

두 절점 혼합 곡선 보요소의 보간함수 선정

김진곤*

(2000년 3월 9일 접수)

Optimal Interpolation Functions of 2-Node Hybrid-Mixed Curved Beam Element

Jin-gon Kim

Key Words : Curved Beam Element(곡선 보요소), Hybrid-Mixed Formulation(혼합 정식화), Optimal Interpolation Functions(최적 보간 함수), Spurious Constraint(가성구속)

Abstract

In this paper, we propose a new efficient hybrid-mixed C^0 curved beam element with the optimal interpolation functions determined from numerical tests, which gives very accurate locking-free two-node curved beam element. In the element level, the stress parameters are eliminated from the stationary condition and the nodeless degrees of freedom are also removed by static condensation so that a standard six-by-six stiffness matrix is finally obtained. The numerical benchmark problems show that the element with cubic displacement functions and quadratic stress functions is the most efficient.

1. 서론

보는 항공, 도시 그리고 기계공학분야 등에서 가장 단순하며, 또한 널리 사용되는 구조요소의 하나이다. 또한 셸과 같은 복잡한 구조요소의 곡률에 의한 영향을 이해하기 위한 전단계의 요소로서, 많은 연구자들에 의해 다양한 곡선 보나 아치 요소들이 제안되었다. 이중곡률에 의한 영향을 제외하면, 곡선 보는 축대칭 셸 요소가 가지는 신장-굽힘간 상호작용, 강체모드 구현의 어려움, 그리고 막-전단 강성과잉현상(membrane and shear locking) 등의 중요한 특징들을 대부분 가진다.

이러한 곡선보 요소의 개발을 위해 지금까지 다양한 변분 이론이 적용되었으며, 이 중 최소 퍼텐셜 에너지 이론에 바탕한 변위 모델이 가장 일반적으로 사용되어 왔다. 하지만, 3차 함수를 사용하는 C^1 곡선보 요소나 또는 전단 변형을 고려한 저차의 보간 함수를 사용하는 요소는 두께가 곡률의 반경에 비해 아주 작은 경우의 아치문제에서 가성

구속이 발생하여 강성과잉현상이 발생한다.⁽¹⁻³⁾ 강성과잉현상이 발생되면 변위는 실제보다 작게 계산되며 심각한 요동을 가지는 응력분포를 나타낸다. 이러한 강성과잉문제를 해결하기 위해 제시된 대표적인 방법은 감차/선택 적분 요소^(4,5)이다. 감차적분은 적용은 간편하지만 곡선보의 거동특성을 정확하게 표현할 수 없음이 Stolarski 와 Belytschko⁽²⁾에 의해 지적되었다. 그리고 Moon 등⁽⁶⁾은 일반적인 공간곡선보 요소에서의 감차 최소화 이론(reduced minimization theory)을 제안하여 감차적분의 역할을 설명하였다. 다른 주목할만한 개념들을 적용한 요소들로는 Prathap⁽⁷⁻⁹⁾의 가성강성을 제거하기 위한 장-일관 요소(field consistent element), Tessler 와 Spiridigliozzi⁽¹⁰⁾이 제안한 고차의 변위장과 요소내에서 일정한 변형률장을 사용하는 비등매개변수 요소(anisoparametric element), Ryu 와 Sin⁽¹¹⁾의 변형률 요소, 그리고 Lee 와 Sin⁽¹²⁾의 곡률기저 요소(curvature based element) 등이 있다.

이러한 변위 모델에 대한 또 다른 대안으로서, Saleeb⁽¹³⁾과 Kim 등은^(14,15) Hellinger-Reissner 변분 이론에 바탕한 혼합 요소들(hybrid-mixed element)을 제안하였다. 그러나 제안된 혼합 요소들은 강성과잉과 같은 수치적인 문제점은 완화시켰지만, 저차

* 회원, 삼성전자 경영혁신팀
E-mail: hybrid67@unitel.co.kr
TEL : (031)200-3107 FAX : (031)200-3104

의 보간함수를 사용하는 경우 효율성이 높지 않은 문제점이 있다. 따라서, 저차 혼합요소의 효율성을 향상시키기 위해, Kim 과 Kim 은⁽¹⁶⁾ 혼합 곡선 보 요소에 무절점 자유도(nodeless degrees)를 도입하여 수치적 거동을 향상시켰다.

본 논문에서는, 이러한 무절점 자유도를 도입한 고차 혼합 곡선보 요소에서 정확성과 수치계산상의 비용의 두 가지 측면에서 가장 적절한 보간함수의 차수를 수치실험을 통하여 결정하였다. 또한 장-일관성 개념을⁽⁷⁻⁹⁾ 도입하여, 변위 함수에 대응되는 적절한 응력매개변수(stress parameter)들을 선정하였다. 응력매개변수들은 定常조건(stationary condition)을 통하여, 그리고 도입된 무절점 자유도들은 정적 축약을⁽¹⁸⁾ 통하여 요소 정식화의 최종 단계에서 제거함으로써, 일반적인 변위 요소의 강성행렬과 크기가 같은 (6x6)의 강성행렬을 유도하였다.

모든 해석과 수식의 유도는 Mathematica 프로그램⁽¹⁹⁾ 사용하였으며, 수치 실험을 통하여 3 차의 변위 보간함수와 2 차의 응력함수를 가지는 혼합 요소의 경우 정확성과 수치계산의 효율성 모두를 가장 적절히 만족시켰다.

2. Hellinger-Reissner 변분이론

Fig. 1 은 6 개의 변위 자유도를 가지는 2 절점 곡선보 요소를 보여주고 있다. u 와 v 는 각각 접선 x 방향과 법선 y 방향 변위를 나타내며, θ 는 z 방향 회전량을 나타내는 변위 성분이다. N 과 V 는 각각 접선 x 방향과 법선 y 방향의 내력들이며, M 은 모우멘트 성분이다. 그림에서 하첨자 1 과 2 는 변위와 내력 성분들이 정의되는 절점을 의미한다. 고려된 곡선보는 두께 h 와 초기 곡률 반경 R 과 길이 l 을 가진다. 곡선보에 대한 Hellinger-Reissner 범함수는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\Pi_R = \int_c \left[-\frac{1}{2} \sigma' S \sigma + \sigma' \varepsilon \right] dx - W \quad (1)$$

여기서,

$$W = \int_c (p_x u + p_y v) dx + \sum_{i=1}^2 (N_i u_i + V_i v_i + M_i \theta_i) \quad (2)$$

곡선보의 응력 벡터 σ 와 변형률 벡터 ε 는 각각 $\sigma = [N, V, M]^T$ 와 $\varepsilon = [\varepsilon_0, \gamma_0, \kappa]^T$ 이다. Naghdi 와 Reissner⁽¹³⁾ 의 셀 이론으로부터 유도된 곡선 보 이론에 의해 변형률은 다음과 같다.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{R} \frac{du}{d\varphi} - \frac{v}{R} \quad (3a)$$

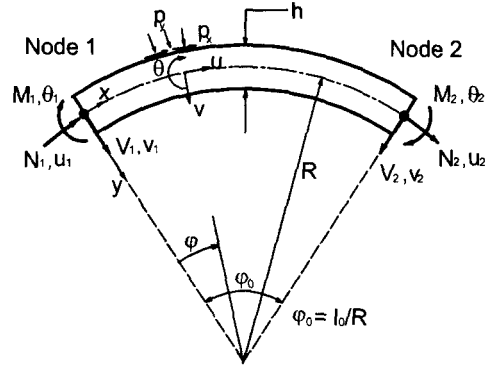


Fig. 1 The geometry of a two-noded curved beam element

$$\kappa = \frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\varphi} \quad (3b)$$

$$\gamma_0 = \frac{u}{R} + \frac{1}{R} \frac{dv}{d\varphi} - \theta \quad (3c)$$

이 때, φ 는 원주방향 중심각을 나타내며, 그리고

$$N \approx EA \left(1 + \frac{l}{AR^2} \right) \varepsilon_0 - \frac{EI}{R} \kappa \quad (4)$$

$$V \approx kGA \gamma_0 \quad (5)$$

$$M \approx EI \kappa - \frac{EI}{R} \varepsilon_0 \quad (6)$$

여기서 E 는 탄성계수, G 는 전단계수, k 는 전단보정계수를, A 와 I 는 각각 단면의 면적과 관성 모우멘트를 나타낸다. 식 (4)-(6)로부터 다음과 같은 컴플라이언스 행렬을 구성할 수 있다.

$$S = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & \frac{E}{kG} & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{A}{I} + \frac{1}{R^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

3. 유한요소정식화

저차함수를 가지는 2 절점 혼합 곡선보 요소의 수치적 효율성을 향상시키기 위해, 일반적인 등매개 보간함수에 $\xi^n(1-\xi)$ ($n \geq 1$) 와 같은 고차함수(bubble function)들을 도입하였다. 곡선 보 요소의 굽힘 거동을 보다 정확하게 표현하기 위해 도입된 무차원 변수 $\xi = \varphi/\varphi_0$ ($0 \leq \xi \leq 1$) 로 표현되는 고차함수를 사용함으로써, 변위는 다음과 같이 “ $n+1$ ”

차의 보간 함수를 가지게 된다.

$$u = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2 + \xi(1 - \xi)a_1 + \dots + \xi^n(1 - \xi)a_n \quad (8a)$$

$$v = (1 - \xi)v_1 + \xi v_2 + \xi(1 - \xi)b_1 + \dots + \xi^n(1 - \xi)b_n \quad (8b)$$

$$\theta = (1 - \xi)\theta_1 + \xi\theta_2 + \xi(1 - \xi)c_1 + \dots + \xi^n(1 - \xi)c_n \quad (8c)$$

식 (8)을 다음과 같이 행렬식으로 나타내면

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}_c : \mathbf{N}_b] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_c \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad (9)$$

여기서, $\mathbf{d}_b = \{a_1, \dots, c_n\}'$ 는 $\xi = 0, 1$ 의 절점에서 정의되지 않지만, $\xi = 1/2$ 에서의 굽힘 변형과 관계된 무절점 자유도들이다. $\mathbf{d}_c = \{u_1, \dots, \theta_2\}'$ 는 일반적인 형태의 등매개 곡선 보요소가 가지는 절점에서의 자유도 성분이다.

혼합정식화에서, 변위의 근사함수에 대응되는 적절한 응력매개변수를 선정하기 위해, 식 (3)의 전단 변형률에 대한 극한 거동을 살펴보고자 한다. 먼저, 보가 거의 직선에 가깝고, 두께가 아주 얇아지는 경우 ($R \rightarrow \infty$), 전단 변형률이 무시할 정도로 작아진다.^(5,7,8) 따라서, 식 (3)과 (8)로부터 전단 변형률은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \frac{dv}{l_0 d\xi} - \theta = & \left(\frac{v_2 - v_1 + b_1}{l_0} - \theta_1 \right) \\ & + (\theta_1 - \theta_2 - c_1 - 2 \frac{b_1 - b_2}{l_0})\xi + \dots \quad (10) \\ & + (c_{n-1} - c_n - \frac{b_n + nb_n}{l_0})\xi^n + c_n \xi^{n+1} \end{aligned}$$

식 (10)에서, 전단 변형률 γ_0 이 0이 되면서, $c_2 \rightarrow 0$ 을 포함한 $(n+1)$ 개의 구속조건이 발생하게 된다. 이 중에서, 특히 c_n 이 0으로 가는 구속조건은 불필요한 구속조건으로서, 요소 단위에서는 $\theta_{,sss} \rightarrow 0$ 와 같은 가성구속조건을 발생시키게 된다. 이러한 가성구속조건은 존재하지 않은 전단에 대한 가성에너지를 정식화 과정에 도입하게 되어, 전단 강성과잉이나 전단력 계산에 심각한 편차를 발생시킨다.⁽⁸⁾ 따라서, 상기의 보의 극한적 거동에서 발생하는 가성구속을 제거하기 위하여, 전단 변형률이나 응력에 대한 근사함수는 “ n ”차 함수로 가정해야 한다.

유사한 방법으로, 비신장 굽힘(inextensional bending)과 같은 극한조건에서, 식 (3)의 축방향 변형률을 살펴보면 b_n 이 0이 되는 구속조건이 발생함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = u_{,\xi} + \frac{v}{R} = & (-u_1 + u_2 + a_1 + \frac{v_1}{R}) \\ & + (-2a_1 + 2a_2 - \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + \frac{b_1}{R})\xi + \dots \quad (11) \\ & + (-a_n - na_n + \frac{b_n - b_{n-1}}{R})\xi^n - \frac{b_n}{R}\xi^{n+1} \end{aligned}$$

이러한 b_n 에 관련된 구속조건은 요소 단위에서 $v_{,sss}$ 가 0이 되는 가성구속조건이 된다. 따라서, 일반적인 응력장에서 발생하는 가성구속조건들을 제거하기 위해, 응력장의 근사를 위해서는 “ $n+1$ ”차의 변위함수보다 한 차수 낮은 “ n ”차의 응력함수를 가지는 다음과 같은 응력매개변수들로 가정해야 한다.

$$N = \beta_1 + \xi\beta_2 + \dots + \xi^n\beta_{n+1} \quad (12a)$$

$$V = \beta_{n+2} + \xi\beta_{n+3} + \dots + \xi^n\beta_{2n+2} \quad (12b)$$

$$M = \beta_{2n+3} + \xi\beta_{2n+4} + \dots + \xi^n\beta_{3n+3} \quad (12c)$$

여기서, β_i ($i = 1, \dots, 3n+3$)는 응력매개변수를 나타내며, 식 (12)는 다음과 같이 간단한 형태로 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (13)$$

그리고, $\boldsymbol{\beta}$ 는 $\{\beta_1, \dots, \beta_{3n+3}\}'$ 로 정의되며, \mathbf{P} 는 응력에 대한 근사함수의 행렬을 나타낸다. 이와 같이 변위보간함수와 일관성을 가지는 응력함수로 가정하지 않는다면, 비록 혼합요소일지라도 강성과잉이나 응력요동과 같은 수치적인 문제점을 가지며, 일반적인 변위요소와 동가의 강성행렬을 가진다는 것이 Kim과 Kim에⁽¹⁴⁻¹⁶⁾ 의해 보고된 바 있다.

4. 요소강성행렬

유한요소의 강성행렬을 유도하기 위해, 식 (9)와 (13)을 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$\boldsymbol{\Pi}_R = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{G} \mathbf{d} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Q}' \mathbf{d} \quad (14)$$

그리고,

$$\mathbf{H} = \int_c \mathbf{P}' \mathbf{S} \mathbf{P} dx \quad (15)$$

$$\mathbf{G} = \int_c \mathbf{P}' \mathbf{B} dx = \int_c \mathbf{P}' [\mathbf{B}_c : \mathbf{B}_b] dx = [\mathbf{G}_c : \mathbf{G}_b] \quad (16)$$

여기서, 행렬 \mathbf{G} 는 일반적인 형태의 변형률-변위 행렬 \mathbf{B}_c 와 무절점 자유도에 대응되는 고차 변형률-변위 행렬 \mathbf{B}_b 로 구성되는 행렬성분이다. 등가의 절점력은 행렬 \mathbf{Q} 로 표시된다.

벡터 \mathbf{d} 와 $\boldsymbol{\beta}$ 에 대해 범함수의 평형조건을 적용하면

$$\mathbf{G}'\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Q} \quad (17a)$$

$$\mathbf{H}'\boldsymbol{\beta} = \mathbf{G}\mathbf{d} \quad (17b)$$

식 (17)에서 $\boldsymbol{\beta}$ 를 요소 단위에서 제거하면, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cb} \\ \mathbf{K}_{bc} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_c \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서, 부행렬 성분 \mathbf{K}_{ij} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{G}'_i \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_j \quad (i \text{ and } j = c, b) \quad (19)$$

무절점 자유도 \mathbf{d}_b 는 어떠한 하중도 전달할 수 없으므로, 식 (18)을 정적응축(static condensation)을 통하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{d}_b = -\mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{bc} \mathbf{d}_c \quad (20)$$

식 (20)을 식 (18)의 첫번째 식에 대입하면 최종적으로 다음과 같은 요소방정식을 구성할 수 있다.

$$\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{d}_c = \mathbf{Q} \quad (21a)$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{cb} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{bc} \quad (21b)$$

따라서, 요소는 이제 절점에서의 변위성분만을 변수로 갖는 강성행렬형태로 다룰 수 있게 되었으며, 일반적인 변위모델과 같이 축약된 각각의 요소 강성행렬과 하중벡터를 전체적으로 합칠 수 있으며, 또한 경계조건을 부과할 수 있다.

5. 최적 보간함수

본 절에서는 수치실험을 통해, 변위장과 응력장에 대한 최적의 보간함수의 차수를 결정하고자 한다. 식 (8)과 (12)의 보간함수의 차수를 나타내는 “ n ”의 값을 변화시키면서, Fig. 2 와 같이 한 쪽이 고정되고 자유단에서 수직방향 하중이 가해지는 곡선 아치 문제를 해석하였다. 이 곡선보 문제는 많은 연구자들에 의해 얇은 곡선 보 요소에서 발생하는 막 강성과잉영향을 살펴보기 위하여 다루어져 왔다. 수치계산을 위하여 단면의 폭 $b = 1.0$ in, 높이 $h = 1.0$ in 를 사용하였으며 R/h 는 변수로 두었다. 물성치는 $E = 10^6$ psi, $kG = E/2$ 로 가정하였다. Fig. 3 은 보간함수의 차수 “ n ”의 변화 시, 아치의 자유단에서 수직방향 변위값의 수렴성을 보여주는 그림이다. 그리고, Fig. 4 는 “ n ”의 변화 시, 단 하나의 요소를 사용하여 해석한 아치의 전단력 분포를 보여주는 그림이다.

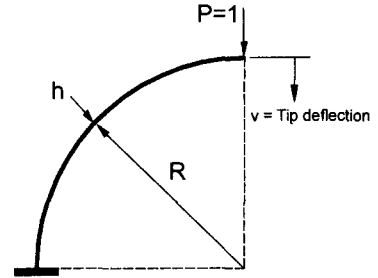


Fig. 2 A circular cantilever arch

수치 실험결과는 “ $n = 2$ ”인 삼차의 변위함수와 이 차의 응력함수를 사용한 혼합요소가 “ $n \geq 3$ ”인 보간함수를 사용한 혼합요소들의 수치적 거동과 거의 유사한 결과를 보여주고 있다. 자유단에서의 수직방향 변위값을 살펴보면, “ $n = 2$ ”인 경우 이론값과 약 0.05%의 오차를 가지고 “ $n = 3$ ”인 경우는 약 0.001%의 오차를 보인다. 응력 분포에서도 또한 “ $n \geq 2$ ”부터는 이론값과 거의 일치하는 결과를 얻을 수 있었다.

수치계산의 효율성 측면에서도, “ $n = 2$ ”인 경우 식 (21)의 요소 강성행렬의 각 성분을 식으로 유도할 수 있다. 따라서, 부행렬 \mathbf{K}_{bb} 의 역행렬을 계산할 필요가 없으므로 상당한 수치계산상의 효율성을 가지게 된다. 이상의 결과로부터, 삼차의 변위함수와 이차의 응력함수를 사용한 혼합요소가 정확성과 수치 계산의 효율성이라는 양 측면을 가장 최적으로 만족시키는 요소임을 알 수 있다. 이 요소를 보고된 여러 요소와의 비교를 위하여 DCSQ2(2-node hybrid-mixed element with Cubic Displacement functions and Quadratic stress functions)라 명명하였다.

6. 수치예제

본 연구에서 제안한, 3 차의 변위 보간함수와 2 차의 응력근사함수를 가지는 혼합요소 DCSQ2 의 수치 거동을 수렴성, 강성과잉 현상등의 관점에서 보다 자세하게 살펴보기 위하여 몇 가지 수치예제에 대해 해석을 수행하였다.

6.1 직선 외팔보

$R \rightarrow \infty$ 로 가고 $R\phi_0 = 1$ 이고, 부록에 유도된 강성행렬을 가지는 직선보에서 전단강성과잉현상을 살펴 보기 위하여, 보의 길이가 l , 두께가 h , 그리고 단면의 폭이 b 인 외팔보의 자유단에서 전단력 P 가 작용하는 문제를 살펴보았다.

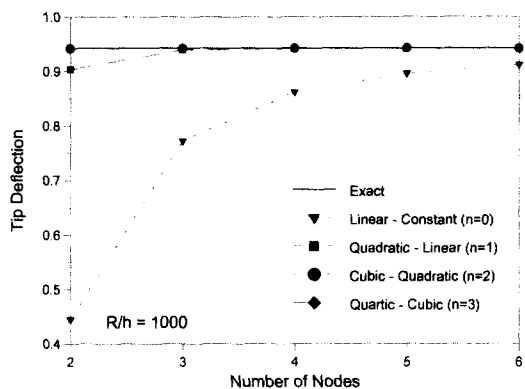


Fig. 3 Examination of the convergence behavior for the tip deflection for the arch shown in Fig. 2 to compare the element performance based on various levels of field interpolation

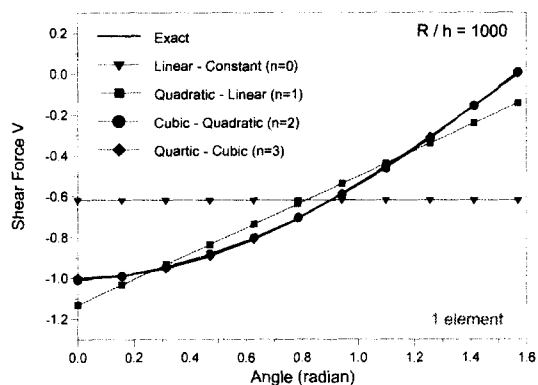


Fig. 4 Shear force distribution obtained by one element for the arch shown in Fig. 2. The cubic-quadratic hybrid-mixed element shows a nearly equivalent performance to the quartic-cubic hybrid-mixed element

외팔보의 끝단에서의 Euler-Bernoulli 해는 $\delta_{exact} = Pl^3/3EI$ 이다. 다양한 2 절점 요소에 대해, 하나의 요소를 이용하여 끝단의 변위를 식으로 나타내었다. 여기서, DL2 는 일반적인 변위요소를, DL2SL2 는 선형변위함수와 동차의 응력함수를 사용한 혼합요소를, 그리고 DLSC2 는 식 (8)과 (12) 에서 "n = 0"인 선형변위함수와 일정응력함수를 가지는 혼합요소를 나타낸다.

$$\delta_{DL2, DL2SL2} = \frac{Pl^3}{3EI} \frac{(1+3/\alpha)}{(1+\alpha/12)} \quad (22)$$

$$\delta_{DLSC2} = \frac{Pl^3}{3EI} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{\alpha} \right) \quad (23)$$

$$\delta_{DCSQ2} = \frac{Pl^3}{3EI} \left(1 + \frac{3}{\alpha} \right) \quad (24)$$

여기서,

$$\alpha = \frac{kGA l^2}{EI} = \frac{12kG}{E} \left(\frac{l}{h} \right)^2$$

일반적인 변위요소 DL2 나 부적절한 응력함수를 가지는 혼합요소 DL2SL2 는 두께 대 길이의 비가 영에 수렴할 때(α 가 매우 커질 때), 그 비의 제곱형태의 강성과잉현상이 나타나게 됨을 알 수 있다. 하지만, 적절한 응력함수를 가지는 혼합요소 DLSC2 와 DCSQ2 는 l/h 의 전 범위에서 강성과잉 현상이 나타나고 있지 않음을 확인할 수 있다. 특히, 본 논문에서 제안한 DCSQ2 요소는 한 개의 보 요소만 사용하였지만 정해와 거의 일치하는 결과를 보여주고 있다

6.2 집중하중을 받는 링

Fig. 5 와 같이 링의 상하에 횡방향의 집중하중이 가해진 곡선보의 경우, 경계조건을 고려하면 A 에서 B 까지 사분원 링만으로 이를 모델링할 수 있다. 먼저, Castigliano 의 에너지 정리를 이용하여 A 지점에서 다음과 같은 수직방향 변형의 정해를 얻었다.

$$v_A = - \left(\frac{PR^3}{EI} \frac{4-\pi}{2\pi} + \frac{PR}{2GAk} - \frac{PR}{2EI} \right) \quad (25)$$

본 연구에서 제안한 혼합요소인 DCSQ2 와 기존의 보고된 요소들의 위에서 구한 정해에 대한 수렴성을 비교하여 보았다. 비교한 요소들은, 전단 및 막강성과잉을 해결하기 위해 고차 변위장과 요소내에서 일정 변형률장을 사용하는 Tessler 와 Spiridigliozzi⁽¹⁰⁾의 2 절점 요소와, 전단 변형률과 막 변형률에 장-일치(field consistency) 개념을 도입하여 수정된 보간함수를 사용하는 Prathap⁽⁸⁾의 3 절점 CMCSQ 요소, Ryu 와 Sin⁽¹¹⁾의 2 절점 변형률 요소인 STRB2, 그리고 Saleeb 과 Chang⁽¹³⁾의 3 절점 혼합요소인 HMC3 요소들이다. 해석을 위해 곡선보의 반경 $R = 4.953$ in, 두께 $t = 0.094$ in, 폭 $b = 1$ in, 탄성 계수 $E = 10.5 \times 10^6$ lbf/in², $\nu = 0.3125$ 그리고 작용하중 $P = 100$ lbf 을 사용하였고, 따라서 정해 v_A 는 1.244 in 가 된다.

Fig. 5 는 요소의 개수를 늘려감에 따른 각 요소들의 정해 v_A 에 대한 수렴성을 보여주는 그림이다. x 축은 사용한 절점의 개수를 나타내며, y 축은

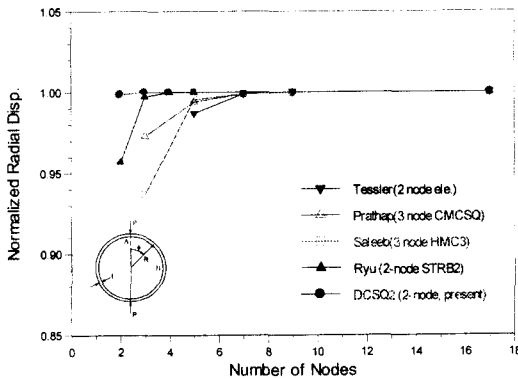


Fig. 5 Convergence of the normalized radial displacement at the loaded point in a pinched ring

정해에 대한 수치해의 비를 나타내고 있다. 본 논문에서 제안한 무절점 자유도를 가지는 혼합 곡선보 요소는 단 한 개의 요소만으로도 거의 정해에 근접한 값을 나타내고 있으며, 수치적 정확성이 뛰어난 것으로 알려진 CMCSQ 나 HMC3 와 같은 3 절점 요소들보다 빠른 수렴성을 보여주고 있다.

7. 결론

본 논문에서는, 무절점 자유도를 가지는 저차 혼합요소의 수치적 효율성을 개선하기 위하여 무절점 자유도를 도입한 변위장과 이에 대응하는 응력장에 대한 최적의 보간함수를 수치실험을 통하여 결정하였다. 변위장에 대응하는 적절한 응력장에 대한 근사함수를 선정하기 위하여 장-일관성개념을 도입하였으며, 수치실험을 통하여 3 차의 변위함수와 2 차의 응력함수를 가지는 혼합 곡선보 요소가 가장 효율적인 수치적인 거동을 가짐을 확인할 수 있었다. 본 논문에서 고려한 혼합 곡선보 요소는 1 개의 곡률반경을 가지며 면내변형만을 고려한 단순 곡선보 요소이다. 하지만, 이러한 혼합요소 정식화는 일반적인 공간 곡선보 요소⁽⁶⁾에도 추가적인 연구를 수행한다면, 적용이 가능할 것으로 판단된다.

참고문헌

(1) Dawe, D. J., 1974, "Numerical Studies Using Circular Arch Finite Elements," *Comput. Struct.*, Vol. 4, pp. 729~740.

(2) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1983, "Shear and Membrane Locking in Curved C^0 Elements," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 41, pp. 279~296.

(3) Noor, A. K. and Peters, J. M., 1981, "Mixed Models and Reduced/Selective Integration Displacement Models for Nonlinear Analysis of Curved Beams," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 17, pp. 615~631.

(4) Noor, A. K., Greene, W. H. and Hartley, S. J., 1977, "Nonlinear Finite Element Analysis of Curved Beams," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 12, pp. 289~307.

(5) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements," *J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 172~176.

(6) 문원주, 김용우, 민욱기, 이강원, 1996, "공간곡선보 요소에서의 감차최소화 이론," *대한기계학회논문집*, 제 20 권, 제 12 호, pp. 3702~3803

(7) Babu, C. Ramesh and Prathap, G., 1986, "A Linear Thick Curved Beam Element", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 1313~1328.

(8) Prathap, G. and Babu, C. Ramesh, 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 1583~1600.

(9) Prathap, G., 1993, *The Finite Element Method in Structural Mechanics*, Kluwer, Dordrecht.

(10) Tessler, A. and Spiridigliozzi, L., 1986, "Curved Beam Elements with Penalty Relaxation," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 2245~2262.

(11) 유하상, 신호철, 1996, "변형률에 근거한 2-절점 곡선보 요소," *대한기계학회논문집*, 제 18 권, 제 8 호, pp. 2540~2545

(12) Lee, P. G. and Sin, H. C., 1994, "Locking-Free Curved Beam Element Based on Curvature," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 37, pp. 989~1007.

(13) Saleeb, A. F. and Chang, T. Y., 1987, "On the Hybrid-Mixed Formulation C^0 Curved Beam Elements," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 60, pp. 95~121.

(14) Kim, Y. Y. and Kim, J. G., 1996, "A Simple and Efficient Mixed Finite Element for Axisymmetric Shell Analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 39, pp. 1903~1914.

(15) Kim, J. G. and Kim, Y. Y., 1997, "A Simple and Efficient Mixed Harmonic Element for Shells of Revolution," *Commun. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 13, pp. 565~572.

(16) Kim, J. G. and Kim, Y. Y., 1998, "A New Higher-Order Hybrid-Mixed Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 43, pp. 925~940.

(17) Kim, J. G. and Kim, Y. Y., 2000, "A Higher-Order Hybrid-Mixed Harmonic Shell-of-Revolution Element," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 182, pp. 1~16.

(18) Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., 1989, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd Edition, Wiley, New York.

(19) Wolfram, S., 1991, *Mathematica*, Second Edition,

Addison-Wesley Publishing Company, Inc..

부 록

곡선보요소에서 $R \rightarrow \infty$ 로 가고 $R\phi_0 = l$ 인 극한의 경우를 고려하면 직선보요소의 강성행렬을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_{cb} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{6l} & 0 & \frac{\alpha}{12l} \\ -\frac{\alpha}{6l} & \frac{\alpha}{12} & -\frac{\alpha}{12l} & \frac{\alpha}{30} \\ 0 & -\frac{\alpha}{6l} & 0 & -\frac{\alpha}{12l} \\ \frac{\alpha}{6l} & \frac{\alpha}{12} & \frac{\alpha}{12l} & \frac{\alpha}{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{cc} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{l^2} & \frac{\alpha}{2l} & -\frac{\alpha}{l^2} & \frac{\alpha}{2l} \\ & 1 + \frac{\alpha}{3} & -\frac{\alpha}{2l} & -1 + \frac{\alpha}{6} \\ & & \frac{\alpha}{l^2} & -\frac{\alpha}{2l} \\ \text{symm.} & & & 1 + \frac{\alpha}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{3l^2} & 0 & \frac{\alpha}{6l^2} & \frac{\alpha}{60l} \\ & \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{30} & -\frac{\alpha}{60l} & -\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{60} \\ & & \frac{2\alpha}{15l^2} & 0 \\ \text{symm.} & & & \frac{160 + 11\alpha}{1200} \end{bmatrix}$$

위의 강성행렬과 관계된 직선보의 변위성분은 $d_c = (v_1, \theta_1, v_2, \theta_2)$ 이다.