

## 제2종 중단모형에서 FRACTIONAL BAYES FACTOR를 이용한 신뢰수명 모형들에 대한 베이지안 모형선택

강상길<sup>1)</sup> 김달호<sup>2)</sup> 이우동<sup>3)</sup>

### 요약

이 논문에서는 신뢰수명자료의 분석에 많이 사용되는 지수분포, 와이블분포, 로그정규분포에 대해, 현재의 자료가 어느 분포에 가장 적합한가를 알아보기 위한 베이지안 모형 선택방법을 제안한다. 일반적으로, 모수에 대한 사전분포가 부적절 분포인 경우, 베이즈 요인 (Bayes factor)은 미지의 상수를 포함한다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 O'Hagan (1995)에 의해 제안된 fractional Bayes factor를 이용하여 자료를 가장 적합시키는 모형을 찾는다. 특히, 제2종 중도절단자료가 주어진 경우, 이 자료를 이용한 베이지안 모형선택에 대한 연구는 거의 이루어진 바가 없다. 실제 자료와 인위적인 자료를 이용하여 로그정규분포, 지수분포, 와이블모형중 어느 모형에 가장 잘 적합한지를 검증하는 예를 보인다.

주요용어: Fractional Bayes Factor, 베이지안 모형선택, 제2종 중단모형.

### 1. 서론

베이지안 가설검정 (Bayesian hypothesis testing)이나 모형선택문제 (model selection problem)에서는 가설에 대한 비교를 위해 베이즈 요인 (Bayes factor)의 계산이 이루어져야 한다. 베이즈 접근법에서 모수에 대한 사전분포 (prior distribution)가 필수적인데, 사전분포로는 흔히 무정보적 (noninformative) 분포를 가정하는 경우가 많다. 그런데 무정보적 분포는 부적절분포 (improper distribution)가 되는 경우가 많으며, 이러한 경우에, 베이즈 요인은 미지의 상수 (undetermined constants)를 포함한다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 몇가지의 방법이 제안되었다.

최근 Berger와 Pericchi (1996)는 intrinsic Bayes factor (IBF)를 정의하고 IBF가 가설검정이나 모형선택문제에 유용함을 밝혔다. 그들은 minimal training sample 을 이용하여 미지의 상수를 상쇄시키는 접근법을 이용하였다. 그러나 그들이 제안한 IBF는 소표본인 경우와, non-nested 인 경우에는 안정적 (stable) 이지 못하고, 적용하기가 어렵다. 또한 계산

1) (702-701) 대구광역시 북구 산격동 1370번지, 경북대학교 자연과학대학 통계학과, 시간강사

E-mail: sangkg@hanmail.net

2) (702-701) 대구광역시 북구 산격동 1370번지, 경북대학교 자연과학대학 통계학과, 조교수

E-mail: dalkim@kyungpook.ac.kr

3) (712-240) 경북 경산시 심촌동 산 75번지, 경산대학교 정보과학부, 조교수

E-mail: wdlee@kyungsan.ac.kr

량도 많은 결점이 있다. 그래서, Berger와 Pericchi (1998)는 non-nested 모형이나, 소표본에서도 잘 적용되는 Median IBF (MIBF)를 제안하였다.

한편, O'Hagan (1995)이 제안한 fractional Bayes factor (FBF)는 IBF에 비해 계산량도 적고, non-nested 모형인 경우에도 쉽게 이용할 수 있는 장점이 있다. 또, IBF의 경우에 non-nested 인 두 모형  $M_1$ 과  $M_2$ 에 대한 arithmetic IBF (AIBF)를 구할 때,  $M_1$ 의  $M_2$ 에 대한 AIBF와  $M_2$ 의  $M_1$ 에 대한 AIBF의 값이 역수의 관계가 성립하지 않는다. 이는 AIBF의 정의에 의해 명확하다. 그러나 FBF인 경우에는 역수의 관계가 성립하여 이러한 문제점은 없다.

수명과 관련한 실험에서 중도절단된 자료가 관측되는 경우가 많다. 주어진 부품에 대한 수명을 마지막까지 관측하는 것이 시간과 경비의 문제로 불가능하거나 불필요한 경우가 있다. 특히, 특정한 수의 부품 수명을 관찰한 후, 실험을 중지하는 경우를 제2종중단 모형 (type II-censored model)이라고 부른다. 제2종중단 모형에서 관측된 자료를 이용하여 베이저안 모형선택문제를 다룬 연구는 IBF를 이용한 것으로 Kim, Lee와 Kang (1999)에 의해 처음 시도 되었다.

이 논문에서는 FBF를 이용하여, 제 2종 중단표본에 대한 베이저안 모형선택문제를 다룬다. 2절에서는 사전분포가 무정보적 분포인 경우, 베이지요인에 대한 문제점을 살펴보고, 3절에서는 지수분포, 로그정규분포, 와이블분포에 대한 FBF를 유도하고, 4절에서는 3절에서 제안된 방법을 이용하여, 실제의 자료에 대해 모형선택을 하는 예제를 소개한다.

## 2. FRACTIONAL BAYES FACTOR에 대한 소개

현재 고려중인 개의 모형을  $M_1, M_2, \dots, M_q$ 라 두자. 그리고  $i = 1, 2, \dots, q$ 에 대해,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 이 모형  $M_i$  (확률밀도함수  $f_i(x|\theta_i)$ 를 가지는 분포)로부터 추출된 확률표본의 관찰값이라고 가정하자. 모형  $M_i$ 하에서의 모수  $\theta_i$ 에 대한 사전분포를  $\pi_i(\theta_i)$ 라고 가정하자.  $p_i$ 를 모형  $M_i$ 가 사실 (true)일 사전확률 (prior probability)이라고 두자. 그러면 모형  $M_i$ 가 사실일 사후확률 (posterior probability)은 다음과 같다.

$$P\{M_i|\underline{x}\} = \left( \sum_{j=1}^q \frac{p_j}{p_i} B_{ji} \right)^{-1}, \quad (2.1)$$

여기서  $B_{ji}$ 는 모형  $M_j$ 의 모형  $M_i$ 에 대한 베이지 요인이며, 아래와 같이 정의된다.

$$B_{ji} = \frac{m_j(\underline{x})}{m_i(\underline{x})} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_j(\underline{x}|\theta_j)\pi_j(\theta_j)d\theta_j}{\int_{-\infty}^{\infty} f_i(\underline{x}|\theta_i)\pi_i(\theta_i)d\theta_i}. \quad (2.2)$$

위에 정의된 베이지 요인은 모형  $M_j$ 의 모형  $M_i$ 에 대한 모수에 대한 사전정보로 가중된 우도비 (weighted likelihood ratio)이며, 자료  $\underline{x}$ 가 모형  $M_i$ 와  $M_j$ 중 어느 모형에 더 적합함을 나타낸다. 만약 자료  $\underline{x}$ 가 모형  $M_i$ 에 더 적합하다면,  $B_{ji} < 1$ 이 되며,  $B_{ji} > 1$ 이면, 자료  $\underline{x}$ 는 모형에  $M_j$ 더 적합함을 나타낸다.  $\theta_i$ 에 대한 사전분포가 부적절 분포라면,

$$\begin{aligned} \pi_i(\theta_i) &\propto h_i(\theta_i) \\ &= c_i h_i(\theta_i) \end{aligned}$$

로 표현되고, 여기서  $h_i$ 는  $\theta_i$ 의 공간상에서 적분은 발산할 가능성이 있다. 그러므로 정규화 상수 (normalizing constant)  $c_i$ 는 유한 (finite)한 값이 아닐 수 있다. 그러나  $c_i$ 로 표현하자. 그러면, 식 (2.2)는

$$B_{ji} = \frac{c_j \int_{-\infty}^{\infty} f_j(\underline{x}|\theta_j) h_j(\theta_j) d\theta_j}{c_i \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\underline{x}|\theta_i) h_i(\theta_i) d\theta_i} \quad (2.3)$$

이며, 여기에서  $c_j$ 와  $c_i$ 는 두 개의 미지의 정규화 상수이다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여, 시험표본 (training sample)을 이용하는 방법이 제안되었다. 주어진 자료  $\underline{x}$ 를 시험표본으로 이용할 부분과 그렇지 아니한 두 부분으로 나눈다. 즉,  $\underline{x} = (\underline{y}, \underline{z})$ . 그리고, 시험표본  $\underline{y}$ 는 베이즈 정리를 이용하여

$$\pi_i(\theta_i|\underline{y}) = \frac{\pi_i(\theta_i) f_i(\underline{y}|\theta_i)}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\theta_i) f_i(\underline{y}|\theta_i) d\theta_i} \quad (2.4)$$

를 구한다. 식 (2.4)를  $\theta_i$ 에 대한 사전분포로 생각하여, 남은 자료  $\underline{z}$ 를 이용하여 베이즈 요인 (2.2)를 계산한다면,

$$B_{ji}(\underline{z}|\underline{y}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_j(\underline{z}|\theta_j, \underline{y}) \pi_j(\theta_j|\underline{y}) d\theta_j}{\int_{-\infty}^{\infty} f_i(\underline{z}|\theta_i, \underline{y}) \pi_i(\theta_i|\underline{y}) d\theta_i} \quad (2.5)$$

이된다. 식 (2.5)에는 식 (2.3)과 같은 미지의 상수를 포함하지 않는다. 왜냐하면, 식 (2.5)의 분모를 고려해 보자. 만약,  $\theta_i$ 에 대한 사전분포를  $c_i h_i(\theta_i)$ 라 두면( $c_i$ 는 미지의 상수),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\theta_i|\underline{y}) f_i(\underline{z}|\theta_i) d\theta_i &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_i h_i(\theta_i) f_i(\underline{y}|\theta_i)}{\int_{-\infty}^{\infty} c_i h_i(\theta_i) f_i(\underline{y}|\theta_i) d\theta_i} f_i(\underline{z}|\theta_i, \underline{y}) d\theta_i \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h_i(\theta_i) f_i(\underline{x}|\theta_i) d\theta_i}{\int_{-\infty}^{\infty} h_i(\theta_i) f_i(\underline{y}|\theta_i) d\theta_i} \end{aligned}$$

가 되어 미지의 상수는 서로 상쇄되어 나타나지 않는다. 그리고 식 (2.5)를 부분 베이즈요인 (partial Bayes factor)이라 부른다. 그러나 부분 베이즈요인을 계산하기 위해서는 어떻게 시험표본을 선택하느냐에 따라 결과는 달라진다. 이러한 문제점을 개선하기 위하여, Berger와 Pericchi (1996)는 모든 가능한 시험표본에 대한 부분 베이즈 요인을 계산한 후, 이를 평균하는 방법을 제안하고, 그것을 intrinsic Bayes factor (IBF)라고 불렀다. 그러나 IBF는 non-nested 모형인 경우, 안정성 (stability)에 문제가 있음을 지적하였다.

한편, O'Hagan (1995)은 아래와 같은 FBF를 제안하였다. 먼저,  $b = m/n, m \leq n$ 이라 두자. 그리고,  $M_1$ 의  $M_2$ 에 대한 FBF를

$$B_b(\underline{x}) = \frac{q_1(b, \underline{x})}{q_2(b, \underline{x})}, \quad (2.6)$$

여기에서  $i = 1, 2$ 에 대하여,

$$q_i(b, \underline{x}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\theta_i) f_i(\underline{x}|\theta_i) d\theta_i}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi_i(\theta_i) f_i(\underline{x}|\theta_i)^b d\theta_i} \quad (2.7)$$

이고, 식 (2.6),(2.7)에 포함되어 있는 상수  $b$ 의 선택은 다음의 세가지방법을 제시하였다.  $m$ 을 Berger와 Pericchi (1996)가 정의한 minimal training sample 의 수라 한다면,

- (1)  $b = m/n$ ,
- (2)  $b = n^{-1} \max\{m, \sqrt{n}\}$ ,
- (3)  $b = n^{-1} \max\{m, \log n\}$

으로 제안하였다. (1)은 사전분포의 불명확성에 대한 로버스트성 (robustness)에 특별히 관심이 없을 때 사용하고, (2)는 로버스트성이 관심이 있는 경우에 사용하며, (3)은 (1)과 (2)의 중간적 입장에서 사용 할 것을 제시하였다.

위의 방법을 적용한다면,  $\theta_i$ 에 대한 사전분포가 임의의  $c_i h_i(\theta_i)$  형태를 가지는 부적절 분포가 되더라도, 미지의 상수는 서로 상쇄되어 나타나지 않는다. 이제 식 (2.6)과 식 (2.7)을 이용하여 주어진 자료가 제 2종 중단 표본인 경우 어느 수명분포에 가장 잘 적합하는 지를 알아보는 통계적 절차를 소개하고자 한다.

### 3. 지수분포, 로그정규분포, 와이블분포에 대한 FBF

주어진 자료에 대한 신뢰수명모형을 선택하기 위하여  $M_1$  (지수분포),  $M_2$  (로그정규분포),  $M_3$  (와이블분포)를 고려해 보자. 이 모형들은 신뢰수명모형의 연구에서 가장 많이 사용되어지는 분포들이다. 물론, 이 분포모형 이외에도 다른 모형들도 고려가 가능하다.

지수분포는 수학적 계산의 용이성과 모형의 단순성 등의 이유로 수명모형 중 가장 응용 범위가 넓은 분포중 하나이다. 모수  $\theta$ 를 가지는 지수분포의 확률밀도함수 (pdf)는

$$f_1(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\{-\frac{1}{\theta}x\}, \quad 0 < \theta < \infty, 0 < x < \infty \quad (3.1)$$

이다. 지수 분포의 모수  $\theta$ 에 대한 사전분포로 가장 널리 사용되는 무정보적 사전분포는

$$\pi_1(\theta) \propto \frac{1}{\theta}, \quad 0 < \theta < \infty$$

이다. 자료  $\underline{x} = (x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(r)}), r \leq n$ 가 확률밀도함수 (3.1)를 가지는 분포로부터의 순서화된 제2종 중단표본이라면, 모수에 대한 우도함수는

$$L_1(\theta|\underline{x}) = \theta^{-r} \exp\{-\frac{1}{\theta}(\sum_{i=1}^r x_{(i)} + (n-r)x_{(r)})\}$$

이다. 그러므로,

$$q_1(b, \underline{x}) = \frac{\Gamma(r)b^{br}T_r^{r(b-1)}}{\Gamma(rb)}, \quad (3.2)$$

여기에서  $T_r = \sum_{i=1}^r x_{(i)} + (n-r)x_{(r)}$ 이다.

모수  $\mu$ 와  $\sigma$ 를 갖는 모형  $M_2$ 에 대한 확률밀도함수는

$$f_2(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right\}, \quad 0 < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma < \infty \quad (3.3)$$

이며, 모수들에 대한 사전분포로 무정보적 분포인

$$\pi_2(\mu, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma}, \quad -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma < \infty$$

를 가정하자. 그러면, (3.3)으로부터

$$q_2(b, \underline{x}) = \frac{(2\pi)^{-\frac{r}{2}} \prod_{i=1}^r x_{(i)}^{-1} A_1}{(2\pi)^{-\frac{br}{2}} \prod_{i=1}^r x_{(i)}^{-b} A_2}, \quad (3.4)$$

여기에서

$$A_1 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sigma^{-r-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^r (\log x_{(i)} - \mu)^2\right] \left[1 - \Phi\left(\frac{\log x_{(r)} - \mu}{\sigma}\right)\right]^{(n-r)} d\mu d\sigma$$

이고

$$A_2 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sigma^{-br-1} \exp\left[-\frac{b}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^r (\log x_{(i)} - \mu)^2\right] \left[1 - \Phi\left(\frac{\log x_{(r)} - \mu}{\sigma}\right)\right]^{b(n-r)} d\mu d\sigma$$

이다.

모수  $\beta$ 와  $\gamma$ 를 갖는 와이불분포의 확률밀도함수는

$$f_3(x|\beta, \gamma) = \beta x^{\beta-1} \gamma^{-\beta} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\beta\right\}, \quad 0 < x < \infty, 0 < \beta, \gamma < \infty \quad (3.5)$$

이다. 와이불분포에 대한 reference 사전분포는

$$\pi_3(\beta, \gamma) \propto \frac{1}{\beta\gamma}, \quad 0 < \beta, \gamma < \infty$$

이다. 그러면,

$$q_3(b, \underline{x}) = \frac{\Gamma(r) \prod_{i=1}^r x_{(i)}^b B_1}{b^{-br} \Gamma(br) \prod_{i=1}^r x_{(i)} B_2}, \quad (3.6)$$

여기서

$$B_1 = \int_0^\infty \beta^{r-2} \frac{\prod_{i=1}^r x_{(i)}^\beta}{(\sum_{i=1}^r x_{(i)}^\beta + (n-r)x_{(r)}^\beta)^r} d\beta$$

이며

$$B_2 = \int_0^{\infty} \beta^{rb-2} \frac{\prod_{i=1}^r x_{(i)}^{b\beta}}{(\sum_{i=1}^r x_{(i)}^{\beta} + (n-r)x_{(r)}^{\beta})^{rb}} d\beta$$

이다.

식 (3.2),(3.4),(3.6)을 이용하여 모형선택을 위한 FBF를 계산한다. 각각의 모형  $M_1, M_2, M_3$ 에 대한 FBF는 다음과 같다.  $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ 에 대해서

$$B_{ij}(b, \underline{x}) = \frac{q_i(b, \underline{x})}{q_j(b, \underline{x})}, \quad B_{ji}(b, \underline{x}) = \frac{1}{B_{ij}(b, \underline{x})}. \quad (3.7)$$

위에서 제안된 FBF를 사용하기 위해  $b$ 를 결정해야 한다. 이 논문에서는  $b$ 를 다음과 같은 3가지의 값을 사용한다.

1.  $b = m/r$ ,
2.  $b = r^{-1} \max\{m, \sqrt{r}\}$ ,
3.  $b = r^{-1} \max\{m, \log r\}$

여기에서  $r$ 은 중도절단되지않는 자료의 수이며 그리고  $m$ 은 minimal training sample의 수이다. 이러한  $b$ 의 선택은 O'Hagan (1995)이 제시한  $b$ 의 선택에 대한 모든 경우를 고려한 것이다.

#### 4. 예제

3절에서 제안된 FBF를 이용하여, 실제의 자료에 대한 모형선택문제를 고려해 보자.

**예제 4.1:** 다음의 자료는 비행기의 부품에 대한 수명시간을 관측한 자료이다. 13개의 부품 중 10개까지 관측한 자료값은

0.22 0.50 0.88 1.00 1.32 1.33 1.54 1.76 2.50 3.00

이다. 이 자료는 Mann 과 Fertig (1973), Lawless (1982)에서 분석된 자료이며, 그들의 연구에서는 이 자료가 와이블분포라는 가정하에서 통계적 추론을 실시하였다.

이 자료에 대한 확률그림은 그림 4.1 과 같다. 확률그림에서 보듯이 이 자료는 지수분포, 와이블분포, 로그정규분포를 하는것 처럼 보인다.

이 자료를 이용하여 이 논문에서 제안된 FBF와 Kim, Lee와 Kang (1999)에 의해 제안된 IBF 중 non-nested 모형선택문제에서 적합한 MIBF를 이용하여 구한 결과는 아래의 표 4.1과 같다.  $M_1$ 은 지수분포,  $M_2$ 는 로그정규분포,  $M_3$ 은 와이블분포를 나타내며, 각 모형이 true일 사전확률은  $p_i = P\{M_i\} = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$ 로 가정하여 사후확률 (2.1)을 계산하였다.

표 4.1로부터 이 자료에 대한 가장 적합한 모형은 지수분포임을 알 수 있고,  $b = \frac{\max\{m, \sqrt{r}\}}{r}$  일 때의 FBF의 값이 MIBF와 가장 유사하다.

**예제 4.2:** 다음의 자료는 (3.5)에서  $\gamma = 4, \beta = 4$ 인 경우의 와이블분포에서 12개의 난수를 생성하고, 9번째 자료에 대해 제2종중단한 자료이다. 구체적인 자료의 값은 다음과 같다.

2.65213 4.39636 4.48236 2.61738 3.53928 3.96067 3.73724 3.44450 2.08135

이 자료에 대한 확률그림은 그림4.2와 같다. 이 그림에서도 주어진 자료는 세 모형에 모두 적합한 것 처럼 보인다. 주어진 자료에 대한 Bayes factor의 값은 표4.2에서 보는 것과 같다. 각 모형이 true일 사전확률을  $\frac{1}{3}$ 으로 동일하다는 가정으로 계산한 사후확률값을 고려해 볼 때, 표4.2로부터, 와이블모형이 타당하다는 것을 알 수 있다.

위의 예제로 부터 제안된 FBF와 MIBF와 비교해 본다면, FBF는 IBF에 비해 계산이 용이하고, 계산시간도 IBF에 비해 빠르다. 또한 예제에서 보듯이 모형선택의 결과도 MIBF와 차이가 없다는 것을 알 수 있다.

## 참고문헌

- [1] Berger, J.O. and Pericchi, L.R. (1996). The Intrinsic Bayes Factor for Model Selection and Prediction, *Journal of American Statistical Association*, 91, 109-122.
- [2] Berger, J.O. and Pericchi, L.R. (1998). Accurate and Stable Bayesian Model Selection : the Median Intrinsic Bayes Factor, *Sankhya*, 60, 1-18.
- [3] Kim, D.H., Lee, W.D. and Kang S.G. (1999). Bayesian Model Selection in Reliability under Type II censored Data, *under revision, Communications in Statistics, Theory and Methods*.
- [4] Lawless, J.F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, New York.
- [5] Mann, N.R. and Fertig K.W. (1973). Tables for obtaining confidence bounds and tolerance bounds based on best linear invariant estimates of parameters of the extreme value distribution, *Technometrics*, 15, 87-101.
- [6] O'Hagan, A. (1995). Fractional Bayes Factors for Model Comparisons, *Journal of Royal Statistical Society, Ser. B*, 57, 99-138.

[ 2000년 3월 접수, 2000년 6월 채택 ]

표 4.1: Airplane 자료에 대한 Bayes factor

	FBF			MIBF
	$(b = \frac{m}{r} = 0.2)$	$(b = \frac{\max\{m, \sqrt{r}\}}{r} = 0.316)$	$(b = \frac{\max\{m, \log r\}}{r} = 0.230)$	
$B_{12}$	2.159	1.450	1.880	1.522
$B_{21}$	0.463	0.689	0.530	0.657
$B_{13}$	2.250	1.431	1.899	1.615
$B_{31}$	0.445	0.699	0.527	0.619
$B_{23}$	1.042	0.987	1.010	1.060
$B_{32}$	0.960	1.014	0.990	0.944
$P\{M_1 \underline{x}\}$	0.524	0.419	0.486	0.439
$P\{M_2 \underline{x}\}$	0.243	0.289	0.258	0.289
$P\{M_3 \underline{x}\}$	0.233	0.292	0.256	0.272

표 4.2: 인위적인 자료에 대한 Bayes factor

	FBF			MIBF
	$(b = \frac{m}{r} = 0.222)$	$(b = \frac{\max\{m, \sqrt{r}\}}{r} = 0.333)$	$(b = \frac{\max\{m, \log r\}}{r} = 0.244)$	
$B_{12}$	0.010	0.015	0.011	0.038
$B_{21}$	96.045	65.771	91.768	26.671
$B_{13}$	0.010	0.014	0.010	0.035
$B_{31}$	102.368	71.009	98.706	28.807
$B_{23}$	0.938	0.9262	0.930	0.868
$B_{32}$	1.066	1.080	1.076	1.152
$P\{M_1 \underline{x}\}$	0.005	0.007	0.005	0.018
$P\{M_2 \underline{x}\}$	0.482	0.477	0.479	0.457
$P\{M_3 \underline{x}\}$	0.513	0.516	0.516	0.525



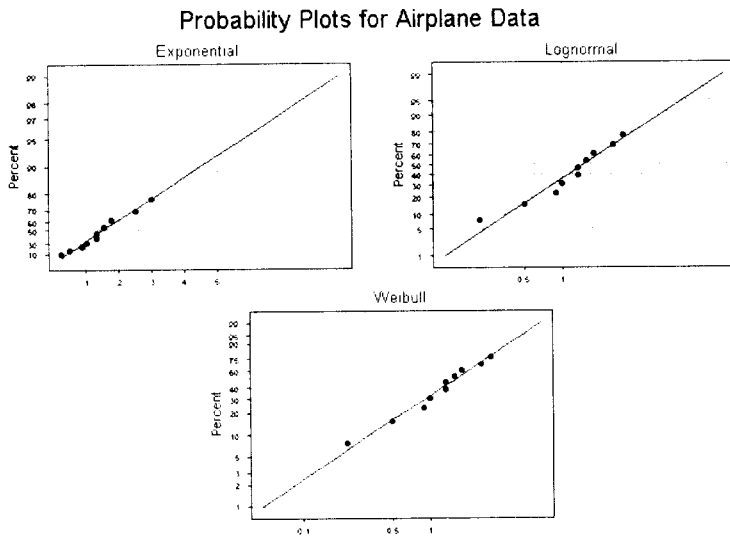


그림 4.1: Airplane data에 대한 확률그림

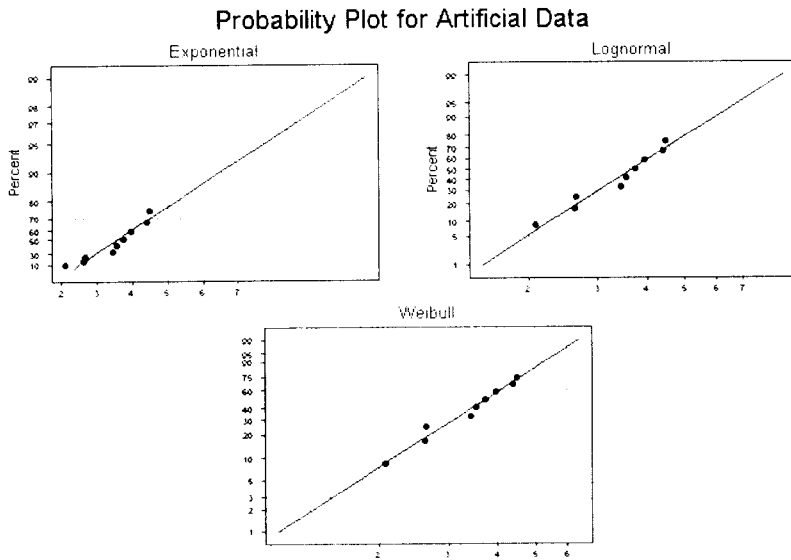


그림 4.2: Artificial data에 대한 확률그림

## Bayesian Model Selection of Lifetime Models using Fractional Bayes Factor with Type II Censored Data

Sang Gil Kang<sup>1)</sup> Dal Ho Kim<sup>2)</sup> Woo Dong Lee<sup>3)</sup>

### ABSTRACT

In this paper, we consider a Bayesian model selection problem of lifetime distributions using fractional Bayes factor with noninformative prior when type II censored data are given. For a given type II censored data, we calculate the posterior probability of exponential, Weibull and lognormal distributions and select the model which gives the highest posterior probability. Our proposed methodology is explained and applied to real data and simulated data.

*Keywords:* Fractional Bayes factor; Bayesian model selection; Type II censored data.

---

1) Lecturer, Department of Statistics, Kyungpook National University.

E-mail: sangkg@hanmail.net

2) Assistant Professor, Department of Statistics, Kyungpook National University.

E-mail: dalkim@kyungpook.ac.kr

3) Assistant Professor, Faculty of Information Science, Kyungsan University.

E-mail: wdlee@kyungsan.ac.kr