

# RAYLEIGH와 ERLANG 추세를 가진 혼합 고장모형에 대한 베이지안 추론에 관한 연구

김희철<sup>1)</sup> 이승주<sup>2)</sup>

## 요약

마코브체인 몬테칼로방법중에서 깃스 추출방법을 혼합 고장모형에 이용하였다. 베이지안 추론에서 조건분포를 가지고 사후분포를 결정하는데 있어서 계산 문제와 이론적인 정당성을 고려하여 감마쪽인 Rayleigh와 Erlang 추세를 가진 혼합모형에 대하여 깃스샘플링 알고리즘을 이용하여 베이지안 계산과 신뢰도 추이를 알아보고 모의실험자료를 이용하여 수치적인 계산을 시행하고 그 결과를 제시하였다.

주요용어: 혼합모형, 신뢰도, 마코브체인 몬테칼로방법, 깃스 샘플링.

## 1. 서론

신뢰도 이론은 장비나 무기의 일부분이나 시스템 전체가 규정된 환경조건하에서 의도하는 기간 동안에 요구된 기능을 만족스럽게 수행할 수 있는 확률을 예측하고 신뢰를 향상시키기 위한 실제적인 도구가 되며 시스템, 제품 또는 부품이 의도된 기간동안 요구된 기능을 발휘할 수 있는 확률을 보다 정확한 방법으로 추정하는 연구는 이 분야의 관심사항이 된다. 신뢰도의 검정과 분석의 문제에 관한 수명분포로서 지수분포는 유용한 통계모형으로서 주요한 역할을 해왔고 그 외에 다른 수명분포로서 감마(Gamma)분포, 와이블(Weibull)분포, 대수정규(Log normal) 분포도 많이 사용되고 있다. 지금까지의 구체적인 신뢰성 추정문제에 대한 수명분포로 혼합 지수 분포(Mendenhall과 Hader, 1958 ; Tallis와 Light, 1968), 와이블 분포(Falls, 1970), 역가우시안 분포(Akman과 Huwang,1997)와 파레토 분포(Upadhyay와 Shastri, 1997)등을 사용해 신뢰도 추정에 관한 문제가 연구되었다. 신뢰도는 고장패턴과 밀접한 관계를 가지고 있으며 고장패턴은 초기고장, 우발고장, 마모고장의 3종류로 구별할 수 있다. 그러나 실제로 제품 출하 테스트를 시행하여 초기고장을 제거한다면 우발고장과 마모고장이 각각 나타날 수도 있고 두 종류의 고장이 혼합하여 나타나는 경우도 있다. 고장이 혼합하여 나타나는 경우에 수명분포는 혼합분포로 나타난다. 신뢰도의 정량적인 값을 얻는데 있어 기존의 방법은 최우추정법을 많이 사용하였다. 그러나 혼합모형은 통계적으로 다루기가 더욱 어렵기 때문에 전통적인 베이지안 접근과 관련된 수치해석적인 어려움들 때문에 혼합수명분포의 적분 계산이 복잡하여 사후정보의 추출이 어려워진다. 이런 복

1) (225-800) 강원도 횡성군 횡성읍 남산리 66, 송호대학 정보산업세열, 전임강사

E-mail: kim1809@hanmail.net

2) (360-764) 충청북도 청주시 내덕동 36, 청주대학교 자연과학부, 조교수

E-mail: access@chongju.ac.kr

잡한 시스템에 대한 신뢰도 추정을 몬테칼로 깃스 표본기법을 사용하면 보다 쉽게 계산할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 마코브체인 몬테칼로 기법(MCMC; Markov Chain Monte Carlo)인 깃스 샘플링(Gibbs sampling)을 이용하여 적분이 풀리지 않는 경우에 근사적인 깃스 추정량을 유도하여 사후정보를 계산하고자 한다. 몬테칼로 적분 추정기법은 종래의 수치해석적 적분을 대신할 수 있는 강력한 도구로 각광받고 있다. 적당한 차수까지 연속인 도함수가 존재하는 경우에는 종래의 수치해석적 적분 알고리즘이 여전히 유용하고 정밀한 답을 제시한다. 그러나 정상적인 함수의 적분 문제에서도 몬테칼로 적분 추정기법이 수치해석적 방법에 비하여 효율이 떨어지지 않을 뿐만 아니라 연속성이 깨지는 상황이거나 다차원 적분문제에서는 몬테칼로 적분추정이 아주 유용하게 이용된다. 본 연구에서 고려한 혼합고장 모형은 각각 와이블과 감마분포의 특수형태인 Rayleigh와 Erlang 추세를 가진 가중총합을 수명시간분포(life time distribution)로서 이용하여 베이저안 추론과 신뢰도 추이를 살펴보았다. 본 연구의 2절은 사후 밀도함수를 구하기 위한 도구로서 이용되는 깃스 알고리즘과 혼합 고장모형과 혼합분포의 신뢰도 추정량을 전개한다. 3절에서는 모의실험을 통한 수치적인 예제가 제시되고 4절에서 결론 및 연구방향을 제시하고자 한다.

## 2. 깃스 샘플링과 혼합 고장모형

### 2.1. 깃스 샘플링(GIBBS SAMPLING)

깃스 샘플링은 화상공정(image-processing)모형을 연구하는 Geman과 Geman(1984)의 논문을 통하여 비로소 연구가 시작되어 신경망(Neural network), 전문가 시스템(Expert system)과 같은 척도가 큰(large scale) 복잡한 모형에 적용하여 사용되어 왔다. 본 절에서는 Geman과 Geman(1984)과 Gelfand와 Smith(1990)에 의해 더욱 구체화된 깃스 샘플링을 소개하고 Gelman과 Rubin(1992)이 제시한 다중열(multiple sequence)을 이용한 반복적 시뮬레이션 기법을 요약하고자 한다. 깃스 샘플링의 가정은 추출된 표본은 서로 독립이고 충분한 수의 반복이 이루어지면 깃스 알고리즘으로부터 추출된 표본은 안정된 특정분포로 수렴한다.

확률변수  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ 의 결합분포함수가 주어졌을 때 각각의 주변 확률밀도함수가 이용 가능하다고 가정하고 과산포분포(over-dispersed distribution)에서 유도된 초기점을 가지는 초기값을  $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_p^{(0)})$ 라고 정의하면 다음과 같은 조건부 밀도함수로부터 변량이 추출된다.

$$u_1^{(1)} \sim f(U_1 | U_2^{(0)}, U_3^{(0)}, \dots, U_p^{(0)}),$$

$$u_2^{(1)} \sim f(U_2 | U_1^{(1)}, U_3^{(0)}, \dots, U_p^{(0)}),$$

.....

$$u_p^{(1)} \sim f(U_p | U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, \dots, U_{p-1}^{(1)}).$$

각각의 변수들은 최신 값들로 갱신되면서  $p$ 개의 변량을 발생시킬 수 있고 충분한  $t$ 번의 반복이후에 다음과 같은 변량을 얻을 수 있다.

$$(U_1^{(t)}, U_2^{(t)}, \dots, U_p^{(t)}).$$

따라서, Geman과 Geman(1984)은 적당한 조건하(mild condition)에서  $t$ 가 충분히 크면 다음과 같이 수렴함을 제시하였다.

$$(U_1^{(t)}, \dots, U_p^{(t)}) \xrightarrow{d} (U_1, U_2, \dots, U_p) \sim f(U_1, U_2, \dots, U_p)(t \rightarrow \infty)$$

그러므로 충분히 큰  $t$ 에 대해서  $u_s^{(t)}$ 는  $f(u_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, p$ 의 표본으로 간주될 수 있고 이런 과정을  $m$  번 적용(replication)하면  $m$  개의 독립 표본이 다음과 같이 얻어진다.

$$(U_{1j}^{(t)}, \dots, U_{pj}^{(t)})(j = 1, 2, \dots, m);$$

위 식에서  $U_1, \dots, U_p$ 는 경우에 따라서 벡터가 될 수 있다. 사후 밀도함수의 값을 계산하기 위해서 본 논문은 다음과 같이 Rao-Blackwell개념을 사용하였다.

$$f(\hat{U}_s) \simeq (m)^{-1} \sum_{j=1}^m f(U_s | U_{rj}^{(t)}, r \neq s).$$

이러한 깃스 추출법의 주된 어려움은 반복 정지시점  $t$ 를 결정하는 일이다. 이러한 이유와 관련하여 Gelman과 Rubin(1992)은 반복 단계에서 수렴성의 효율을 높이고 초기분포의 의존성을 작게 하기 위해 각 열의 전반부  $t/2$ 번 반복을 제외하고 후반부  $t/2$ 번 반복만 고려하는 기법을 제안하였다. 그리고 대안적인 방법으로 충분한 표본을 발생하여 표본내의 분산과 표본 열 사이의 분산을 작게 하는 시점을 반복정지시점으로 간주됨을 제안하였다. 본 연구는 이 대안적인 방법을 적용하였다.

## 2.2. 고장모형에 대한 깃스 샘플링

### 2.2.1. RAYLEIGH 모형과 ERLANG(2) 모형

형상모수(shape parameter)가 2인 와이블분포의 특수한 경우인 Rayleigh 분포로 이루어진 고장모형은 다음과 같은 확률밀도함수를 가진다.

$$f_1(x; \beta_1) = 2\beta_1 x \exp(-\beta_1 x^2).$$

그리고 데이터  $D_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 이 주어지면 우도함수는 다음과 같다.

$$L_1(\beta_1 | D_n) = \prod_{i=1}^n \{2\beta_1 x_i \exp(-\beta_1 x_i^2)\}.$$

모수  $\beta_1$ 에 대한 사전밀도  $\pi_R \propto \text{Gamma}(a_1, b_1)$ 를 가정하면 다음과 같은 사후분포로 유도할 수 있다.

$$f(\beta_1 | D_n) \propto \text{Gamma}(n + a_1, \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_1).$$

몬테칼로 적분법을 이용하여 위 식에서  $\beta_1$ 에 대한 추정치를 구할 수 있고 신뢰도함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_1(t) = Pr(X > t) = \int_t^\infty f(\beta_1 | t) dt = 1 - F_1(t) = \exp(-\beta_1 t^2).$$

그리고 감마분포에서 형상모수가 2인 정수를 가진 Erlang(2) 분포로 이루어진 고장모형의 확률밀도함수와 우도함수는 각각 다음과 같다.

$$f_2(x; \beta_2) = \beta_2^2 x \exp(-\beta_2 x),$$

$$L_2(\beta_2 | D_n) = \prod_{i=1}^n \{\beta_2^2 x_i \exp(-\beta_2 x_i)\}.$$

모수  $\beta_2$ 에 대한 사전밀도  $\pi_E \propto \text{Gamma}(a_2, b_2)$ 를 가정하면 다음과 같은 사후분포로 유도할 수 있다.

$$f(\beta_2 | D_n) \propto \text{Gamma}(2n + a_2, \sum_{i=1}^n x_i + b_2).$$

같은 방법으로 몬테칼로 적분법을 이용하여 위 식에서  $\beta_2$ 에 대한 추정치를 구할 수 있고 Erlang(2) 추세를 가진 신뢰도 함수는 다음과 같이 정의된다 (Musa, Iannino와 Okumoto, 1987. p512).

$$R_2(t) = Pr(X > t) = \int_t^{\infty} f(\beta_2 | t) dt = \{\exp(-\lambda_2 t) + \lambda_2 t \exp(-\lambda_2 t)\}.$$

### 2.2.2. RAYLEIGH 모형과 ERLANG(2) 모형의 혼합

고장의 형태가 갑작스러운 고장이나 일정시간이 지난 이후에 마모 혹은 고장이 지연되는 경우에는 혼합모형이 단순모형보다 더 현실적일 수 있다(Mann, Schafer와 Singpurwalla, 1974, pp138-139). 따라서 본 연구에서는 Rayleigh 분포와 Erlang(2) 분포로 이루어진 다음과 같은 혼합모형을 고려하였다.

$$f_m(x; p, \lambda_1, \lambda_2) = p f_1(x; \lambda_1) + (1 - p) f_2(x; \lambda_2) \quad (2.1)$$

$$= 2p\lambda_1 x \exp(-\lambda_1 x^2) + (1 - p)\lambda_2^2 x \exp(-\lambda_2 x).$$

여기서, 데이터  $D_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 이 주어지면 우도함수는 다음과 같다.

$$L_{MIX}(p, \lambda_1, \lambda_2 | D_n, Z) \propto \prod_{i=1}^n \{2p\lambda_1 x_i \exp(-\lambda_1 x_i^2) \cdot Z_i + (1 - p)\lambda_2^2 x_i \exp(-\lambda_2 x_i) \cdot (1 - Z_i)\}. \quad (2.2)$$

단,  $Z_i \sim \text{Bernoulli}(1, w)$ 이고 모수  $w$ 는 다음과 같다.

$$w = \frac{2p\lambda_1 x_i \exp(-\lambda_1 x_i^2)}{2p\lambda_1 x_i \exp(-\lambda_1 x_i^2) + (1 - p)\lambda_2^2 x_i \exp(-\lambda_2 x_i)}. \quad (2.3)$$

모수  $\lambda_1, \lambda_2, p$ 에 대해 사전밀도는 서로 독립일 때 Akman과 Huwang(1997)이 제시한 모형과 유사한 형태로 다음과 같이 가정한다.

$$\pi(p, \lambda_1, \lambda_2) = \pi_1(p | \lambda_1, \lambda_2) \cdot \pi_2(\lambda_1 | \lambda_2) \cdot \pi_3(\lambda_2). \quad (2.4)$$

위의 식 (2.4)에서 다음과 같은 사전밀도함수를 따른다고 가정한다.

- (1)  $\pi_1(p|\lambda_1, \lambda_2) \sim Beta(\lambda_1, \lambda_2)$
- (2)  $\pi_2(\lambda_1|\lambda_2) \sim Gamma(a_3, \lambda_2)$
- (3)  $\pi_3(\lambda_2) \sim Gamma(a_4, b_4)$

여기서,  $a_3, a_4$  그리고  $b_4$ 는 각 각 기지의 양수이고  $Gamma(a, b)$ 는 평균이  $a/b$ 인 감마분포로 그리고  $Beta(c, d)$ 는 평균이  $c/(c + d)$ 인 베타분포로 표시하였다. 베이즈 정리에 의해 식 (2.2)와 식 (2.4)를 이용한 사후 결합밀도함수는 다음과 같다.

$$f(p, \lambda_1, \lambda_2|D_n, Z) \propto \prod_{i=1}^n [2p\lambda_1 x_i \exp(-\lambda_1 x_i^2) \cdot Z_i + (1-p)\lambda_2^2 x_i \exp(-\lambda_2 x_i) \cdot (1-Z_i)] \cdot \pi(p, \lambda_1, \lambda_2).$$

이런 형태에서 깃스 알고리즘에 이용되는 모수에 대한 완전한 사후 조건부분포들은 다음과 같이 주어진다.

$$(1) Z_i|p, \lambda_1, \lambda_2, D_n \sim Bernoulli(1, w), i = 1, \dots, n \tag{2.5}$$

$$w = \frac{2p\lambda_1 x_i \exp(-\lambda_1 x_i^2)}{2p\lambda_1 x_i \exp(-\lambda_1 x_i^2) + (1-p)\lambda_2^2 x_i \exp(-\lambda_2 x_i)}$$

$$(2) f(p|\lambda_1, \lambda_2, \beta, Z, D_n) \propto Beta\left(\sum_{i=1}^n Z_i + \lambda_1, \sum_{i=1}^n (1-Z_i) + \lambda_2\right) \tag{2.6}$$

$$(3) f(\lambda_1|p, \lambda_2, Z, D_n) \propto Gamma\left(\sum_{i=1}^n Z_i + a_3, \sum_{i=1}^n z_i x_i^2 - \ln p + \lambda_2\right) \tag{2.7}$$

$$(4) f(\lambda_2|\lambda_1, p, \beta, Z, D_n) \propto Gamma\left(2\sum_{i=1}^n (1-Z_i) + a_3 + a_4, \sum_{i=1}^n (1-Z_i)x_i - \ln(1-p) + b_4 + \lambda_1\right) \tag{2.8}$$

위 식을 임의의 양의 상수  $a_3, a_4, b_4$  그리고  $\lambda_1, \lambda_2$ 를 초기치로 하여 t번 반복에 m번 적용하면 사후평균을 이용한 모수의 추정치  $\hat{p}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ 를 얻을 수 있다. 이 모수들에 대한 95% 신뢰구간은 t번 반복에 m번 적용한 m개의 표본을 가지고 t분포를 이용하여 시행할 수 있다.

Rayleigh( $R_1(t)$ )와 Erlang(2)( $R_2(t)$ ) 추세를 가진 혼합모형에 대한 혼합 신뢰도 함수는 다음과 같이 정의된다

$$R_m(t) = Pr(X > t) = \int_t^\infty f(p, \lambda_1, \lambda_2|t) dt$$

$$= 1 - F_m(t) = p \exp(-\lambda_1 t^2) + (1-p) \{ \exp(-\lambda_2 t) + \lambda_2 t \exp(-\lambda_2 t) \}.$$

각 각의 신뢰도 함수의 모수에 추정치를 대입한 신뢰도  $\hat{R}_1(t), \hat{R}_2(t)$ 와  $\hat{R}_m(t)$ 는 임무시간(mission time)  $t$ 가 주어지면  $t$ 에 따른 신뢰도 추이를 알아볼 수 있다.

### 3. 수치적인 예

식 (2.5) ~ (2.8)에서 주어진 조건부밀도함수들로부터 표본을 추출하기 위한 깃스 추출법의 구현을 위하여 IMSL 프로그램을 이용하였다. 모의자료는 혼합모형  $0.5 \cdot Wei(0.005, 2) + 0.5 \cdot Gamma(0.05, 2)$ 에서 발생된 크기가  $n = 30$ 인 모의자료를 이용하였고 모의자료는 다음과 같다.

0.08, 0.39, 1.18, 1.39, 2.75, 4.62, 8.48, 9.40, 12.07, 13.84,  
 15.57, 16.88, 18.23, 21.82, 26.44, 28.08, 30.59, 31.41, 32.54, 34.28,  
 35.42, 38.73, 40.70, 41.61, 42.07, 46.35, 48.38, 51.45, 55.28, 55.99.

본 연구에서의 초기값은 확산 사전분포(diffuse prior distribution)를 이용하기 위해  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 15, b_1 = b_2 = b_4 = 0.001$ 을 가정하고 각각 1000번, 2000번, 3000번( $t$ )의 반복에 10번( $m$ )의 적용(replication)을 시행하였다. 깃스 샘플링 결과에 대한 수렴성을 확인하기 위하여 Gelman과 Rubin(1992)은 표본내의 분산과 표본 열 사이의 분산을 작게 하는 시점을 반복정지시점으로 간주됨을 제안하였다. 이들은 대안적 방법으로 다음과 같이 제시하였다.  $t = 1000$ 일 때 즉, 1000개의 표본으로 이루어진 10개의 열(sequences) 평균에 대한 분산  $B/1000$ 와 10개의 열내의 분산의 평균  $W$ 를 각각 구하여 다음 식을 계산한다.

$$\hat{V} = \frac{1000 - 1}{1000} \cdot W + \frac{1}{1000} \cdot B + \frac{1}{10 \times 1000} \cdot B$$

단,  $\sqrt{\hat{R}} = \sqrt{\frac{\hat{V}}{W} \frac{df}{df-2}}$ 이다. 여기서  $m \cdot n$  값이 충분히 큰 수이므로  $\frac{df}{df-2} \approx 1$ 로 간주하여 계산하였다. 이 식에서  $\hat{R}$ 이 1에 가까운 값을 가지면 깃스시행은 수렴한다고 간주할 수 있다. 본 연구에서는 모수의 추정치  $\hat{p}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ 에 대한  $\hat{R}$ 의 값은 표 3.1에 나열되었고 이 표에서 거의 1에 가까우므로 수렴하고 있다고 간주할 수 있다.

표 3.1:  $t$ 에 따른 혼합모형의 모수에 대한  $\hat{R}$ 의 값

| $t$  | $\hat{p}$ | $\hat{\lambda}_1$ | $\hat{\lambda}_2$ |
|------|-----------|-------------------|-------------------|
| 1000 | 0.8928    | 0.9527            | 0.9431            |
| 2000 | 0.8931    | 0.9523            | 0.9430            |
| 3000 | 0.8945    | 0.9532            | 0.9541            |

단순모형에 대한 모수 추정치(사후평균)는  $t = 3000$ 일 경우에 각각  $\hat{\beta}_1 = 0.00391, \hat{\beta}_2 = 0.15234$ 이고, 혼합모형에서의 모수에 대한 사후평균, 잔차와 95% 신뢰구간은 표 3.2에 요약되었다. 그림 3.1에서 보여주듯이 우리가 기대했던 것처럼 신뢰되는 시간에 따라 감소하는 비증가 추이를 보이고 있다. 효율적인 모형에 대한 선택은 다음과 같은 상대오차의 합을 이용하고자 한다.

$$RE(t) = \sum_{i=1}^n \frac{|f_{\text{참값모형}} - \hat{f}_{\text{추정값모형}}|}{f_{\text{참값모형}}}$$

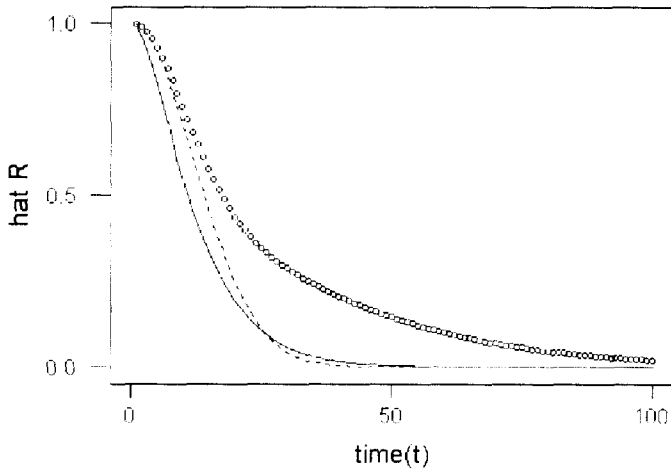


그림 3.1: t에 따른 단순모형  $\hat{R}_1(t)$ (--),  $\hat{R}_2(t)$ (-)과 혼합모형  $\hat{R}_m(t)$ (o)의 신뢰도 추이의 비교

단,  $f_{\text{참값모형}}$ 은  $n=30$ 이고 관찰된 모의자료의 값( $x_i$ )과 혼합모형에서  $p = 0.5, \lambda_1 = 0.005, \lambda_2 = 0.05$ 를 대입한 확률밀도함수의 값이고  $f_{\text{추정값모형}}$ 은 깁스기법으로 추정된 값을 대입한 값들의 합을 나타낸다. 결과는 표 3.3에 요약되었고 그 결과 혼합모형에 대한 상대오차의 합이 제일 작다. 즉, 단순모형에 비해 혼합모형이 효율적임을 시사하고 있다.

표 3.2: 혼합모형의 모수에 대한 사후평균과 95% 신뢰구간

| 모수          | 참값    | 깁스 추정값  | 참값 - 깁스 추정값 | 95% 신뢰구간           |
|-------------|-------|---------|-------------|--------------------|
| p           | 0.5   | 0.56732 | -0.06732    | (0.42603, 0.69323) |
| $\lambda_1$ | 0.005 | 0.00152 | 0.00348     | (0.00125, 0.00773) |
| $\lambda_2$ | 0.05  | 0.04875 | 0.00125     | (0.03133, 0.06687) |

표 3.3: 각 모형에 대한 상대오차의 합(RE)

| Rayleigh 모형 | Erlang(2) 모형 | 혼합모형        |
|-------------|--------------|-------------|
| 19.18616626 | 26.75002437  | 14.19703811 |

#### 4. 결론 및 연구방향

고장 시스템이 복잡해지면 고장의 원인이 하나의 수명분포에 의해서만 일어나지 않고 여러 원인이 혼합되어 발생 할 수 있다. 이러한 복잡한 시스템에 의한 우도함수가 적분하기 난

해하므로 반복표본을 이용하는 깃스 알고리즘이 제안되었다. 이 깃스 알고리즘은 MCMC기법으로 바람직한 사후분포로서 정상성분포를 가지는 마코프체인에 따라 표본들이 변화하는 알고리즘이다. 이 마코프체인의 추이 측정은 일반적으로 조건부밀도함수의 곱으로 이루어진다. 본 연구는 깃스 표본의 수렴성 확인을 위하여 Gelman과 Rubin(1992)이 제시한 대안적 방법을 도구로 하여 수렴성을 확인하였고 모수의 사전분포가 공액(conjugate)형태를 가진 감마형 혼합모형에 대한 베이시안적 신뢰도 추이가 단순모형보다 완만한 비증가 추세가 됨을 알 수 있었다. 이러한 혼합모형은 감마족 수명분포에만 국한되지 말고 비감마족 수명분포(예, 파레토, 로그노말 분포 등)인 경우의 신뢰도 추이에 대한 비교의 문제와 사후베이즈요인을 이용한 단순모형과 혼합모형에 대한 모형선택의 문제가 기대된다. 끝으로 본 논문에서의 내용을 참고로 하여 소프트웨어 혼합 신뢰도모형이나 중첩모형에 대한 극한분포이론과 응용에 관한 연구가 기대된다.

## 참고문헌

- [1] Akman, O. and Huwang, L. (1997). Bayes Computation for Reliability Estimation, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 46, 52-55.
- [2] Falls, L.W. (1970). Estimation of Parameters in Compound Weibull Distributions, *Technometrics*, Vol. 12, 399-407.
- [3] Gelfand, A.E. and Smith. A.F.M. (1990). Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 85, 398-409.
- [4] Gelman, A.E. and Rubin D. (1992). Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences, *Statistical Science*, Vol. 7, 457-472.
- [5] Geman, S. and Geman, D. (1984). Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution and the Bayesian Restoration of Images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 6, 721-741.
- [6] Mann, N.R., Schafer, R.E. and Singpurwalla, N.D. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Data*, John Wiley & Sons, New York.
- [7] Mendenhall, W. and Hader, R.J. (1958). Estimation of Parameters of Mixed Exponential Distributed Failure Times from Censored Life Test Data, *Biometrika*, Vol. 45, 504-520.
- [8] Musa, J.D., Iannino, A., and Okumoto, K. (1987). *Software Reliability: Measurement, Prediction, Application*, McGraw Hill, New York.
- [9] Tallis, G.M. and Light, R. (1968). The use of Fractional Moments for Estimating the Parameters of a Mixed Exponential Distribution, *Technometrics*, Vol. 10, 161-175.



- [10] Upadhyay, S.K. and Shastri, V. (1997). Bayes Result for Classical Pareto Distribution via Gibbs Sampler, with Doubly-censored Observations, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 46 56-59.
- [11] USER'S MANUAL STAT/LIBRARY FORTRAN Subroutines for statistical analysis, *IMSL, Volume 3*.

[ 2000년 1월 접수, 2000년 7월 채택 ]

## Bayesian Inference for Mixture Failure Model of Rayleigh and Erlang Pattern

Heecheul, Kim <sup>1)</sup> Seungjoo, Lee <sup>2)</sup>

### ABSTRACT

A Markov Chain Monte Carlo method with data augmentation is developed to compute the features of the posterior distribution. For each observed failure epoch, we introduced mixture failure model of Rayleigh and Erlang(2) pattern. This data augmentation approach facilitates specification of the transitional measure in the Markov Chain. Gibbs steps are proposed to perform the Bayesian inference of such models. For model determination, we explored sum of relative error criterion that selects the best model. A numerical example with simulated data set is given.

*Keywords:* Mixture Model, Reliability, Markov Chain Monte Carlo method, Gibbs Sampling.

---

1) Fulltime Lecturer, Department of Information Industry, Songho College. E-mail: kim1809@hanmail.net

2) Assistant Professor, Division of Natural Science, Chongju University. E-mail: access@chongju.ac.kr