

## 고차경계요소법을 이용한 2차원 비선형 방사문제의 수치해석

성흥근\*, 최항순\*\*

### Numerical Analysis of Two-Dimensional Nonlinear Radiation Problem Using Higher-Order Boundary Element Method

by

Hong G. Sung\* and Hang S. Choi\*\*

요 약

본 연구에서는 2차원 비선형 방사문제에 대한 정확하고 효과적인 수치기법을 개발하였다. 물체 운동에 의해서 생성되는 비선형파계는 이상유체라는 가정에 의하여 기술되고, 라플라스 방정식은 고차경계요소법과 GMRES(Generalized Minimal RESidual) 알고리즘을 이용하여 신속하고 효율적인 풀이가 가능하도록 하였다. 자유표면과 물체면의 교차점에서 발생하는 교차선문제는 불연속 요소를 이용하여 원활하게 해결하였다. 자유표면의 비선형운동을 기술하기 위해서 음해적 사다리꼴법칙(implicit trapezoidal rule)을 사용하여 시적분하였다. 물체에 의해서 발생한 비선형파가 수직 하류면에서 반사하는 것을 줄이기 위하여 하류면에 수치감쇠항을 도입하였다. 수치계산 결과로부터 본 시적분법 및 수치방사조건이 비선형 방사문제에 매우 적합함을 확인하였다. 시적분 과정에서 자유표면의 격자점들을 재배치함으로써 수치해법의 효율성을 배가하였으며, 교차점근처의 유동 또한 정확하게 기술하였다. 가속도 포텐셜(acceleration potential) 기법을 이용하여 정확하고 안정하게 비선형 방사력을 구하였다. 본 수치계산결과는 다른 수치계산 및 실험결과와 비교하여 볼 때, 좋은 일치를 보인다.

#### Abstract

An accurate and efficient numerical method for two-dimensional nonlinear radiation problem has been developed. The wave motion due to a moving body is described by the assumption of ideal fluid flow, and the governing Laplace equation can be effectively solved by the higher-order boundary element method with the help of the GMRES(Generalized Minimal RESidual) algorithm. The intersection or corner problem is resolved by utilizing the so-called discontinuous elements. The

접수일자 : 1999년 10월 25일, 재접수일자 : 1999년 12월 15일

\*정회원, 서울대학교 공학연구소

\*\*정회원, 서울대학교 조선해양공학과

implicit trapezoidal rule is used in updating solutions at new time steps by considering stability and accuracy. Traveling waves caused by the oscillating body are absorbed downstream by the damping zone technique.

It is demonstrated that the present method for time marching and radiation condition works efficiently for nonlinear radiation problem. To avoid the numerical instability enhanced by the local gathering of grid points, the regriding technique is employed so that all the grids on the free surface may be distributed with an equal distance. This makes it possible to reduce time interval and improve numerical stability. Special attention is paid to the local flow around the body during time integration. The nonlinear radiation force is calculated by the "acceleration potential technique". Present results show good agreement with other numerical computations and experiments.

## 1. 서론

2차원 비선형 자유표면파 문제는 Longuet-Higgins & Cokelet[1]이 2차원 비선형파의 전파문제를 수치계산한 이후 지금까지 연구되고 있는 분야로 아직도 완전하게 해결되지 않은 부분이 많은 것으로 판단된다.

초기의 많은 연구들은 수치기법을 활용하여 비선형파의 특성을 보다 더 엄밀하게 이해한다는 차원에서 이루어진 경우가 많다[2, 3]. 이러한 수치기법의 정확도에 대한 정량적인 검토는 Dommermuth et al.[4]에 의하여 이루어졌다. 이들은 경계요소법을 이용하여 2차원 썩기형 쇄파를 계산하여 실험과 비교하였는데, 파형과 유체입자의 속도를 상당한 정도까지 추정할 수 있음을 입증하였다. 한편 Dold[5]는 2차원 비선형 자유표면파에 대한 수치기법에 대하여 보다 엄밀한 해석을 가하였으며, 이를 바탕으로 매우 빠르고 정확한 수치방법을 제시하였다.

2차원 비선형파의 생성 및 전파에 대한 연구와는 달리, 2차원에서 물체와 비선형파의 상호작용에 대한 연구는 근래에 이루어지고 있다. Tanizawa[6]는 비선형파에 의한 부유체의 운동을 비교적 정확하게 계산할 수 있는 수치기법을 제시하였다. 부유체의 운동을 정확하게 추정하기 위해서는 속도포텐셜의 시간미분치를 정확하게 계산하여야 하는데, 그는 가속도 포텐셜

(acceleration potential)의 개념을 활용하여 속도장과 동시에 속도포텐셜의 시간미분항을 손쉽게 구할 수 있는 방법을 제안하였다.

한편 국내에서도 이와 관련된 연구는 활발히 이루어졌는데[7-13], 이들 중 황종홍 등[7]은 전통적인 혼합 오일러-라그랑지안(MEL) 기법을 이용하여 원형실린더가 연직운동할 때 물체에 작용하는 비선형 동유체력을 수치계산하였으며, Yamashita[14]의 실험결과와 비교적 잘 일치하는 결과를 제시하였다.

근간 국제해양 및 극지공학회(International Society of Offshore and Polar Engineers, ISOPE)에서는 2차원 비선형 방사문제에 대한 표준검사(benchmark test)를 실시해 오고 있다[15]. 1999년도 표준검사에서는 삼각형 썩기의 운동에 의한 비선형방사력이 다루어졌는데, 실험결과와 비교한 자료를 보면 Tanizawa 및 Kashiwagi의 결과가 가장 우수한 것으로 보인다. 그러나 3차 조화성분에 있어서는 매우 큰 차이를 보이고 있다. 본 연구에서는 이 점에 착안하여 이에 대한 수치계산을 수행하였다.

본 연구에서는 2차원 비선형 방사문제에 대한 정확하고 효과적인 수치기법을 개발하고자 하였다. 2차 경계요소법과 GMRES(Generalized Minimal RESidual) 알고리즘[16]을 이용하여 수치해법의 속도와 효율성을 높였다. 교차선문제는 불연속 요소[17]를 이용하여 원활하게 해결하

였으며, 시적분 기법으로는 사다리꼴법칙 (trapezoidal rule)을 이용한 정확하고 안정적인 음함수법을 구축하였다. 수직 하류면에서 파의 반사를 줄이기 위하여 하류면에 수치감쇠항을 도입하였다. 시적분 과정에서 자유표면의 격자점들을 재배치함으로써 수치해법의 안정성을 증대하였다. Tanizawa의 방법을 이용하여 유체동압을 정확하고 안정하게 구하였다. 본 수치계산결과는 다른 수치계산 및 실험결과와 좋은 일치를 보인다

2. 수치정식화

비선형 자유표면파 문제는 물체 근처의 국부적 점성효과를 무시한다면 비점성 비회전성 유동에 의하여 기술될 수 있다. 따라서 속도포텐셜  $\phi(\vec{x}, t)$ 를 라플라스 방정식의 해로 얻을 수 있다. 본 논문에서는 삼각형 쇄기의 수직운동에 의해 생성되는 비선형파면에 대한 지배방정식 및 경계조건을 기술한다. 이에 대한 좌표계와 계산 영역은 Fig. 1과 같이 도시된다.

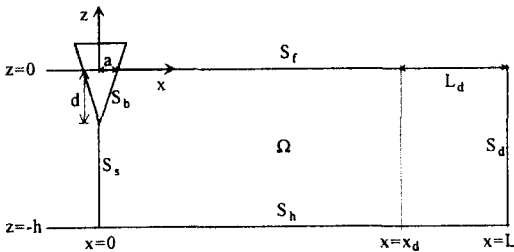


Fig. 1 Coordinate system and definition sketch

자유표면에서는 운동학적 및 동력학적 경계조건을 부여한다. 또한 물체면에서는 법선속도의 연속성을 부과한다. 따라서 지배방정식 및 경계조건은 아래와 같이 기술된다.

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{x} = (x, z) \in \Omega \quad (1)$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \vec{x} = (X, Z) \in S_f \quad (2)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nu Z, \quad \vec{x} = (X, Z) \in S_f \quad (3)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -gZ + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - \nu \phi, \quad \vec{x} = (X, Z) \in S_f \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{V}_b \cdot \vec{n}, \quad \vec{x} \in S_b \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \vec{x} \in S_s, S_h, S_d \quad (6)$$

여기에서  $\vec{X} = (X, Z)$ 는 자유표면의 물질좌표를 나타낸다. 계수  $\nu$ 는 수직하류면  $S_d$ 에 의하여 반사되는 파를 제거하기 위하여 자유표면의 하류에서 도입한 수치감쇠계수이다. 그리고  $\vec{V}_b$ 는 물체의 속도를 나타낸다. 바닥면  $z=-h$ 는 경상을 이용하여 수치계산함으로써 계산시간을 단축하였다.

본 연구에서 사용한 수치감쇠계수의 분포는 다음과 같다.

$$\nu = \begin{cases} 0 & x \leq x_d \\ \omega \frac{(x-x_d)}{L_d} \tanh \left[ \frac{\pi(x-x_d)}{L_d} \right] & x > x_d \end{cases} \quad (7)$$

여기에서  $x_d$ 는 감쇠가 시작되는 위치를 나타내며,  $L_d$ 는 감쇠계수가 적용되는 감쇠영역의 길이를 나타낸다.

본 문제에 대해서는 초기조건도 요구된다. 유체운동은 정지상태에서 시작되었다고 하면 다음과 같이 표현된다.

$$\phi(\vec{x}, t)|_{t=0} = 0, \quad \vec{x} \in \Omega \quad (8)$$

$$X|_{t=0} = X_0 \quad (9)$$

$$Z|_{t=0} = Z_0 \quad (10)$$

여기에서  $X_0$ 와  $Z_0$ 는 초기시간에 자유표면에 위치한 물질좌표의 위치를 나타낸다. 물체의 속도는 지정된 시제열에 의하여 주어진다고 가정한다.

본 연구에서는 위의 초기경계기문제를 풀기 위하여 시적분기법과 고차경계요소법을 결합하여 사용한다.

2.1 시적분기법

지금까지 자유표면과 문제에 대한 시적분 기법으로 사용된 방법은 여러 가지가 있으나, 주로 2차 Adams-Bashforth(AB2), 4차 Adams-Bashforth-Moulton(ABM4), 4차 Runge-Kutta(RK4) 방법 등의 양함수적 기법이 주종을 이루고 있다. 앞의 두 종류는 단단계 방법으로써 연산수 입장에서 효율적이거나 수치 안정성면에서 비효율적이며 시간격의 조절이 용이하지 않은 단점이 있다. 마지막 방법은 부단계(substep) 기법으로 정확도 및 안정성이 우수하고 시간격조절이 쉬우나, 안정성 조건에 의해서 과도한 시적분이 될 수 있다. 또한 양함수적 기법이므로 본 문제에서는 교차점근처에서 매시단계마다 물체와 자유표면의 상대운동을 고려해야 하는 단점이 있다.

본 연구에서는 음함수적 기법의 일종인 사다리꼴 법칙(trapezoidal rule)을 이용하였다. 사다리꼴 법칙은 다음과 같은

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u}, t) \tag{11}$$

초기치문제에 대하여 아래와 같은 식으로 수치해를 표현한다.

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + \frac{\delta t_n}{2} \{ \vec{f}(\vec{u}_n, t_n) + \vec{f}(\vec{u}_{n+1}, t_{n+1}) \} \tag{12}$$

여기에서  $\delta t_n$ 은 n 번째 시단계의 시간간격을 나타낸다. 그러나 일반적으로 위 식은  $\vec{u}_{n+1}$ 에 대한 비선형 방정식이 되므로 이에 대한 반복해법이 요구된다. 본 연구에서는 1차 오일러 추정을 이용하고 고정점반복(fixed point iteration) 기법을 이용하여  $\vec{u}_{n+1}$ 을 구한다.

$$\begin{aligned} & \vec{u}_{n+1}^{(k+1)} \\ &= \vec{u}_n + \frac{\delta t_n}{2} \{ \vec{f}(\vec{u}_n, t_n) + \vec{f}(\vec{u}_{n+1}^{(k)}, t_{n+1}) \}, \\ & \quad (k=0, 1, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \| \vec{u}_{n+1}^{(k)} - \vec{u}_{n+1}^{(k+1)} \| < \text{오차한계}, \\ \vec{u}_{n+1}^{(0)} &= \vec{u}_n + \delta t_n \vec{f}(\vec{u}_n, t_n) \end{aligned} \tag{13}$$

수치계산에서  $\vec{u}_n$ 은 n번째 시단계에서 자유표면에서의 속도포텐셜  $\phi$ , 자유표면의 위치  $X, Z$ 이다. 수렴조건에서 사용한 벡터의 크기(norm)는  $l_2$ -크기이다. 위에서는 수렴조건을 인접하는 근사해의 차이로 주었지만, 실제 사용한 수렴조건은 5장에서 설명하고자 한다.

본 시적분 기법은 2차정도(second-order accuracy)를 가지고 "무조건적으로 안정하다" 따라서 모든 크기의 시간격에 대하여 안정한 수치해를 주지만, 격자의 운동을 고려하여 적절한 시간격을 정하는 것이 바람직하다. 즉, 물체와 물체근처 격자간의 상대속도와 격자간의 관계를 이용하여 시간격을 구하게 된다. 이 때 여유인자는 10 혹은 5를 선택하여 계산하였다.

시적분 기법에 의해서  $t=t_n$ 에서 고려해야 할 경계치 문제는 다음과 같다.

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}, t_n) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega(t_n) \tag{14}$$

$$\phi(\vec{x}, t)|_{t=t_n} = \phi(\vec{x}, t_n), \quad \vec{x} \in S_f(t_n) \tag{15}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} |_{t=t_n} = \vec{V}_b(t_n) \cdot \vec{n}, \quad \vec{x} \in S_b(t_n) \tag{16}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} |_{t=t_n} = 0, \quad \vec{x} \in S_s(t_n), S_h(t_n), S_d(t_n) \tag{17}$$

위에서 우변항들은 경계조건으로 주어지거나 및 시적분단계에서 주어지거나 계산된다. 위와 같은 경계치 문제는 다음 절에서 설명할 2차 경계요소법에 의해 효과적으로 풀 수 있다.

2.2 고차경계요소법

고차경계요소법은 3차원 선형[18] 및 비선형 자유표면파 문제[19, 20]에서 널리 사용되어온 방법이다. 한편 2차원 비선형파 문제에 대해서는 대부분의 경우에 일정패널법을 적용한 것으로 조사되었다[7~13, 21]. 또한 이학민, 부성운[22]은 연속고차요소를 2차원 양력문제에 적용한 바

있다. 따라서 본 논문에서는 고차경계요소법에 대하여 특이성의 강도를 줄이는 방법과 불연속요소를 중심으로 간략히 기술하고, 특이적분의 수치계산에 대해서는 부록에서 자세히 다루었다.

경계요소법에서는 특이해를 이용하여 라플라스 방정식을 다음과 같은 경계적분방정식으로 나타낸다.

$$\alpha(\vec{x})\phi(\vec{x}) = \int_S \left[ \begin{matrix} \phi(\vec{\xi}) \frac{\partial G(\vec{\xi}-\vec{x})}{\partial n_{\vec{\xi}}} \\ -q(\vec{\xi})G(\vec{\xi}-\vec{x}) \end{matrix} \right] dl_{\vec{\xi}}, \vec{x} \in S$$

여기서

$$G(\vec{\xi}-\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\vec{\xi}-\vec{x}|} \tag{18}$$

위에서  $q(\vec{x}) = \partial\phi(\vec{x})/\partial n = \vec{n} \cdot \nabla\phi(\vec{x})$  로써 포텐셜의 법선미분을 나타낸다. 계수  $\alpha(\vec{x})$  는 내부곡면각으로서 부드러운 곡면위에서는 1/2이 되며, 순전히 곡면의 기하학적 형상에 의해서 구할 수 있다. 그러나 여기에서는 상수해를 고려하여 다음과 같은 해석적 표현식을 사용한다.

$$\alpha(\vec{x}) = \int_S \frac{\partial G(\vec{\xi}-\vec{x})}{\partial n_{\vec{\xi}}} dl_{\vec{\xi}} \tag{19}$$

이 식을 식 (18)에 대입하여 다음 식을 얻는다.

$$\int_S \left[ \begin{matrix} [\phi(\vec{\xi}) - \phi(\vec{x})] \frac{\partial G(\vec{\xi}-\vec{x})}{\partial n_{\vec{\xi}}} \\ -q(\vec{\xi})G(\vec{\xi}-\vec{x}) \end{matrix} \right] dl_{\vec{\xi}} = 0 \tag{20}$$

이렇게 함으로써 더블렛의 강도를 한 차수 낮출 수 있으며, 이 방법의 수치적인 효용성은 뒤에서 설명하기로 한다.

본 연구에서는 다음과 같은 2차 요소를 사용하였다.

$$[\vec{x} \ \phi(\vec{x}) \ q(\vec{x})] = \sum_{k=1}^3 N_k(\mu) [\vec{x}^{j,k} \ \phi^{j,k} \ q^{j,k}] \tag{21}$$

위 식 우변에서 상첨자의 첫 번째 인자는 해당 요소를 지칭하며, 두 번째 인자는 요소에서의 국부절점번호를 나타낸다. 여기에서 기저함수는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} N_1(\mu) &= \frac{\mu(\mu-d_2)}{d_1(d_1+d_2)}, \\ N_2(\mu) &= -\frac{(\mu+d_1)(\mu-d_2)}{d_1d_2}, \\ N_3(\mu) &= \frac{(\mu+d_1)\mu}{(d_1+d_2)d_2} \end{aligned} \tag{22}$$

여기서 상수  $d_1$  및  $d_2$  은 자유절점의 위치를 나타내는 것으로, Fig. 2에 보인 바와 같이 연속 요소의 경우는  $(d_1, d_2) = (-1, 1)$  이며, 좌불연속 요소인 경우는  $(d_1, d_2) = (d, 1)$  이고, 우불연속 요소인 경우는  $(d_1, d_2) = (-1, d)$  가 되는데, 본 연구에서는  $d = 2/3$  를 사용하였다. 불연속요소는 물체면과 자유표면의 교차점 등에 인접한 요소에 대하여 사용함으로써, 법선미분치의 연속성에 기인하는 교차점문제를 해결하였다.

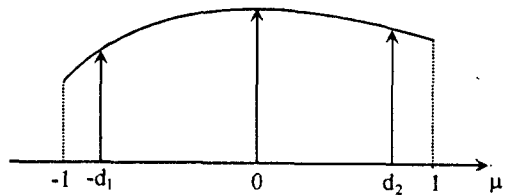


Fig.2 Generic elements for the continuous /discontinuous quadratic elements

위의 이산화방법과 함께 적분방정식을 각 절점에 적용하면 다음과 같은 선형방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & a(\vec{x}_i) \phi(\vec{x}_i) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 [\phi^{j,k} D^{j,k}(\vec{x}_i) - q^{j,k} S^{j,k}(\vec{x}_i)], \quad (23) \\ & \text{for } i=1, \dots, N \end{aligned}$$

위에서  $N_e$ ,  $N$ 은 각각 요소수 및 절점수를 나타내며, 계수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & D^{j,k}(\vec{x}_i) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 N_k(\mu) \frac{\vec{n}(\mu) \cdot [\xi(\mu) - \vec{x}_i]}{|\xi(\mu) - \vec{x}_i|^2} J(\mu) d\mu, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & S^{j,k}(\vec{x}_i) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 N_k(\mu) \ln |\xi(\mu) - \vec{x}_i| J(\mu) d\mu, \quad (25) \end{aligned}$$

위 식에서 특이점의 매개변수표현과 법선벡터 및 jacobian은 아래와 같다.

$$\xi(\mu) = (\xi(\mu), \eta(\mu)) = \sum_{m=1}^3 N_m(\mu) \vec{x}^{j,m}, \quad (26)$$

$$\vec{n}(\mu) = \left( \frac{\eta(\mu)}{d\mu}, -\frac{d\xi(\mu)}{d\mu} \right) / J(\mu) \quad (27)$$

$$J(\mu) = \left| \frac{d\xi}{d\mu} \right| \quad (28)$$

여기서 곡면각에 대한 표현식

$$a(\vec{x}_i) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 D^{j,k}(\vec{x}_i) \quad (29)$$

을 식 (23)에 대입하면, 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} [\phi^{j,k} - \phi(\vec{x}_i)] D^{j,k}(\vec{x}_i) \\ -q^{j,k} S^{j,k}(\vec{x}_i) \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

따라서  $\vec{x}^{j,k} \equiv \vec{x}_i$ 인 경우에  $D^{j,k}(\vec{x}_i)$ 는 계산

할 필요가 없게 되는데, 이 경우가 가장 특이성이 강한 경우이므로 수치계산상의 이득을 볼 수 있다.

식 (30)에서 영향계수  $D^{j,k}(\vec{x}_i)$ 와  $S^{j,k}(\vec{x}_i)$ 는 해당요소가 절점을 포함하지 않는 경우는 Gauss-Legendre 적분(23)을 이용하였다. 이 때 적분의 차수는 요소와 계산점의 거리에 따라 경험적인 식을 이용하여 차수를 결정하였다. 이 경우는  $S^{j,k}(\vec{x}_i)$ 와는 달리  $D^{j,k}(\vec{x}_i)$ 는 해석적분이 가능하지만, 해석적분이 정확도 및 연산수는 수치적분과 거의 같고, 두 가지 계수를 동시에 계산할 수 있으므로 두 가지 모두 수치적분으로 계산하였다.

요소위에 계산점이 놓이는 경우는 부록에서 보이는 바와 같이, 변수의 변환을 통하여 비특이적분으로 만들 수 있다.

식 (30)에서 경계조건을 대입하면 다음과 같은 최종적인 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$A \vec{u} = \vec{b}; \quad \sum_{j=1}^N A_{ij} u_j = b_i, \quad (i=1, \dots, N) \quad (31)$$

여기서 미지벡터  $\vec{u}$ 는  $S_e$ 상의  $\phi$ ,  $S_b$ 상의  $\phi$ ,  $S_f$ 상의  $q = \partial\phi/\partial n$ ,  $S_d$ 상의  $\phi$ 로 이루어진다. 우변벡터  $\vec{b}$ 는 경계조건에서 주어진  $\phi$ ,  $q$ 에 대한 영향을 합한 것이다. 따라서 해당 행렬  $A$ 는 (30)식에서 미지벡터의 인자에 곱해지는 계수들을 더한 것이다. 여기서 바닥면은 경상에 의해서 제거되었다.

선형방정식 식 (31)이 N개의 미지수에 대한 N개의 방정식이 된 것은 경계면과 경계면의 교차선에서 불연속요소를 사용한 것에 기인한다. 만약 불연속요소를 사용하지 않는다면, 식의 수보다 미지수가 더 많아지게 되는데, 이 때에는 보통 교차선근처에서 해를 근사하는 방법(17)을 사용할 수 있으나, 효율성 및 정확도면에서 바람직하지 않은 것으로 판단된다.

행렬방정식에서 행의 배치는 절점의 순서에 따라 적용하였고, 열의 배치는 (30)식에서 요소와

절점간의 연결성(connectivity)을 고려하여 절점 순서에 따른다. 반복해법을 사용할 때는 행렬의 조건이 해법의 수렴에 직접영향을 주기 때문에, 사실상 행렬방정식의 구성은 단순한 문제가 아니다. 본 연구에서는 이와 같은 방법이 GMRES 알고리즘[16]에 대하여 수렴성이 좋다는 것을 확인하였다.

3차원 비선형과 문제에서 매우 과도한 시적분 때문에 GMRES 알고리즘과 같은 반복해법의 적용은 매우 필수적인 것으로 알려져 있다[18, 19]. 본 연구에 의하면 물체의 운동에 의해서 발생하는 비선형과의 운동을 수치계산하기 위해서는 시간격이 1/100이하로 되어야 하는 경우가 많으며, 미지수의 개수가 보통 500 정도가 된다. 따라서 10주기 이상까지 계산하려면 선형방정식을 수 천 회에 걸쳐 풀어야 하므로 2차원 비선형과 문제에서도 신속한 해를 구하기 위해서는 효과적인 반복해법을 이용하지 않으면 안된다. 그러므로 본 연구에서는 가장 효과적인 반복해법으로 알려진 GMRES 알고리즘을 사용하였다.

GMRES 알고리즘의 수렴조건에서 오차한계를 지정하여야 하는데, 본 연구에서는 다음과 같이 무차원화된 형태의 수렴조건을 사용하였다.

$$\epsilon = \frac{\|\vec{b} - \mathbf{A} \vec{x}_{GMRES}\|}{\|\vec{b}\|} < \epsilon_{GMRES} \quad (32)$$

여기에서  $\vec{x}_{GMRES}$ 는 GMRES 알고리즘에 의한 근사해를 지칭하며, 벡터의 크기는  $l_2$ -크기를 사용한다. 만약 수렴조건을 우변벡터로 나누어지지 않은 식을 사용하면, 근사해의 수렴성에 대하여 엄밀한 판단을 내리기 곤란하다. GMRES 알고리즘을 사용하면 (32)식의 잉여오차벡터 크기가 계산과정에서 직접 계산없이 구해지므로 위의 수렴조건을 적용하는 것이 용이하다. 본 연구에서는 오차한계를 시적분의 초기 몇 단계에서는  $\epsilon_{GMRES} = 10^{-5}$ 를, 그 이후에는  $\epsilon_{GMRES} = 10^{-6}$ 을 택하였다.

### 3. 비선형 방사력 계산

물체에 작용하는 연직방향의 비선형 방사력은 베르누이 방정식에 의하여 다음 식과 같이 계산된다.

$$F_z = \int_{S_i} p n_z d\Gamma \quad (33)$$

$$p = -\rho \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g z \right]$$

여기서  $n_z$ 는 법선벡터의 연직방향성분이다. 베르누이 방정식의 두 번째 항은 경계조건에서 주어지고, 경계요소해석에서 정확하게 계산되는  $\phi_n$ 와  $\phi$ 값과 기저함수의 미분식을 이용하여 구할 수 있다. 그러나  $\phi$ 에 대한 경계요소법으로는 손쉽게 계산되지 않는 것이 바로  $\partial \phi / \partial t$ 이다. 이의 계산은 후방차분을 통해서 계산할 수도 있으나[7], 정확도에 문제가 있는 것으로 인식되고 있다.

근래에는  $\partial \phi / \partial t$ 에 대한 계산법으로 전술한 ISOPE의 표준검사에서도 드러난 바와 같이 Tanizawa[6]에 의해서 제안된 방법이 매우 효과적인 것으로 알려져 있다. Tanizawa는  $\partial \phi / \partial t$ 에 대한 경계치문제를 형성하고 이를 포텐셜  $\psi$ 에 대한 경계치문제와 동일한 방식으로 풀 수 있음을 보인 바 있다. 이러한 개념은 "가속도 포텐셜"이라는 개념에 의해서 도출되었으며,  $\psi = \partial \phi / \partial t$ 에 대한 지배방정식 및 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega \quad (34)$$

$$\psi = -gZ - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - v \phi, \quad \vec{x} \in S_f \quad (35)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \vec{A}_b \cdot \vec{n} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial}{\partial s} \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial s} \right] - \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] + x_b |\nabla \phi|^2, \quad \vec{x} \in S_b \quad (36)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \vec{x} \in S_s, S_h, S_d \quad (37)$$

여기서  $\vec{A}_b$ 는 물체의 가속도,  $x_b$ 는 물체의

법선곡률(normal curvature)을 의미한다. 식 (36)은 가속도 포텐셜의 법선미분치와 물체가속도의 법선방향성분을 일치시킴으로써 구할 수 있다.

위 식과 식 (14)~(17)을 비교하면  $\phi$ 와  $\psi$ 는 동일한 형태의 경계조건을 가진 라플라스 방정식의 해임을 확인할 수 있다. 그러므로  $\psi = \partial\phi/\partial t$ 를 계산하기 위해서는  $\phi$ 를 구하는 과정에서 구한 영향계수를 그대로 이용할 수 있으므로,  $\psi = \partial\phi/\partial t$ 를 구하기 위해 필요한 계산시간은 전체 계산시간에 거의 영향을 주지 않는다.

#### 4. 격자점 재배치 및 물체근처 유동

시적분 과정에서 격자점들이 속도가 빠른 점 근처로 모이게 되어 안정성 요건에 따라 시적분 간격이 줄어들어 과도한 수치계산이 될 수 있다. 또한 격자점의 간격이 변하는 것은 경계요소법의 정확도를 떨어뜨릴 수 있는 요소이기도 하다. 한편, 황종홍 등[7]도 원형 실린더에 의한 비선형파의 생성 및 전파문제를 수치계산할 때, 격자점 재배치의 필요성을 역설한 바 있다. 따라서 본 연구에서는 이를 방지하기 위하여 매 시단계마다 격자점의 간격이 일정하도록 재배치하는 기법을 사용하였다. 격자점의 재배치에 따라 포텐셜도 다시 계산되어야 한다.

시적분 과정에서 자유표면의 양끝단에서는 물질 좌표의 위치와 불연속 2차요소의 끝점이 일치하지 않는 현상이 나타난다. 그러므로 본 수치해법에서는 반복과정에서 내삽을 이용하여 이와 같은 불일치 현상에서 나올 수 있는 불안정성 및 부정확성을 제거하였다.

#### 5. 내부 및 외부반복의 수렴조건

본 수치방법에서는 각 시단계에서 비선형 방정식의 해를 찾기 위한 내부반복이 있고, 원하는 시간까지 시적분하기 위한 외부반복으로 구성하였다. 외부반복 및 내부반복에서도 선형방정식의 해가 필요한데, 본 연구에서는 선형방정식의 해법으

로 GMRES를 사용하므로 각각에 대하여 수렴조건에서 오차한계를 주어야 한다.

일반적으로 이와 같이 내부 및 외부반복이 있는 경우에는 내부반복의 오차한계가 외부반복의 오차한계보다 조금 크게 하는 것이 보통이다. 본 연구에서는 내부반복의 오차한계와 외부반복의 오차한계를 같게 하였다. 이는 내부반복과정에서 얻어지는 해들도 되도록 정확하게 계산하는 것이 반복해의 수렴에 도움이 된다고 판단했기 때문이다.

본 연구에서 택한 내부반복의 수렴조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_\phi + \epsilon_X + \epsilon_Z < 3\epsilon_{TR} \\ \epsilon_\phi &= \frac{\|\phi_n^{(k+1)} - \phi_n^{(k)}\|}{\phi_c}, \quad \phi_c = \frac{gA}{\omega} \\ \epsilon_X &= \frac{\|X_n^{(k+1)} - X_n^{(k)}\|}{X_c}, \quad X_c = A \\ \epsilon_Z &= \frac{\|Z_n^{(k+1)} - Z_n^{(k)}\|}{Z_c}, \quad Z_c = A \end{aligned} \tag{38}$$

여기서  $\phi_c$ ,  $X_c$  및  $Z_c$ 는 각각 자유표면에서의  $\phi$ , 자유표면의 위치  $X, Z$ 에 대한 특성값으로,  $A$ ,  $\omega$ 는 물체운동의 진폭과 주파수를 나타낸다.

본 연구에서 사용한 내부반복의 오차한계는 시적분의 초기 몇 단계에서는  $\epsilon_{TR} = 10^{-7}$ , 그 이후에는  $\epsilon_{TR} = 10^{-8}$  을 사용하였다.

#### 6. 수치계산결과

개발된 수치해법을 몇 가지 경우에 적용하여 보았다. 다음과 같이 물체가 연직방향으로 진폭  $A$  로 조화동요하고 있을 때 연직방향의 비선형 동유체력을 구하고자 한다.

$$Z_b(t) = A \sin(\omega t) \tag{39}$$

이를 위하여 초기시간의 충격적인 반응을 억제하기 위하여 다음과 같이 물체의 운동을 조절하였다.



$$Z_b(t) = A \sin(\omega t) f_m(t)$$

여기서 (40)

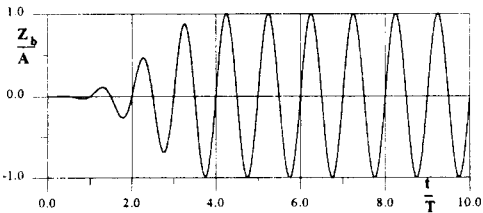
$$f_m(t) = \begin{cases} \sin^3\left[\frac{\pi t}{2T_m}\right] & 0 < t < T_m \\ 1 & t \geq T_m \end{cases}$$

위 식에서  $T_m$ 은 "조절주기(modulation period)"로 본 계산에서는  $T_m = 4T$ 을 사용하였다. 조절함수  $f_m(t)$ 는 물체의 속도 및 가속도가 초기시간에 급격하게 변하지 않도록 한다.

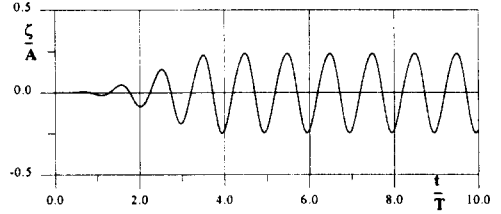
본 수치계산에서는  $a = 0.4d$  이고  $h = 3d$ 인 형상에 대한 비선형 방사파를 다룬다. 서론에서 논한 바와 같이 이는 ISOPE 표준점사에서 채택한 문제와 같다. 이에 대하여 대략 한 파장당 24개의 2차요소를 사용하였으며, 다른 경계면의 요소수는 교차점을 지나면서 요소의 길이변화가 심하지 않도록 하였다. 계산영역의 수평방향길이와 감쇠지역의 길이는 각각  $L = 7\lambda$ ,  $L_d = 2\lambda$ 로 하였다. 여기에서  $\lambda$ 는 해당하는 선형파의 길이를 나타낸다.

수치계산의 예는  $A/a = 0.6$ 이고,  $\omega^2 a/g$ 가 0.2 및 0.6인 경우를 다룬다. 이 두 가지 경우에 대하여 Tanizawa의 수치계산결과와 Yamashita의 실험결과와 비교하였다.

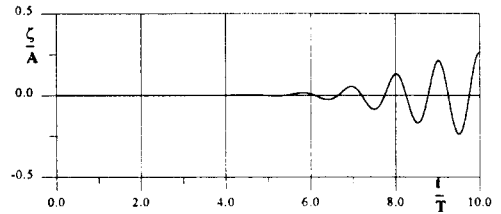
Fig. 3에  $A/a = 0.6$ ,  $\omega^2 a/g = 0.2$ 인 경우에 대한 자유표면의 운동을 도시하였다. 조절주기가 후에 물체주위의 유동은 곧 조화 정상상태에 이르게 됨을 알 수 있고, 하류면에서 비선형효과가 파감쇠기법에 의하여 매우 잘 흡수되고 있음을 확인할 수 있다.



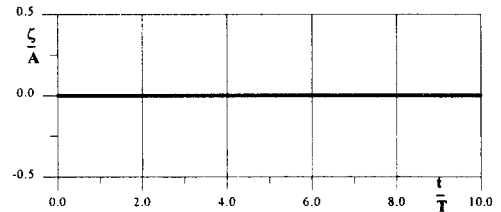
(a) time history of the body motion



(b) surface elevation at the far upstream



(c) surface elevation at the midstream



(d) surface elevation at the far downstream

Fig. 3 Time histories of body motion and surface elevations ( $A/a = 0.6$ ,  $\omega^2 g/a = 0.2$ )

이 경우 Tanizawa의 수치결과와 비교하기 위하여 Fig. 4에 물체에 작용하는 전체 힘을 비교하였다. 조절주기 이후에 두 결과는 매우 잘 일치하고 있다. 조절주기 이전에 보이는 차이점은 물체의 초기 운동이 다소 다른 방식으로 주어졌기 때문이다.

이 밖에  $A/a = 0.6$ ,  $\omega^2 a/g = 0.6$ 인 경우도 Tanizawa의 계산결과와 잘 일치함을 확인하였고, 여기에서는 Fig. 5에 전체힘과 동유체력을 도시하였다.

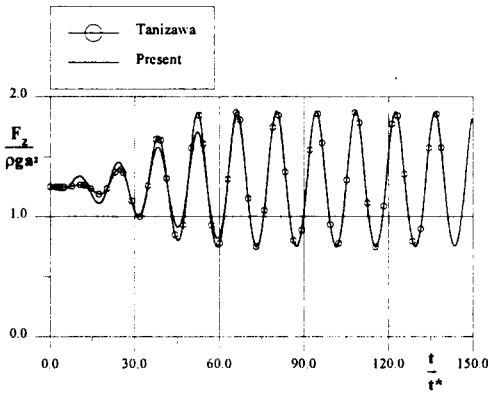


Fig. 4 Comparison of the total force  
( $t^* = \sqrt{a/g}$ ,  $A/a=0.6$ ,  $\omega^2 g/a=0.2$ )

Fig. 4와 Fig. 5에서 보는 바와 같이 전체힘의 시계열은 오히려 정현파에 매우 가까운 모양이다. 그러나 Fig. 5의 동유체력을 보면 파정이 높아지고 파저가 평평해지는 경향을 보이고 있음을 확인할 수 있다. 또한 파정 및 파저 전후에 비대칭 형태를 보이고 있다.

Fig. 6에 10주기 이후의 자유표면의 모양을 보였다. 물체운동에 의하여 만들어진 비선형파가 중간영역을 지난 이후에 감쇠지역근처에서부터 조금씩 감쇠되어 하류에서는 완전히 감쇠된 것을 볼 수 있다.

수치해의 시간에 따른 변화를 보기 위하여 Fig. 7에 자유표면전체의 모습을 제시하였다. 이로부터 수치해가 물체운동에 의해 생성된 비선형파를 효과적으로 묘사하고 있음을 알 수 있다. 그림에서 x방향으로 진한부분은 물체와 가장 가까운 격자와 물체의 상대운동속도가 큰 경우 시간격이 줄어든 부분이다.

본 수치계산결과를 Tanizawa 및 실험에서 얻어진 무차원 계수와 비교하였다(Table 1). 표에서  $F_{1s}$ ,  $F_{1c}$ ,  $F_0^*$ ,  $F_2^*$ ,  $F_3^*$ 는 각각 부가질량, 감쇠, 2차항의 상수부분, 조화진폭, 3차조화진폭에 대한 무차원값이다. 표에서 주어진 치수중 Tanizawa의 계산 및 Yamashita의 실험결과는 Tanizawa[15]의 그래프로부터 읽은 값이다.

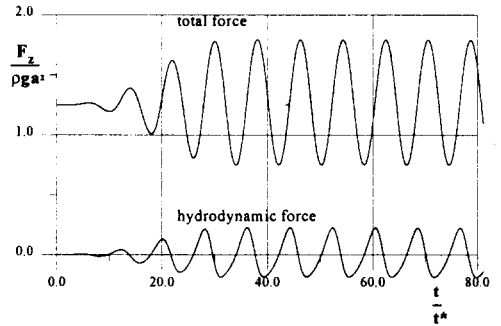


Fig. 5 Time series of the hydrodynamic and total forces  
( $A/a=0.6$ ,  $\omega^2 g/a=0.6$ )

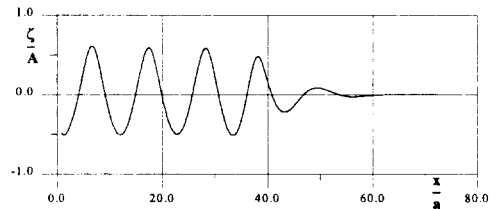


Fig. 6. Free surface shape at  $t=10T$   
( $A/a=0.6$ ,  $\omega^2 g/a=0.6$ )

적절한 비교를 위하여 Tanizawa와 본 계산의 주요 항목에 대한 차이점 및 공통점을 Table 2에 기술하였다. 본 연구의 2차요소는 Tanizawa의 선형요소에 비하여 비선형파면을 보다 더 정확하게 표현할 수 있으며, 불연속요소가 이중절점기법 보다는 더 체계적으로 교차점문제를 다룰 수 있다. 그리고 본 연구의 음해적 사다리꼴법칙은 RK4에 비하여 보다 더 안정적인 방법이다. 따라서 본 수치해법이 Tanizawa의 결과보다 조금 더 정확하고 안정적인 해를 주게 된다.

Table 1에서 본 계산결과가 Tanizawa의 수치계산과 잘 일치하며, 실험결과와도 3차 조화성분을 제외하고는 대체로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 서론에서 논의한 바와 같이 ISOPE 표준점사에서도 모든 수치계산결과들이 3차 조화성분에 있어서는 일치도가 많이 떨어지는 결과를 보

였다.

Table 1 Comparison of force coefficients

		$F_{1s}^*$	$F_{1c}^*$	$F_0^*$	$F_2^*$	$F_3^*$
I	Present	0.77	0.82	0.089	0.084	0.004
	Tanizawa	0.77	0.84	0.100	0.094	0.003
	Experiment	0.82	0.72	0.056	0.089	0.007
II	Present	0.56	0.73	0.058	0.015	0.026
	Tanizawa	0.53	0.74	0.078	0.017	0.025
	Experiment	0.67	0.73	0.039	0.022	0.097

\* 표에서 I, II는 다음을 나타낸다.

I :  $A/a = 0.6, \omega^2 a/g = 0.2$

II :  $A/a = 0.6, \omega^2 a/g = 0.6$

Table 2 Comparison of the numerical methods

	Present	Tanizawa
경계요소법	2차요소	1차요소
교차점문제	불연속요소	이중절점기법
시적분기법	음해적 사다리꼴법칙	RK4
수치방사조건	수치감쇠기법	수치감쇠기법
유체동압계산	$\phi_i$ 에 대한 경계치문제	$\phi_i$ 에 대한 경계치문제

### 7. 결론

본 연구에서는 2차원 비선형 방사문제에 대한 정확하고 효과적인 수치기법을 개발하였다. 수치 계산 결과로부터 음함수적 시적분법과 본 수치방사조건이 비선형 방사문제에 매우 적합함을 확인

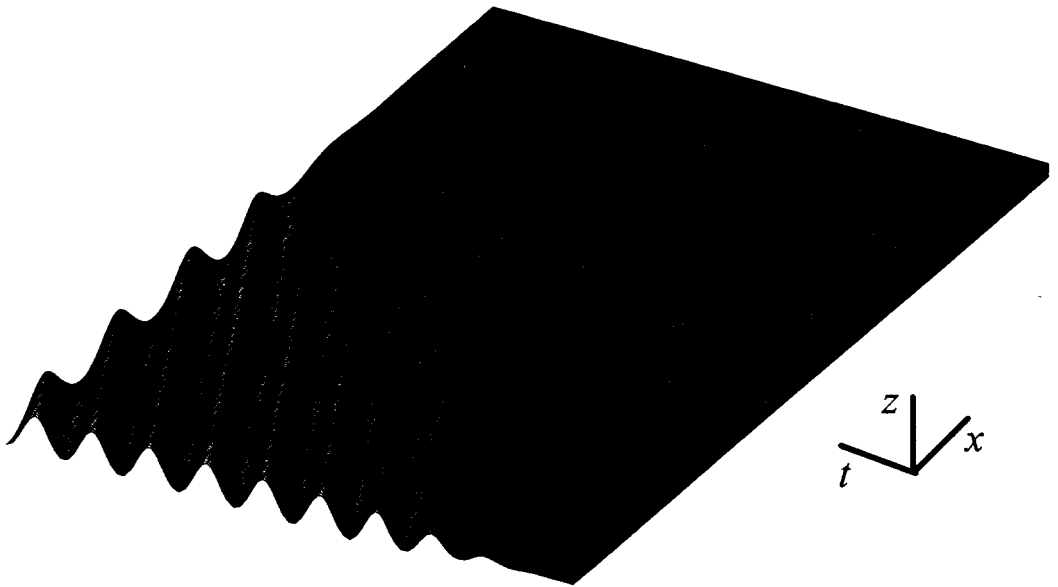


Fig. 7 Evolution of the free surface ( $A/a=0.6, \omega^2 g/a = 0.6$ )

할 수 있었다. 가속도 포텐셜 기법을 이용하여 정확하고 안정하게 비선형 방사력을 구하였다. 본 수치계산결과는 Tanizawa의 수치계산결과와 매우 잘 일치하며, 실험결과와 비교하여 볼 때는 3차 조화성분을 제외하고는 좋은 일치를 보인다. 앞으로 본 수치해법의 성능을 보다 엄밀하고 정확하게 조사하기 위해서 다양한 경우에 대한 수치계산을 시도하여야 한다.

#### 후 기

본 연구는 KRISO 연구과제 "심해 계류인장각식 플랫폼의 모형시험 기법 개발"의 지원을 받은 것입니다. 이에 저자는 기관에 사의를 표합니다.

#### 참 고 문 헌

- [1] Longuet-Higgins, M.S. and Cokelet, E.D., "The Deformation of Steep Surface Waves on Water, I. A Numerical Method of Computations", Proc. Roy. Soc. London, A Vol. 350, pp. 1-26, 1976.
- [2] Baker, G.R., Meiron, D.I. and Orszag, S.A., "Generalized Vortex Methods for Free-surface Flow Problems", J. Fluid Mech., Vol. 123, pp. 477-501, 1982.
- [3] New, A.L., McIver, P. and Peregrine, D.H., "Computations of Overtopping Waves", J. Fluid Mech., Vol. 150, pp. 233-251, 1985.
- [4] Dommermuth, D.G., Yue, D.K.P., Lin, W.M., Rapp, R.J., Chan, E.S. and Melville, W.K., "Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments", J. Fluid Mech., Vol. 184, pp. 267-288, 1988.
- [5] Dold, J.W., "An Efficient Surface-Integral Algorithm Applied to Unsteady Gravity Waves", Journal of Computational Physics, Vol. 103, pp. 90-115, 1992.
- [6] Tanizawa, K., "Nonlinear simulation of floating bodies in waves", Proceedings of the Sixth International Offshore and Polar Engineering Conference, Vol. 3, pp. 414-420, 1996.
- [7] 황종홍, 김용직, 김선영, "대진폭강제동요시의 비선형유체력에 관한 연구", 대한조선학회지 제 23권 2호, pp.1-13, 1986.
- [8] 황종홍, 김용직, 이승수, "동요하는 2차원물수체에 작용하는 선형 및 비선형 동유체력에 미치는 전진속도의 영향", 대한조선학회지 제 24권 2호, pp.47-54, 1987.
- [9] 조일형, 최항순, "2차원 쇄파의 수치해석", 대한조선학회지 제 25권 4호, pp.1-6, 1988.
- [10] 김용직, "규칙파중에서의 주상체의 대진폭 운동에 관한 연구", 대한조선학회지 제 26권 제 2호 pp. 25-31, 1989.
- [11] 이호영, 황종홍, "주상체의 비선형 운동(I) - 강제동요문제, 조파저항문제", 대한조선학회 논문집 제 29권 제4호 pp. 114-131, 1992.
- [12] 이호영, 황종홍, "주상체의 비선형 운동(II) - 전진동요문제, 파랑중의 운동", 대한조선학회 논문집 제 30권 제1호 pp. 45-64, 1993.
- [13] 이호영, 황종홍, "부유체의 대진폭 운동에 기인한 동유체력", 대한조선학회논문집 제 30권 제2호 pp. 86-97, 1993.
- [14] Yamashita, S., "Calculations of the Hydrodynamic Forces Acting upon Thin Cylinders Oscillating Vertically with Large Amplitude", Journal of Society of Naval Architecture of Japan, Vol. 141, 1977.
- [15] Tanizawa, K., "<http://www.srimot.go.jp/dyn/member/tanizawa/nwtws1999/index.html>", 1999년도 ISOPE 표준검사 공식 웹사이트, 1999.
- [16] Saad, Y. and Schultz, M.H., "GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems", SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 7, pp. 856-869, 1986.
- [17] Paris, F. and Canas, J., "Boundary Element Method: Fundamentals and Applications", Oxford University Press, 1997.

- [18] 홍사영, 최항순, "고차경계요소법에 의한 선체 주위 유동해석", 대한조선학회논문집 제 32권 제 1호, pp. 42-57, 1995.
- [19] 성홍근, 홍사영, 최항순, "비선형 자유표면파의 수치해석을 위한 경계요소법에 대한 연구 (I)", 대한조선학회논문집 제 34권 제4호 pp. 53-60, 1997.
- [20] 성홍근, "고차경계요소법을 이용한 3차원 비선형 산란문제의 수치해석", 서울대학교 공학박사학위논문, 1999.
- [21] 박일룡, 전호환, "자유수면하에서 이동하는 2차원 수중의 주위의 비선형 유동특성", 대한조선학회논문집 제 35권 제 2호, pp. 8-19, 1998.
- [22] 이학민, 부성운, "연속고차경계요소법을 이용한 2차원 양력문제 해석", 1996년도 대한조선학회 추계학술대회 논문집, pp. 282-291, 1996.
- [23] Davis, P.J. and Rabinowitz, P., "Methods of Numerical Integration", 2nd ed., Academic Press, Inc., 1984.

여기서  $s=(\mu+1)/2$ 의 치환을 이용하면 아래와 같이 간단히 표현된다.

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(\mu) - \vec{x}_i &= s \sum_{m=1}^3 H_m(s) \vec{x}^{j,m} \\ &\equiv s \vec{R}(s) \equiv s(R_x(s), R_z(s)) \end{aligned} \tag{A.2}$$

따라서  $k \neq 1$ 일 때는 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} D^{j,k}(\vec{x}_i) &= \int_0^1 H_k(s) \frac{\vec{n}(2s-1) \cdot \vec{R}(s)}{\pi |\vec{R}(s)|^2} J(2s-1) ds \end{aligned} \tag{A.3}$$

그리고  $k=1$  일 때는 아래처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} D^{j,1}(\vec{x}_i) &= \int_0^1 [1 + sH_1(s)] \frac{\vec{n}(2s-1) \cdot \vec{R}(s)}{\pi s |\vec{R}(s)|^2} J(2s-1) ds \end{aligned} \tag{A.4}$$

**부록: 적분요소위에 계산점이 놓인 경우에 대한 영향행렬의 수치계산**

불연속 요소는 연속요소와 동일한 방식으로 적용가능하므로, 여기에서는 연속요소에 대한 경우만을 다루기로 한다.

**Case 1:  $\vec{x}_i = \vec{x}^{j,1}$**

적용점이 해당 적분요소의  $\mu=-1$ 에 해당하는 경우인데, 이때의 상대위치벡터는 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(\mu) - \vec{x}_i &= \sum_{m=1}^3 N_m(\mu) \vec{x}^{j,m} - \vec{x}^{j,1} \\ &= \sum_{m=1}^3 [N_m(\mu) - \delta_{m1}] \vec{x}^{j,m} \\ &= \frac{1}{2} (\mu+1) [(\mu-2) \vec{x}^{j,1} - 2(\mu-1) \vec{x}^{j,2} + \mu \vec{x}^{j,3}] \end{aligned} \tag{A.1}$$

여기서  $D^{j,1}(\vec{x}_i)$ 는 내부곡면각의 계산식에 의하여 계산할 필요가 없지만 굳이 계산하고자 한다면 추가적으로 다음을 이용해야 한다.

$$\begin{aligned} \vec{n}(\mu) J(\mu) &= \left( \frac{d\eta(\mu)}{d\mu}, -\frac{d\xi(\mu)}{d\mu} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\eta}{ds}, -\frac{d\xi}{ds} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( R_z + s \frac{dR_z}{ds}, -R_x - s \frac{dR_x}{ds} \right) \end{aligned} \tag{A.5}$$

따라서 법선벡터와 상대위치벡터의 내적은 다음과 같이 간단하게 정리된다.

$$\begin{aligned} \vec{n}(\mu) J(\mu) \cdot \vec{R} &= \frac{1}{2} \left( R_z + s \frac{dR_z}{ds}, -R_x - s \frac{dR_x}{ds} \right) \cdot (R_x, R_z) \\ &= \frac{1}{2} s \left[ R_x \frac{dR_z}{ds} - R_z \frac{dR_x}{ds} \right] \end{aligned} \tag{A.6}$$

여기서 []부분은 해당요소에서 절점의 상대위치에 따라 결정되는 값이다.

그러므로, 영향계수는 다음과 같이 정리된다.

$$D^{j,1}(\vec{x}_i) = \int_0^1 [R_x \frac{dR_z}{ds} - R_z \frac{dR_x}{ds}] \frac{[1 + sH_1(s)]}{2\pi |\vec{R}(s)|^2} ds \tag{A.7}$$

사실상 위의 식을 유도하는 과정을 보면  $D^{j,k}(\vec{x}_i)$  모두 위의 식 (A.7)처럼 나타낼 수 있다.

$$D^{j,k}(\vec{x}_i) = \int_0^1 [R_x \frac{dR_z}{ds} - R_z \frac{dR_x}{ds}] \frac{[\delta_{ki} + sH_k(s)]}{2\pi |\vec{R}(s)|^2} ds \tag{A.8}$$

여기서 피적분함수의 첫 번째 []부분은 더 간단하게 할 수 있다. 벡터  $\vec{R}(s)$ 는 다음과 같이 s에 관한 일차식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \vec{R}(s) &= \vec{E}s + \vec{F} \\ \vec{E} &= 2[\vec{x}^{j,1} - 2\vec{x}^{j,2} + \vec{x}^{j,3}], \\ \vec{F} &= -3\vec{x}^{j,1} + 4\vec{x}^{j,2} - \vec{x}^{j,3} \end{aligned} \tag{A.9}$$

그러므로 아래와 같이 간단히 됨을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} K_j &\equiv R_x \frac{dR_z}{ds} - R_z \frac{dR_x}{ds} = E_z F_x - E_x F_z \\ &= 4 [ x^{j,1}(z^{j,2} - z^{j,3}) + x^{j,2}(z^{j,3} - z^{j,1}) \\ &\quad + x^{j,3}(z^{j,1} - z^{j,2}) ] \end{aligned} \tag{A.10}$$

이제 더블렛에 의한 영향계수는 다음 식과 같이 간단하게 표현될 수 있다.

$$D^{j,k}(\vec{x}_i) = \frac{2L_j}{\pi} \int_0^1 \frac{[\delta_{ki} + sH_k(s)]}{|\vec{R}(s)|^2} ds$$

여기서

$$L_j = x^{j,1}(z^{j,2} - z^{j,3}) + x^{j,2}(z^{j,3} - z^{j,1}) + x^{j,3}(z^{j,1} - z^{j,2}) \tag{A.11}$$

피적분함수는 분모분자가 모두 2차식이므로 해석적분도 가능하다.

한편 소스에 의한 영향계수는 아래와 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} S^{j,k}(\vec{x}_i) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 N_k(2s-1) \ln|s\vec{R}(s)| J(2s-1) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 N_k(2s-1) J(2s-1) \ln|\vec{R}(s)| ds \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^1 N_k(2s-1) J(2s-1) \ln s ds \end{aligned} \tag{A.12}$$

여기서 첫 번째 항은 Gauss-Legendre 적분으로 계산가능하다. 두 번째 적분은 log-특이성을 갖는 함수의 Gauss 적분을 이용하면 매우 정확하게 적분된다[16].

**Case 2:**  $\vec{x}_i = \vec{x}^{j,2}$

적용점이 적분요소의 가운데점인  $\mu=0$ 에 해당하는 경우로 상대위치벡터는 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(\mu) - \vec{x}_i &= \sum_{m=1}^3 N_m(\mu) \vec{x}^{j,m} - \vec{x}^{j,2} \\ &= \sum_{m=1}^3 [N_m(\mu) - \delta_{m2}] \vec{x}^{j,m} \\ &= \mu \left[ \frac{1}{2} (\mu-1) \vec{x}^{j,1} - \mu \vec{x}^{j,2} + \frac{1}{2} (\mu+1) \vec{x}^{j,3} \right] \end{aligned} \tag{A.13}$$

따라서  $-1 < \mu < 0$  의 구간에서는  $s = -\mu$ 의 치환을 사용하여 아래와 같이 변환이 가능하다.

$$\begin{aligned} & \vec{\xi}(\mu) - \vec{x}_i \\ &= s \left[ \frac{1}{2} (s+1) \vec{x}^{j,1} - s \vec{x}^{j,2} + \frac{1}{2} (s-1) \vec{x}^{j,3} \right] \end{aligned} \quad (A.14)$$

마찬가지로  $0 < \mu < 1$ 의 구간에서는  $s = \mu$ 의 치환을 이용하여 다음과 같은 식으로 정리한다.

$$\begin{aligned} & \vec{\xi}(\mu) - \vec{x}_i \\ &= s \left[ \frac{1}{2} (s-1) \vec{x}^{j,1} - s \vec{x}^{j,2} + \frac{1}{2} (s+1) \vec{x}^{j,3} \right] \end{aligned} \quad (A.15)$$

따라서 상대위치벡터는 구간에 따라서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \vec{\xi}(\mu) - \vec{x}_i \\ &= \begin{cases} s \sum_{m=1}^3 H_m^+(s) \vec{x}^{j,m} \equiv s \vec{R}^+(s), & 0 < \mu < 1 \\ s \sum_{m=1}^3 H_m^-(s) \vec{x}^{j,m} \equiv s \vec{R}^-(s), & -1 < \mu < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A.16)$$

그러므로 더블렛에 의한 영향계수는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & D^{j,k}(\vec{x}_i) \\ &= \frac{K_j^+}{2\pi} \int_0^1 \frac{[\delta_{jk} + sH_k^+(s)]}{|\vec{R}^+(s)|^2} ds \\ &+ \frac{K_j^-}{2\pi} \int_0^1 \frac{[\delta_{jk} + sH_k^-(s)]}{|\vec{R}^-(s)|^2} ds \end{aligned} \quad (A.17)$$

여기서

$$\begin{aligned} K_j^+ &= R_x^+ \frac{dR_z^+}{ds} - R_z^+ \frac{dR_x^+}{ds}, \\ K_j^- &= R_x^- \frac{dR_z^-}{ds} - R_z^- \frac{dR_x^-}{ds} \end{aligned}$$

각 구간에서  $K_j^+$ 와  $K_j^-$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_j^+ &= \frac{1}{2} L_j, \\ K_j^- &= -\frac{1}{2} L_j = -K_j^+ \end{aligned} \quad (A.18)$$

따라서 영향계수는 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & D^{j,k}(\vec{x}_i) \\ &= \frac{L_j}{4\pi} \int_0^1 \frac{[\delta_{jk} + sH_k^+(s)]}{|\vec{R}^+(s)|^2} ds \\ &- \frac{L_j}{4\pi} \int_0^1 \frac{[\delta_{jk} + sH_k^-(s)]}{|\vec{R}^-(s)|^2} ds \end{aligned} \quad (A.19)$$

한편 소오스에 의한 영향계수는 다음과 같이 각 구간에 대한 영향계수를 합한 것이다.

$$\begin{aligned} & S^{i,k}(\vec{x}_i) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 N_k(s) J(s) \ln |\vec{R}^+(s)| ds \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 N_k(s) J(s) \ln s ds \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 N_k(-s) J(-s) \ln |\vec{R}^-(s)| ds \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 N_k(-s) J(-s) \ln s ds \end{aligned} \quad (A.20)$$

위 식 우변에서 두 번째와 네 번째 항은 log-특이성을 가지는 적분에 대한 Gauss 적분공식을 활용한다.

### Case 3: $\vec{x}_i = \vec{x}^{j,3}$

적용점이 적분요소의  $\mu = 1$ 에 해당하는 경우인데, 이 경우는  $\nu = -\mu$ 와 같이하여 적분의 방향을 바꾸면 Case 1과 동일한 방식으로 계산할 수 있다. 다만 법선벡터의 표현식에서 부호가 반대임에 유의하여야 한다.