

최적 극점 배치를 이용한 비선형 시스템의 퍼지 제어기 Fuzzy Controller for Nonlinear Systems Using Optimal Pole Placement

周永燾 · 李南洙* · 金光培**

Young-Hoon Joo, Nam-Soo Lee* and Kwang-Bae Kim**

群山大 工大 電氣電子制御工學部

* 群山大 大學院 制御計測專攻

**KIST 知能制御研究센터

요 약

본 논문에서는 확장된 병렬 분산 보상기와 최적 극점 배치 방법을 사용한 비선형 시스템의 퍼지 모델 기반 제어기의 분석과 설계 방법을 제안한다. 설계 과정을 설명하면, 먼저 비선형 시스템을 Takagi-Sugeno 퍼지 모델로 표현하고 확장된 병렬 분산 보상기를 사용하여 제어기 규칙을 작성한다. 그리고, 최적 극점 배치 방법을 사용하여 극소 상태 제환 제어기를 설계하고 이를 이용하여 전체의 퍼지 논리 제어기를 설계한다. 기존에 사용된 병렬 분산 보상기와는 다르게, 본 논문에서 새로이 개발된 확장된 병렬 분산 보상기와 최적 극점 배치 방법을 이용함으로써, 안정한 극소 퍼지 제어기의 설계뿐만 아니라 추적 제어 목적도 수행할 수 있는 전체의 안정한 퍼지 제어기도 설계할 수 있다. 게다가, 전체 퍼지 모델뿐만 아니라 실제 비선형 시스템에 대해서도 안정도 분석을 행하였다. 마지막으로, 제안된 퍼지 모델 기반 제어기 설계 방법의 효율성과 가능성을 하나의 시뮬레이션 예를 통하여 증명하였다.

ABSTRACT

This paper addresses the analysis and design of fuzzy-model-based controller for nonlinear systems using extended PDC and optimal pole-placement schemes. In the design procedure, we represent the nonlinear system using a Takagi-Sugeno fuzzy model and formulate the controller rules by using the extended parallel distributed compensator (EPDC) and construct an overall fuzzy logic controller by blending all local state feedback controllers with an optimal pole-placement scheme. Unlike the commonly used parallel distributed compensation technique, by blending a newly extended parallel distributed compensator and the optimal pole-placement schemes, we can design not only a local stable fuzzy controller but also an overall stable fuzzy controller to perform the tracking control objective. Furthermore, a stability analysis is carried out not only for the fuzzy model but also for a real nonlinear system. Finally, the effectiveness and feasibility of the proposed fuzzy model-based controller design method has been shown through a simulation example.

1. 소 개

퍼지 논리 제어는 일반적으로 수학적으로 모델링하기 어렵거나 정성적인 제어를 위해 전문가의 경험적 지식이 사용되는 플랜트에 적당하다고 알려져 있다. 즉, 퍼지 제어기는 동역학적 측면에서 불확실하거나 복잡한 시스템에 적당하다고 알려져 있다. 퍼지 논리 제어기는 크게 두 가지로 나뉘어 연구되고 있다. 첫째는 모델 독립 (model-free) 제어기 설계이고 다른 하나는 모델 기반 (model-based) 제어기 설계이다. 그러나, 퍼지 논리 제어기의 설계는 전문가의 지식을 얻는데 어려움을 가지고 있고 대부분의 경우 정당화 될 수 없는 실험적, 경험적 지식에 상당 부분 의존하고 있다. 따라서, 설계자가 무시했을 수도 있는 플랜트의 파라미터 변화나 예측할 수 없는 일이 발생했을 경우

에는 제어기의 성능을 저하시킬 수 있다. 또한, 전문가의 제어 규칙에 의해 얻어진 퍼지 논리 제어기의 파라미터는 최적일 아닐 수도 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해, 많은 과학자들은 퍼지 제어 시스템의 체계적인 해석과 개발을 위한 노력에 전념해 오고 있다 [1-12].

1985년에 Takagi와 Sugeno[4]는 현재 TS 퍼지 모델이라고 불리우는 새로운 종류의 퍼지 추론 시스템을 제안하였다. 이 모델은 퍼지 규칙의 후반부에 선형 함수를 쓸 수 있기 때문에, 기존의 개발된 현대 제어 이론을 적용하는데 편리하다고 알려져 있다. TS 퍼지 모델에 기반해서 다양한 종류의 TS 퍼지 모델 기반 제어기가 제안되어 왔다[4-10]. Takagi와 Sugeno[4]는 비선형 시스템을 입력의 선형함수의 조합으로 후반부를 표현하고, 이를 수질 정화 공정과 스틸 제조 공정

의 제어에 적용하였다. Cao[7,10]등은일반적인 퍼지 모델 기반 제어를 설계하고 해석하기 위해서 현대 제어 이론을 적용했다. Tanaka[9]는 TS 퍼지 모델로 주어지는 시스템의 제어를 위해 안정도 분석과 함께 병렬 분산 보상기(parallel distributed compensator: PDC)를 제안하고, 이를 차량의 제어에 응용하였다. 그러나, 그들이 제안한 PDC는 추적 제어 목적에는 사용되지 못하는 단점이 있으며, 사용한 안정도 분석은 주어진 퍼지 시스템에 대해서만 행하여 원래의 시스템의 안정도 분석에는 여전히 문제가 존재한다.

본 논문에서는 이러한 단점을 보완하기 위해, 비선형 시스템에 대해서 확장된 병렬 분산 보상기와 최적 극점 배치 방법을 사용한 퍼지 모델 기반 제어기의 분석과 설계 방법을 제안한다. 원래의 비선형 시스템을 퍼지 모델링하는데 TS 퍼지 모델이 사용되며, 각각의 국소 퍼지 제어기의 설계시에 확장된 병렬 분산 보상기(extended parallel distributed compensator: EPDC)가 사용된다, 또한, 본 논문에서 제안한 확장된 병렬 분산 보상기는 조정 제어 기능뿐만 아니라 추적 제어 기능도 수행할 수 있음을 보이고, 퍼지 제어기의 전향경로 제어 이득과 궤환 제어 이득은 최적 극점 배치 방법을 이용하여 체계적으로 설계하는 방법을 제안한다. 제안된 퍼지 제어기의 안정도 분석은 리아프노프(Lyapunov) 안정도 분석에 근거하여 행하며, 퍼지 시스템 그 자체뿐만 아니라 원래의 비선형 시스템에 대해서도 안정도 분석을 확장 할 수 있음을 보인다. 마지막으로, 본 논문에서 제안한 최적 극점 배치를 이용한 퍼지 모델 기반 제어기의 성능은 단일 링크 유연 로봇에 응용하여 그 응용 가능성을 검증한다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 먼저, 2장에서는 사용된 TS 퍼지 모델을 살펴보고 확장된 병렬 분산 보상기를 안정도 분석과 함께 제안한다. 3장에서는 최적 극점 배치 방법을 이용하여 안정한 국소 퍼지 제어를 설계하는 방법을 제안한다. 그리고, 4장에서는 단일 링크 유연 로봇을 이용하여 제안한 방법을 검증하고, 마지막으로 5장에서 결론을 내린다.

2. 퍼지 모델 기반 제어기

2.1 TS 퍼지 모델과 제어기 규칙

다음과 같은 일반적인 비선형 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) \tag{1}$$

여기서, 스칼라 x 는 출력 상태 변수, 벡터 u 는 제어 입력이고 $x = [x \quad \dot{x} \quad \dots \quad x(n-1)]^T$ 는 상태 벡터이다. 식 (1)에서 $f(x)$ 는 x 의 비선형 연속 함수이고, 제어

이득 $g(x)$ 는 x 의 비선형 연속이며 국부적으로 변환 가능한 함수이다. 이 비선형 시스템은 위상 평면의 여러 동작점에서 함수를 선형화함으로써 TS 퍼지 모델로 표현할 수 있다[4]. TS 퍼지 시스템은 퍼지 IF-THEN 규칙의 집합으로 표현되는데, 각 규칙은 상태 공간의 어떤 영역에서는 입출력이 국부적으로 선형으로 표현한다. 전체 시스템은 그러한 국부 선형 모델의 집합이다. 사용된 i 번째 부분공간에서의 TS 퍼지 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Plant Rule } i: & \text{ IF } x(t) \text{ is } M_i^1 \text{ and } \dots \text{ and} \\ & x(n-1)(t) \text{ is } M_i^n, \\ \text{THEN } \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t), Cx(t) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서, $M_i^j(j = 1, \dots, n)$ 은 i 번째 퍼지 집합이고 q 는 규칙의 수, $x(t) \in R^n$ 은 상태 벡터, $u(t) \in R^m$ 은 입력 벡터, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$ 이고 $x(t), \dots, x(n-1)(t)$ 는 전반부 변수이고, (A_i, B_i) 는 퍼지 시스템의 i 번째 국부 모델이다. 그러면, 퍼지 시스템의 최종 출력은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{3}$$

여기서,

$$A = \sum_{i=1}^q \mu_i(x)A_i, \quad B = \sum_{i=1}^q \mu_i(x)B_i$$

$$\mu_i(x) = \frac{\omega_i(x)}{\sum_{i=1}^q \omega_i(x)} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q \mu_i(x) = 1, \quad \omega_i(x) = \prod_{j=1}^n M_j^i$$

i 번째 부분공간에서의 퍼지 시스템 (2)는 어떤 동작점에서 원 비선형 시스템 (1)이 부분적으로는 선형으로 표현된다. 시스템 (3)에서 입력이 영일 때는 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^q \omega_i(t)A_i x(t)}{\sum_{i=1}^q \omega_i(t)} \tag{4}$$

본 논문에서, 복잡한 비퍼지화 과정을 피하기 위해서, 퍼지 규칙의 전반부 변수들은 입력 벡터 $u(t)$ 와는 독립이라고 가정한다. 비퍼지화 과정은 기본적인 시스템의 전체 퍼지 모델을 세우기 위해 인접한 지역 모델을 모두 부드럽게 연결하도록 사용한다. 어떤 시점에서 비선형 시스템은 식 (3)으로 표현되는 선형 모델로 나타나기 때문에 시스템의 제어를 설계하는데 있

어서 선형 케환 제어 기법을 사용할 수 있다는 것은 당연한 것이다.

Tanaka등은 위에서 설명한 TS 퍼지 모델에 대한 퍼지 모델 기반 제어를 설계하기 위해 PDC를 사용하였다[5,6]. 즉, 각 제어기 규칙은 퍼지 모델 규칙에 대응되는 것으로부터 각각 설계된다. 설계된 제어기는 퍼지 모델과 같은 전반부를 갖고, 후반부에는 선형 상태 케환 법칙을 갖는다. 식 (2)와 같은 전반부를 사용하면, PDC의 i 번째 제어기 규칙은 다음과 같다.

Controller Rule i : IF $x(t)$ is M_1^i and \dots and $x^{(n-1)}$ is M_n^i , THEN $u(t) = -K_i x(t)$ ($i = 1, 2, \dots, q$) (5)

여기서, $K_i = [k_1^i, \dots, k_n^i]$ 는 케환 이득(feedback gain) 벡터이다. 퍼지 제어기 (5)는 분석적으로는 다음과 같이 표현된다.

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^q \omega_i(x(t))(-K_i x(t))}{\sum_{i=1}^q \omega_i(x(t))} = -\sum_{i=1}^q \mu_i(x(t))K_i x(t) = -K(\mu)x(t)$$
 (6)

식 (3)과 식 (6)을 조합해서 얻어지는 전체 페루프 퍼지 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \mu_i \mu_j (A_i - B_i K_j) x(t)$$
 (7)

식 (5)에서 설계된 제어기가 국부적으로 안정하다 하더라도 전체 페루프 퍼지 시스템이 안정하다고 말할 수는 없다. 따라서, 지금까지 알려진 퍼지 시스템 (7)의 안정도 조건은 다음과 같다.

정리 1[9]: 퍼지 제어 시스템 (7)의 평형 (equilibrium)은 다음 두 개의 부등식을 만족하는 공통 양한 정 행렬 P 가 존재한다면 넓은 의미에서 점근적으로 안정하다.

$$\{A_i - B_i K_j\}^T P + P \{A_i - B_i K_j\} < 0 \text{ for } i = 1, 2, \dots, q$$
 (8)

그리고,

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0 \text{ for } i < j \leq q$$
 (9)

여기서, 모든 i 와 j 에 대해서 $G_{ij} = \frac{A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i}{2}$ 이다. 단 $\mu_i(x)\mu_j(x) = 0$ 을 만족하는 순서쌍(i, j)는 제외한다.

정리 1은 원 비선형 시스템 (1)에 대한 안정도 분석이 아니라 퍼지 시스템 (7)에 대한 안정도 분석임을 주목하라.

2.2 제안된 확장 병렬 분산 보상기

위에서 언급된 PDC 설계에 있어서 기존의 안정도 조건은 간략화된 TS 퍼지 모델이 없으면 원래의 기본적인 비선형 시스템에 대한 안정도 해석이 이루어지지 않는다는 것과 추종 문제가 명확하게 설명되지 않는다는 단점이 있다. 이러한 단점을 해결하기 위해, 본 절에서는 식 (2)와 같은 전반부를 갖는 i 번째 부분공간에서의 제어기 규칙 (5)를 다음과 같이 변경한다(식 (10)을 본 논문에서는 EDPC라 부른다).

Controller Rule i : IF $x(t)$ is M_1^i and \dots and $x^{(n-1)}$ is M_n^i , THEN $u(t) = -K_i x(t) + E_i r(t)$ ($i = 1, 2, \dots, q$) (10)

여기서, K_i 와 E_i 는 각각 i 번째 제어기 규칙에서의 케환 이득 벡터와 전향경로 이득 벡터이고, 입력 $r(t)$ 는 기준입력이다. 식 (10)에서 각각의 이득 벡터는 최적 극점 배치 방법을 사용하여 안정화되도록 설계되며 3장에서 설계 방법을 설명한다. 그림 1은 이러한 확장 병렬 분산 보상기를 사용한 제어 블록도를 보여준다. 식 (10)의 각각의 국부 제어기 규칙을 이용하여 식 (11)과 같이 플랜트에 대한 최종 제어 입력을 구할 수 있다.

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^q \omega_i(-K_i x(t) + E_i r(t))}{\sum_{i=1}^q \omega_i} = \sum_{i=1}^q \mu_i K_i x(t) + \sum_{i=1}^q \mu_i E_i r(t) = -K(\mu)x(t) + E(\mu)r(t)$$
 (11)

비선형 시스템 (1)과 제어기 (11)의 상호연결에 의해 다음과 같은 페루프 시스템을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + G(x(t))r(t)$$
 (12)

여기서, $F(x(t)) = f(x(t)) - g(x(t))K(\mu)x(t)$ 이고 $G(x(t)) = g(x(t))E(\mu)$ 이다.

i 번째 부분 공간에서의 국부 선형 시스템 (10)이 3장에서 제시한 최적 극점 배치 방법을 사용하여 각각 안정하도록 설계되었다 하더라도, 전체 페루프 시스템 (1) (또는 식 (2))는 불안정할 수 있다. 따라서, 전체 제어 시스템 (12)가 식 (1)에 연결되어질 때 제어기 (10)이 안정하기 위한 조건으로 다음과 같은 정리를 제안한다.

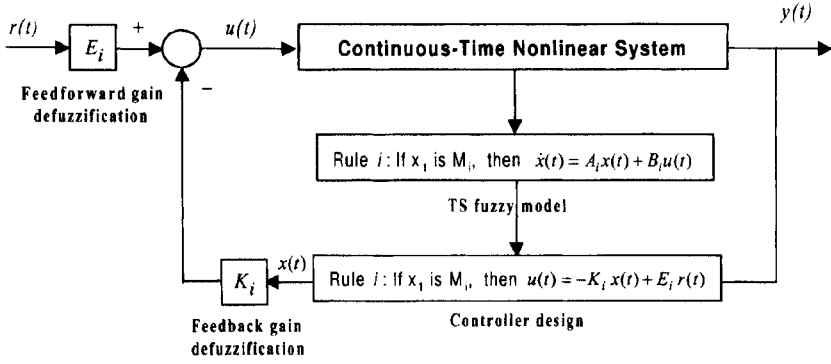


그림 1. 제안한 퍼지 제어기 블록도
Fig. 1. Block diagram of the proposed fuzzy controller

정리 2: 다음과 같은 비선형 시스템이 있다고 하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - K(\mu)x(t) + G(x(t), E(\mu))r(t) \quad (13)$$

여기서, $r(t)$ 는 주어진 기준입력이고 $K(\mu)$ 와 $E(\mu)$ 는 파라미터 $\mu \in R^q$ 를 가진 상수 행렬이다. 만약 $K(\mu)$ 와 $E(\mu)$ 가 다음과 같이 설계된다면, 제어 시스템 (13)은 Lyapunov 의미에서 안정하다

- (i) 행렬 $[A - K(\mu)]$ 는 모든 $x \in R^n$ 에 대해서 균일하게 안정 (uniformly stable)하다.
- (ii) $\int_0^\infty \|G(x(t), E(\mu))r(t)\| dt < \infty$,

또는, (ii)' $\int_0^\infty \|G(x(t), E(\mu))r(t)\| dt \leq \|C(x(t), t)\| \|x(t)\|$ with $\int_0^\infty \|C(x(t), t)\| dt < \infty$
여기서, $\|\cdot\|$ 는 Euclidean norm이다.

증명] $\phi(t, 0)$ 를 다음 식에서 유도되는 선형 시스템의 기본 행렬이라고 하자.

$$\dot{x}(t) = [A - K(\mu)]x(t)$$

그러면, 시스템 (13)의 일반해는 다음과 같다.

$$x(t) = \phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \phi(t, \tau)G(x(\tau), E(\mu))r(\tau)d\tau$$

정리 2의 조건 (i)하에서, 모든 $t, \tau \in [0, \infty)$ 에 대하여 $\|\phi(t, \tau)\| \leq M < \infty$ 라 하면 정리 2의 조건 (ii)에 의해서 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|\phi(t, 0)\| \|x_0\| + \int_0^t \|\phi(t, \tau)\| \|G(x(\tau), E(\mu))r(\tau)\| d\tau \\ &\leq M \|x_0\| + \int_0^\infty M \|G(x(\tau), E(\mu))r(\tau)\| d\tau < \infty \end{aligned}$$

따라서, 시스템 (13)의 모든 해는 제한(bounded) 된다. 조건 (ii)하에서, 제한 조건은 다음 식과 같은 Gronwall 부등식 [14]로부터 나온다.

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq M \|x_0\| + \int_0^t \|G(x(\tau), E(\mu))r(\tau)\| d\tau \\ &\leq M \|x_0\| + \exp\left\{\int_0^\infty \|C(x(\tau), \tau)\| d\tau\right\} < \infty \end{aligned}$$

다음 시스템의 모든 해가 제한되는 경우에만 시스템 (13)은 Lyapunov의미에서 안정하다는 것을 보인다. 실제로 시스템의 모든 해가 제한된다면, 모든 $t, \tau \in [0, \infty)$ 에 대해서, $\|\phi(t, \tau)\| \leq M$ 이 되는 상수 M 이 존재한다. 따라서, 0보다 큰 어떠한 $\epsilon (\epsilon > 0)$ 에 대해서도, $\|x_0 - x_1\| < \epsilon/M$ 은 다음 식에 의해 구해진다.

$$\begin{aligned} \|x(t; x_0) - x(t; x_1)\| &= \|\phi(t, 0)[x_0 - x_1]\| \leq M \|x_0 - x_1\| < \epsilon \end{aligned}$$

이것은 시스템이 Lyapunov 의미에서 안정하다는 것을 의미한다.

역으로, 시스템이 Lyapunov 의미에서 안정하다면, 0보다 큰 어떠한 $\epsilon (\epsilon > 0)$ 에 대해서, $\|x_1\| < \delta$ 가 $\|x(t; x_1) - 0\| = \|\phi(t, 0)x_1\| < \epsilon$ 를 나타내는 0보다 큰 $\delta (\delta > 0)$ 가 존재한다.

i 번째 요소로써 $\delta/2$ 를 가진 $x_1 = [0 \ \dots \ 0 \ \delta/2 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ 을 취하면, 다음을 만족한다.

$$\|\phi(t, 0)x_1\| = \|\phi(t, 0)\| \delta/2 < \epsilon \quad i = 1, \dots, n$$

여기서, $\phi(t, 0)$ 는 $\phi(t, 0)$ 의 i 번째 행이다. 따라서, $\|\phi(t, 0)\| < 2n/\delta \epsilon$ 이 되고, 다음 식을 만족한다.

즉, 시스템의 모든 해는 제한된다.

$$\|x(t; x_0)\| = \|\phi(t, 0)x_0\| \leq \frac{2n}{\delta} \epsilon \|x_0\| < \infty$$

-증명 끝-

추론 1: 다음과 같은 퍼지 제어 시스템을 정의하자.

$$\dot{x}(t) = F(x(t), [K(\mu)] + G(x(t), E(\mu))r(t) \quad (14)$$

여기서,

$$F(x(t), K(\mu)) = f(x(t)) - g(x(t))K(\mu)x(t),$$

$$G(x(t), E(\mu)) = g(x(t))E(\mu)$$

식 (15)와 같은 TS 퍼지 모델이 주어진 비선형 시스템 (14)를 여러 동작점에서 근사화시킨 모델이라면, 즉 $\|F(x(t), K(\mu)) - [A - BK(\mu)]\|$ 가 임의로 작게 되도록 설계될 수 있고, 제어 이득 $K(\mu)$ 와 $E(\mu)$ 가 정리 2의 두 개의 조건 (i)과 (ii) (또는 (ii)')가 만족되도록 설계된다면 퍼지 제어 시스템 (14)는 Lyapunov 의미에서 안정하다.

$$\dot{x}(t) = [A - BK(\mu)]x(t) \tag{15}$$

증명] TS 퍼지 모델 (15)가 주어진 비선형 시스템 (14)를 근사화시킨 모델이라면, 다음 식이 만족된다.

$$\dot{x}(t) = F(x(t), K(\mu)) - [A - BK(\mu)]x(t) + [A - BK(\mu)]x(t) + G(x(t), E(\mu))r(t)$$

정리 2에 의하면, 0보다 큰 어떠한 $\epsilon(\epsilon > 0)$ 에 대해서도 다음 식이 성립된다.

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \|F(x(t), K(\mu)) - [A - BK(\mu)]\| + \|[A - BK(\mu)] + G(x(t), E(\mu))\| \|r(t)\| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

증명 끝-

정리 2와 추론 1에 의하면, 기준 입력 $r(t)$ 가 주어진 조정 제어 또는 추종 제어의 안정도 조건은 다음과 같다: i 번째 부분공간의 각 퍼지 제어기 규칙에 대해서, 먼저 국부 제어기는 단지 국부 성능(local performance)의 중요도에 따라서 설계된다. 두 번째로, 안정 조건 (8) 또는 정리 2의 조건 (i)이 만족하는지를 검사하기 위해서, 그리고 공통 양한정 행렬 (common positive definite matrix) P 를 구하기 위하여 LMI기반의 안정도 해석을 수행한다[9]. 마지막으로, 정리 2의 조건 (ii) 또는 조건 (ii)')이 만족하는지를 검사한다. 만약, 설계된 전체 제어기가 정리 2의 안정 조건 (i)과 (ii)를 만족하지 못한다면, 식 (10)에 있는 제어기 K 와 E 를 3장에서 설명할 최적 극점 배치 방법을 사용하여 다시 설계한다. 본 논문에서 정의한 위의 안정도 조건은 TS 퍼지 모델 (2)뿐만 아니라 기본적인 원 비선형 시스템 (1)에 대해서도 안정도를 보장함을 나타낸다.

3. 극점 배치를 갖는 최적 제어

본 장에서는 i 번째 부분공간에서의 국부 제어기를

설계하기 위한 최적 극점 배치 방법에 대해 설명한다. i 번째 부분공간에서 선형적으로 제어 가능한 연속시간 시스템을 다음과 같이 정의하자.

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$$

$$y(t) = C_i x(t) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \tag{16}$$

i 번째 부분공간에서의 부시스템 (16)의 성능기준은 다음과 같다.

$$J_i = \int_0^{\infty} [x^T(t)Q_i x(t) + u^T(t)R_i u(t)] dt \tag{17}$$

여기서, Q_i 는 $n \times n$ 양반한정 대칭 행렬(positive semi-definite symmetric matrices)이고 R_i 는 $m \times m$ 양한정 대칭 행렬(positive definite symmetric matrices)이다. 성능기준을 최소화하는 궤환 제어 규칙 $u(t)$ 은 다음과 같다.

$$u(t) = -K_i x(t) + E_i r(t) = -R_i^{-1} B_i^T P_i x(t) + E_i r(t) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \tag{18}$$

여기서, K_i 와 E_i 는 각각 i 번째 부분공간의 궤환 이득과 전향경로 이득, $r(t)$ 는 기준 입력, P_i 는 구할 수 있는 (Q_i, A_i) 를 가진식 (19)에서 정의한 Riccati 방정식의 양반한정 대칭 행렬의 해이다.

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i A_i - A_i^T P_i - Q_i = 0_n \tag{19}$$

이 해를 사용하면, i 번째 부분공간에서의 폐루프 시스템은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x}(t) = (A_i - B_i K_i)x(t) + B_i E_i u(t) \quad (i = 1, 2, \dots, q) \tag{20}$$

여기서, $K_i = R_i^{-1} B_i^T P_i$ 이고 $A_i - B_i K_i$ 의 고유값은 복소 s -평면의 개방 좌반면에 위치한다. 본 장의 목적은 i 번째 부분공간에서의 안정한 국부 제어기를 설계하기 위

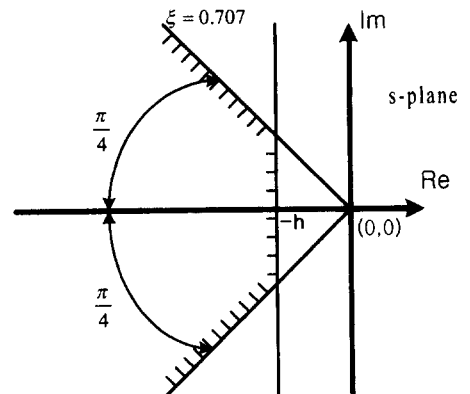


그림 2. s-평면에서의 관심영역
Fig. 2. Region of interest in the s-plane

해, 페루프 시스템 (20)이 그림 2에 나타난 사선부분이나 그 안쪽에 위치한 고유값들을 갖도록 하는 Q , R , K 를 구하는 것이다.

보조정리 1[13]: (A_i, B_i) 를 식 (16)에서 정의된 개루프 시스템을 나타낸다고 하고, $h(\geq 0)$ 는 그림 2에서 나타난 것처럼 미리 설정된 상대 안정도를 나타낸다고 하자. 그러면, 페루프 시스템 행렬 $A_i - B_i R_i^{-1} B_i^T P_i$ 의 고유값들은 수직선 $-h$ 의 좌측에 놓여진다. 여기서, 행렬 P_i 는 다음의 Riccati 방정식의 해이다.

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i(A_i + hI_n) - (A_i + hI_n)^T P_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (21)$$

TS 퍼지 모델은 원 비선형 시스템 (1)을 여러 동작점에서 선형 시스템으로 근사화시킨 것이므로, 보조정리 1에서 최적 제어 이득($R_i^{-1} B_i^T P_i$)을 구하기 위해 상대 안정도 h 의 사용은 바람직한 것으로 알려져 있다[3].

보조정리 2[13]: 식 (16)에서 주어진 안정한 시스템 행렬 $A_i \in R^{n \times n}$ 은 그림 2의 사선이 그려진 영역안에 위치한 고유값 $\hat{\lambda}_j (j = 1, \dots, \hat{n})$ 과 그 영역 밖에 위치한 고유값 $\hat{\lambda}_j^* (j = 1, \dots, \hat{n}^*)$ 를 가지고 있다. 여기서 $\hat{n} = \hat{n} + \hat{n}^*$ 이다. $R > 0$ 을 갖도록 할당된 다음의 두 Riccati 방정식을 생각하자:

$$\hat{Q} B_i R_i^{-1} B_i^T \hat{Q} - \hat{Q}(-A_i^2) - (-A_i^2)^T \hat{Q} = 0, \quad (22)$$

$$P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i - P_i A_i - A_i^T P_i - \hat{Q} = 0, \quad (23)$$

그러면, i 번째 부분공간에서 최적의 페루프 시스템 행렬

$$A_c^i = A_i - B_i K_i = A_i - \gamma B_i (R_i^{-1} B_i^T P_i) \quad (24)$$

은 불변의 고유값 $\hat{\lambda}_j (j = 1, \dots, \hat{n})$ 를 갖게 되며, 식 (24)에서의 상수 이득 γ 가 다음의 식 (25)를 만족하면, 그림 2의 사선 영역 내부에 위치한 적어도 하나의 추가된 하나의 복소쌍 고유값이 존재한다.

$$\gamma \geq \max \left(\frac{1}{2}, \frac{b_i + \sqrt{b_i^2 + a_i c_i}}{a_i} \right) \quad (25)$$

여기서, $a_i = \text{tr}[(B_i R_i^{-1} B_i^T P_i)^2]$, $b_i = \text{tr}[B_i R_i^{-1} B_i^T P_i A_i]$, $c_i = \text{tr}[B_i R_i^{-1} B_i^T \hat{Q}] / 2$ 이고, $\text{tr}[\cdot]$ 는 행렬의 trace이다. 만약, $c_i = 0$ 이라면, i 번째 부분공간에서 A_c^i 의 모든 고유값들은 그림 2에 나타난 사선 영역 안에 최적으로 위치하게 된다.

최적 극점 배치 방법을 이용하면, i 번째 부분공간에서 각 부시스템의 극점(poles)들이 사선영역 안에 위치하기 때문에, 각 부시스템은 i 번째 부분공간에서 안정하도록 설계된다. 비록 이와 같이 설계된 국부 시스템이 안정하다하더라도 전체 시스템은 불안정 할 수 있다. 그 이유는 i 번째 부분공간에서 설계된 제어기는 국부 성능 기준에 기본하여 설계되었기 때문이다. 따라서, 전체 시스템은 2.2절에서 제시한 안정도 분석을 행하여야 한다. 만약, i 번째 부분공간에서 설계된 제어기로 구성된 전체 제어 시스템이 불안정하다면 상대 안정도 h 를 Δh 만큼 증가시켜 각각의 국부 제어기를 다시 설계한다.

최적 제어 방법을 이용한 i 번째 부분공간에서의 연속시간 제어기 설계 과정은 다음과 같다.

단계 1: $i = 1$ 로 설정하고, (A_i, B_i) 를 식 (16)에서 주어진 시스템 행렬이라고 하자. 상대 안정도 h 와 증분 Δh 의 초기값과 가중 행렬 $R_i (> 0)$ 의 값을 정한다. $j = 0$ 으로 설정하고 $j = 0$ 에 대해서 $A_j = A_i$ 와 $\gamma = 1$ 로 나타낸다. 페루프 시스템 $A_{j+1} = A_j - B_j K_j$ 를 구하기 위해 식 (17)을 만족하는 $P_j (P_j$ 로 나타내는)에 대해서 식 (21)을 푼다. 여기서, $K_j = \gamma R_i^{-1} B_i^T P_j$ 이다.

단계 2: $j = j + 1$ 로 설정하고 $\hat{Q} (\hat{Q}$ 로 나타내는)를 구하기 위해 $A_i = A_j$ 를 갖는 식 (22)를 푼다. 만일 $c_i = \text{tr}[B_i R_i^{-1} B_i^T \hat{Q}] / 2 = 0$ 이면 단계 4로 간다.

단계 3: $P_j (P_j$ 로 나타내는)를 결정하고 페루프 시스템 $A_{j+1} = A_j - B_j K_j$ 를 구하기 위해 $A_i = A_j$ 와 $\hat{Q}_i = \hat{Q}_i$ 를 갖는 식 (23)을 푼다. 여기서, $K_j = \gamma R_i^{-1} B_i^T P_j$ 이며 γ 는 식 (25)로부터 결정된다. 단계 2로 간다.

단계 4: i 번째 부분공간에서 바람직한 최적 제어는 다음과 같다.

$$u(t) = -K_i x(t) + E_i r(t) \quad (26)$$

여기서, $K_i = \sum_{j=0}^{i-1} K_j$ 는 i 번째 부분공간의 상태 반환 이득 벡터이고 E_i 는 i 번째 부분공간의 전향 경로 이득 벡터이다.

기준 입력 $r(t)$ 를 추종하기 위해, 식 (17)의 성능기준을 다음과 같이 쓴다.

$$J_i = \int_0^\infty \{ [C_i x(t) - r(t)]^T Q_i [C_i x(t) - r(t)] + u^T(t) R_i u(t) \} dt \quad (27)$$

여기서, 가중 행렬 Q_i 는 다음과 같이 선택할 수 있다.

$$Q_i = 2h P_0 + \sum_{j=1}^i [\hat{Q}_j + (\gamma - 1) P_j B_j R_j^{-1} B_j^T P_j] \gamma \quad (28)$$

이때, 원하는 최적 추적 제어 법칙은 다음과 같다 [13].

$$u(t) = -K_e^i x_e(t) + E_e^i r(t) \quad (29)$$

여기서, $K_e^i = R_i^{-1} B_i^T P_e$ 이고 P_e 는 다음 식의 해이다.

$$A_i^T P_e + P_e A_i - P_e B_i R_i^{-1} B_i^T P_e + C_i^T Q_e C_i = 0_{\tilde{n}} \quad (30)$$

그리고,

$$E_e^i = -R^{-1} B_i^T (A_i - B_i K_e^i)^T C_i^T Q_e \quad (31)$$

$C_i = I_{\tilde{n}}$ 일 때, 식 (26)에 있는 궤환 이득 K_i 는 식 (29)의 이득 K_e^i 와 동일하고 식 (26)의 전향 경로 이득 E_i 는 식 (29)의 E_e^i 로 선택된다.

4. 시뮬레이션 및 결과 고찰

본 논문에서 제안한 방법의 우수성을 증명하기 위해 그림 3과 같은 단일 링크 유연 로봇에 응용한다. 이 로봇의 동역학은 식 (32)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k}{J} (x_1 - x_3) + \frac{1}{J} u \end{aligned} \quad (32)$$

식 (32)에서 M 은 링크의 질량, I 는 링크의 관성, L 은 링크의 길이, k 는 관절과 연결된 스프링의 탄성 상수, J 는 구동부 축의 관성, g 는 중력 가속도이다. 이 시스템의 상태 x_1 의 두 부분에서 선형화하여 식 (33)과 같은 TS퍼지 모델을 얻는다.

$$\begin{aligned} \text{Rule 1: IF } x_1 \text{ is about } 0 \text{ THEN } \dot{x} &= A_1 x + B_1 u \\ \text{Rule 2: IF } x_1 \text{ is about } \pi \text{ THEN } \dot{x} &= A_2 x + B_2 u \end{aligned} \quad (33)$$

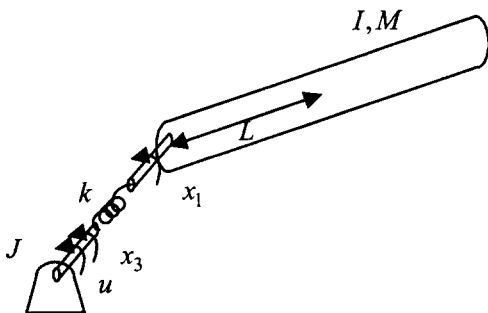


그림 3. 단일 링크 유연 로봇
Fig. 3. Single link flexible robot

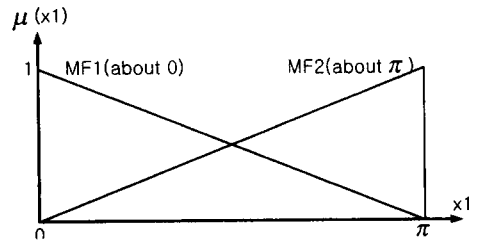


그림 4. 멤버십 함수
Fig. 4. Membership function

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{MgL}{I} - \frac{k}{I} & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{MgL}{I} - \frac{k}{I} & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

그림 4는 Rule1과 Rule2에 대한 멤버십 함수를 나타낸다.

모의 실험을 위한 시스템의 파라미터들은 $M = 1 \text{ kg}$, $I = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $L = 1 \text{ m}$, $k = 1 \text{ N/m}$, $J = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 이고, 샘플링 시간 T 는 0.02 sec, 상대 안정도를 나타내는 h 는 2.8, 증분 Δh 는 0.1로 하였다.

본 논문에서 제안한 최적 극점 배치 방법에 의해 구한 궤환 이득과 전향경로 이득 행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} K_1 &= [-678.63 \quad 592.70 \quad 188.15 \quad 22.40] \quad E_1 = 1363.29 \\ K_2 &= [2560.75 \quad 862.63 \quad 195.41 \quad 22.76], \quad E_2 = 831.27 \end{aligned}$$

또한, 상기 이득 행렬을 갖을 때, 전체 퍼지 시스템의 안정도를 나타내는 공통 행렬 P 는 다음과 같이 구해진다.

$$P = \begin{bmatrix} 2896.90 & 532.63 & 89.06 & 2.42 \\ 532.63 & 184.16 & 26.43 & 1.34 \\ 89.06 & 26.43 & 5.54 & 0.20 \\ 2.42 & 1.34 & 0.20 & 0.02 \end{bmatrix}$$

그림 5와 그림 6은 각각 기준신호 $r(t) = 0$, $r(t) = \sin(t)$ 인 경우의 단일 링크 유연 로봇의 응답 특성과

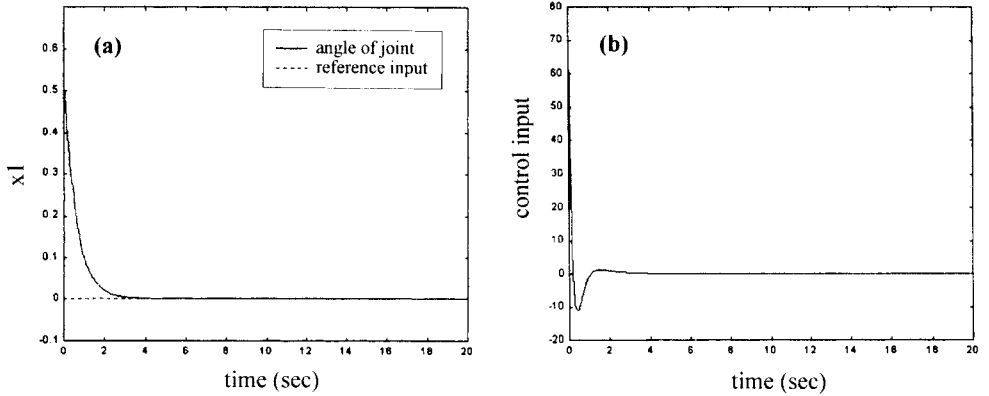


그림 5. $r(t)=0$ 일 때의 응답특성 (a) 관절각 응답, (b) 제어입력
 Fig. 5. Response characteristic with zero reference (a) Response, (b) Control input

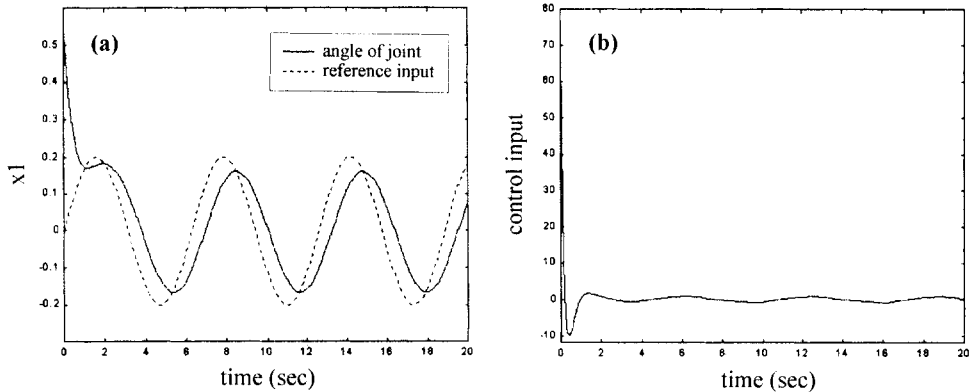


그림 6. $r(t)=0.2\sin(t)$ 일 때의 응답특성 (a) 관절각 응답, (b) 제어입력
 Fig. 6. Response characteristic with sinusoidal reference (a) Response, (b) Control input

제어 입력을 도시한 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이, 본 논문에서 제안한 최적 극점 배치를 이용한 비선형 시스템의 퍼지 모델 기반 제어기는 조정의 기능($r(t)=0$) 뿐만 아니라 추적의 기능까지도 우수하게 적용됨을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 확장된 병렬 분산 보상기와 최적 극점 배치 방법을 이용하여 비선형 시스템의 퍼지 제어기의 설계 방법을 제안하였다. 원 비선형 시스템을 퍼지 모델링하는데 TS 퍼지 모델이 사용되었으며, 각각의 극소 퍼지 제어기의 설계시에 확장된 병렬 분산 보상기가 제안되었다. 또한, 각각의 극소 퍼지 제어기의 전향경로 제어 이득과 궤환 제어 이득은 최적 극점 배치 방법을 이용하여 체계적으로 설계하는 방법

을 제안하였다. 본 논문에서 제안한 확장된 병렬 분산 보상기는 조정 제어 기능뿐만 아니라 추적 제어 기능도 동시에 수행하는 장점을 가지고 있음을 보였으며, 제안된 퍼지 제어기의 안정도 분석은 리아프노프 안정도 분석에 근거하여, 퍼지 시스템 그 자체뿐만 아니라 원래의 비선형 시스템에 대해서도 안정도 분석을 확장할 수 있음을 보였다. 마지막으로, 본 논문에서 제안한 퍼지 모델 기반 제어기의 성능은 단일 링크 유연 로봇에 응용하여 시스템의 안정도, 조정 제어 기능, 추적 제어 기능을 검증하였다.

참고문헌

[1] Y. H. Joo, H. S. Hwang, K. B. Kim and K. B. Woo, "Linguistic Model Identification for Fuzzy Systems", *Electronics Letters*, Vol. 31, No. 4, pp. 330-331, 1995.
 [2] Y. H. Joo, H. S. Hwang, K. B. Kim and K. B. Woo,

“Fuzzy System Modeling by Fuzzy Partition and GA Hybrid Schemes”, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 86, No. 3, pp. 279-288, 1997.

[3] Y. H. Joo, L. S. Shieh and G. Chen, “Hybrid State-Space Self-Tuning Fuzzy-Model-Based Controller for Digital Control of Chaotic Systems”, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 7, No. 4, pp. 394-408, 1999.

[4] T. Takagi and M. Sugeno, “Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control”, *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-15, No. 1, pp. 116-132, 1985.

[5] M. Sugeno and K. Tanaka, “Successive Identification of a Fuzzy Model and Its Applications to Prediction of a Complex System”, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 42, pp. 315-334, 1991.

[6] K. Tanaka and M. Sugeno, “Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems”, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 45, pp. 135-156, 1992.

[7] S. G. Cao, N. W. Rees and G. Feng, “Stability Analysis and Design for a Class of Continuous-Time Fuzzy Control Systems”, *Int. J. Control*, Vol. 64, No. 6, pp. 1069-1087, 1996.

[8] L. K. Wong, F. F. Leung, and P. K. S. Tam, “Stability Design of TS Model-Based Fuzzy Systems”, *FUZZ-IEEE* 1997, pp. 83-86, 1997.

[9] H. O. Wang, K. Tanaka and M. F. Griffin, “An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues”, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 4, No. 1, pp. 14-23, 1996.

[10] G. Feng, S. G. Cao, N. W. Rees, and C. K. Chak, “Design of Fuzzy Control Systems with Guaranteed Stability”, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 85, No. 1, pp. 1-10, 1997.

[11] F. H. F. Leung, L. K. Wong and P. K. S. Tam, “Fuzzy-Model-Based Controller for an Inverted Pendulum”, *Electronics Letters*, Vol. 32, Iss. 8, pp. 1683-1685, 1996.

[12] K. Kiriakidis, A. Grivaqs and A. Tzes, “A Sufficient Criterion for Stability of the Takagi-Sugeno Fuzzy Model”, *FUZZ-IEEE*, pp. 277-281, 1996.

[13] L. S. Shieh, H. M. Dib and S. Ganeson, “Continuous-Time Quadratic Regulators and Pseudo- Continuous-Time Quadratic Regulators with Pole Placement in a Specific Region”, *IEE Proceedings(D)*, Vol. 134 No.

5, pp. 338-346, 1987.

[14] R. Grimshaw, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.



주 영 훈 (Young-Hoon Joo)

1982년 : 연세대 전기공학과 졸업
 1984년 : 연세대 대학원 전기공학과 졸업(공학석사)
 1995년 : 연세대 대학원 전기공학과 졸업(공학박사)
 1986년~1995년 : 삼성전자(주) 자동화연구소(선임 연구원)

1998년 2월~1999년 1월 : 미국 휴스톤대학 전기 및 컴퓨터 공학과 교환교수

2000년 현재 : 군산대 공대 제어계측공학과 조교수
 관심분야 : 로보틱스 및 인공지능, 퍼지 및 신경회로망



이 남 수 (Nam-Su Lee)

1999년 : 군산대 제어계측공학과(공학사)
 1999년 현재 : 군산대 대학원 제어계측 전공
 관심분야 : 로보틱스 및 인공지능제어



김 광 배 (Kwang-Bae Kim)

1967년 : 서울대 전기공학과 졸업
 1978년~1979년 : 미국 MIT 대학 연수
 1985년 : 서울대 대학원 제어계측공학과 졸업(공학석사)
 1990년 : 서울대 대학원 제어계측공학과 졸업(공학박사)
 2000년 현재 : 대한전기학회 회장, KIST 지능제어연구센터 책임연구원

관심분야 : 지능제어, 적응제어, 전력전자