0.9983	1	

이런 예제를 통해서 우리는 어떤 실험계획을 써야 더 효율적이고 경제적으로 더 유리한지를 살펴볼 수 있다. 즉, 예제 1과 같은 경우 불균형 자료에서는 $r < 1.5$ 일 때 $n_0 = 1$ 이 더 양호하고, $r > 1.5$ 일 때 $n_0 = 3$ 이 더 양호한 반면에, 균형자료에서는 대체적으로 $n_0 = 3$ 이 더 양호함을 알 수 있다. 예제 2의 416A에서 $N=16$ 과 $N=17$ 을 비교하여 알 수 있는바와 같이, 중심점이 실험의 결과에 크게 작용함을 알 수 있다. 그러나 $N=17$ 과 $N=18$ 은 큰 차이가 없으므로 경계를 고려할 때 $N=17$ 인 경우가 양호한 실험계획임을 알 수 있다.

참고문헌

- [1]. Hader, R. J., and Park, S. H. (1978), Slope-Rotatable Central Composite Designs, *Technometrics*, 20, 413-417.
- [2]. Jang, D. H & Park, S. H. (1993), A measure and a graphical method for evaluating slope rotatability in response surface designs, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 22, 1849-1863.
- [3]. Kim, H. J. (1993), A measure of slope rotatability over all directions, *The Korean Journal of Applied Statistics*, 6, 105-123.
- [4]. Park, S. H. (1987), A class of multifactor designs for estimating the slope of response surfaces, *Technometrics*, 29, 449-453.
- [5]. Park, S. H. & Kim, H. J. (1992), A measure of slope-rotatability for second order response surface experimental designs, *Journal of Applied Statistics*, 19, 391-404.
- [6]. Roquemore, K. G. (1976), Hybrid Designs for Quadratic Response Surfaces, *Technometrics*, 18, 419-423.
- [7]. Ying, L. H., Pukelsheim, F. & Draper, N. R. (1995), Slope rotatable over all directions designs, *Journal of Applied Statistics*, 22, 331-341.
- [8]. Ying, L. H., Pukelsheim, F. & Draper, N. R. (1995a), Slope rotatable over all directions designs for $k \geq 4$, *Journal of Applied Statistics*, 22, 343-354.