

# 확률조건을 근사화를 통한 효율적인 강건 최적설계 기법의 개발

정도현\*. 이병채\*\*  
(2000년 5월 30일 접수)

## Development of an Efficient Optimization Technique for Robust Design by Approximating Probability Constraints

Do Hyun Jung and Byung Chai Lee

**Key Words :** Robust Design(강건설계), Uncertainty(불확실성), Probability Constraint(확률 제한조건), Approximation(근사화)

### Abstract

Alternative formulation is presented for robust optimization problems and an efficient computational scheme for reliability estimation is proposed. Both design variables and design parameters are considered as random variables about their nominal values. To ensure the robustness of objective performance a new cost function bounding the performance and a new constraint limiting the performance variation are introduced. The constraint variations are regulated by considering the probability of feasibility. Each probability constraint is transformed into a sub-optimization problem and then is resolved with the modified advanced first order second moment (AFOSM) method for computational efficiency. The proposed robust optimization method has advantages that the mean value and the variation of the performance function are controlled simultaneously and the second order sensitivity information is not required even in case of gradient based optimization. The suggested method is examined by solving three examples and the results are compared with those for deterministic case and those available in literature.

### 1. 서론

일반적인 최적설계 방법은 설계변수와 시스템 파라미터를 확정적인 변수라고 가정하고 설계를 한다. 즉, 부재의 치수나 형상에 생기는 변동, 항복강도와 탄성계수와 같은 재료 물성치의 불확실성과 시스템에 작용하는 하중의 변동을 무시한 채 모델링하고 설계하기 때문에 실제 시스템의 응답과 일치하지 않을 수 있으며 이로 인해 전체 시스템의 강건성과 안정성에 큰 영향을 미칠 수 있다.

따라서 이런 변동을 고려하며 설계할 수 있는 강건 최적설계 방법 분야에 많은 연구가 진행되고 있다. 강건 최적설계 방법은 일반적으로 목적함수의 강건성과 제한조건의 강건성을 동시에 확보할 수 있어야 한다. 여기서 목적 함수의 강건성은 설계변수와 시스템 파라미터의 변동에 대하여 설계값에서의 목적함수 값의 변동이 민감하지 않는 것이며 제한조건의 강건성은 설계변수와 시스템 파라미터의 변동에 대하여 가능한 한 제한조건을 위반하지 않고 가용영역에 존재하는 성질을 말한다.

지금까지의 강건설계 방법들을 분류하면 실험 계획적 방법, 민감도 이용 방법과 확률조건 이용 방법 등 크게 세가지로 분류할 수 있다. 실험 계획적 방법은 시스템의 응답을 수식적으로 표현할 수 없을 때 통계적 수단을 이용하는 방법이다. 이

\* 한국과학기술원 기계공학과

\*\* 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : bclee@mail.kaist.ac.kr

TEL : (042) 869-3031 FAX : (042) 869-3095

분야의 대표적 방법은 다구찌 방법(Taguchi method) 과 반응 표면 방법(response surface method) 을 이용한 강건설계 방법이다. 다구찌 방법은 직교배열에 의한 실험계획과 SN 비(signal-to-noise ratio)를 바탕으로 파라미터 설계 개념을 통해서 제품의 강건성을 향상시키는 방법으로 현장에서 제품 및 공정의 설계와 개선을 위해 많이 이용되고 있다.<sup>(1)</sup> 이 방법은 계획된 실험 수행이 필요하고 이산화 된 변수를 이용하기 때문에 제한조건을 가진 문제나 연속 변수 최적설계 문제에 적용하기 힘들며 비선형성이 강한 문제에는 적합하지 않다. 반응 표면 방법은 근사 방법의 하나로써 함수의 근사식을 가정하여 각 항들의 계수를 적절한 모의 실험을 통해서 구하는 방법이다. 시스템 응답의 평균값과 분산값을 그 근사식을 이용하여 구해서 강건설계를 하는 방법이다. 몽테카를로 모의실험을 통해 평균값과 분산값을 구할 수도 있지만 그 시간과 노력이 과도하므로 반응 표면 방법을 이용한 강건설계 방법들이 연구되고 있다.<sup>(2)</sup>

민감도 이용 방법은 각 성능 함수의 평균값과 분산값을 현재 설계점에서의 성능함수 민감도 값을 이용하여 근사적으로 구한 후 강건 최적설계 문제를 구성하는 방법이다. Lee<sup>(3)</sup> 등은 성능함수의 평균값과 표준편차의 중요도(weighting) 합으로 새로운 목적 함수를 구성하고 제한조건으로 제한조건의 평균값에 현재의 민감도 값에 비례하는 변동량을 추가한 새로운 제한조건을 가지고 강건 최적설계문제를 수식화했다. Rao<sup>(4)</sup> 등은 분산의 개념인 다구찌의 손실함수를 새로운 목적함수로 설정하고 제한조건의 평균값에 분산을 추가한 강건설계 문제를 만들었다. 또한 성능 함수의 분산값과 평균값 등을 민감도 값에 기초하여 새롭게 근사했고 성능함수의 평균값을 제한하는 새로운 제한조건을 추가했다. 그러나 이 방법은 최적설계 알고리즘을 적용하기 위해서는 성능함수와 제한조건의 이차 민감도 값을 필요로 한다.

확률 이용 방법은 제한조건의 강건성을 위해서 확률 제한조건을 이용하는 방법으로서 설계값에서 제한조건의 위반확률을 구하는 것이 관건이다. 위반확률 계산 방법의 연구는 토목공학과 기계공학 분야의 구조물 신뢰도 설계에서 많은 연구가 진행되어 왔다.<sup>(5)</sup> 위반확률을 정확히 구하는 것은 불가능하고 근사적으로 구하는 방법들이 개발되었는데 설계점의 평균값에서 제한조건의 위반확률을 구하는 FOSM(First Order Second Method) 방법과 부최적화 문제를 도입하여 안전지수(Safety Index)를 구해서 위반확률을 근사하는 AFOSM(Advanced First Order Second Method) 방법이 대표적인 방법이다.<sup>(5)</sup>

Swan<sup>(6)</sup> 등은 원하는 성능함수 값 근처에서의 위반 확률을 최소화하는 방법으로 강건설계를 수행했다. Sepulveda<sup>(7)</sup> 등은 국소 근사화와 전역 근사화 방법을 비교하고 몽테카를로 모의실험과 연계하여 시스템 신뢰도를 구하는 방법을 제시했다. Grandhi<sup>(8)</sup> 등은 수정된 2 점 근사법(two-point approximation) 을 이용하여 신뢰도를 구해서 신뢰도 최적설계를 수행했다. 이와 같이 확률 이용 방법들은 정확한 위반확률을 구하기 위해 많은 계산과 시간이 필요로 해서 실제 현장에 적용하는데 어려운 점이 있기 때문에 효율적으로 확률 제한조건을 이용할 수 있는 방법들이 연구되고 있다.

본 논문에서는 목적함수 파라미터와 확률 제한조건을 도입한 새로운 강건설계 방법을 제안했다. 강건성 확보를 위해 도입된 확률 제한조건들의 부 문제를 풀 때 근사화 방법을 이용하여 기존의 방법들 보다 효율적인 방법을 제안했다. 새로운 목적함수로서 성능함수와 관련된 성능 파라미터를 도입했고 성능 파라미터와 성능함수의 평균값을 연관시키면서 분산의 개념을 나타내는 확률 제한조건을 추가했다. 이를 통해 성능함수의 분산값과 평균값을 동시에 줄 일수 있는 방법을 제안했다. 세가지 예제를 통해 제안된 강건설계 방법의 유용성을 보였다.

## 2. 강건설계

설계변수의 수가 유한한 확정론적 최적설계 문제는 목적함수  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  와 제한조건 함수  $G_j(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  로 구성되며 다음과 같이 표현할 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$\text{Minimize } f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (1)$$

$$\text{Subject to } G_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

여기서,  $\mathbf{x}$  는 조정이 가능한 설계변수 벡터이고  $\mathbf{p}$  는 조정이 불가능한 시스템 파라미터 벡터이다.  $x_i^L$  과  $x_i^U$  는 각 설계변수의 하한 값과 상한 값이며  $n$  과  $m$  은 설계변수의 개수와 제한조건의 수를 의미한다. 본 장에서는 민감도와 확률을 이용하여 확정론적 수식을 강건설계 수식으로 전환한다.

### 2.1 민감도를 이용한 강건설계 방법

민감도를 이용한 방법들은 목적함수나 제한조건의 민감도를 강건설계 수식화에 직접 이용하는 방법과 목적함수와 제한조건의 분산을 구하기 위해 민감도를 이용하는 방법으로 크게 두 가지로 분류

할 수 있다. 첫 번째 방법의 수식은 다음과 같다.<sup>(3)</sup>

$$\text{Minimize } \alpha\mu_f + (1-\lambda)\sigma_f^2 \quad (4)$$

$$\text{Subject to } G_j - k \sum \left| \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \geq 0 \quad (5)$$

이 방법은 가중값  $\lambda$  를 이용하여 목적함수의 평균값  $\mu_f$  과 분산  $\sigma_f^2$  의 적절한 조합을 찾는 방법이지만 가중값을 정할 수 있는 명확한 방법이 없어서 가중값을 바꿔 가면서 최적 해를 찾아야 하는 단점이 있다. 또한 식 (5)처럼 기존의 제한조건 식에 민감도와 변동량의 곱에 비례한 값을 추가함으로써 제한조건의 경계로부터 떨어진 설계값을 얻을 수 있지만 변동량의 극한값을 이용함으로써 과도한 설계 값을 구할 가능성이 있다. 분산을 이용하는 두 번째 방법의 수식은 다음처럼 전개할 수 있다.<sup>(4)</sup>

$$\text{Minimize } \sigma_f^2 \quad (6)$$

$$\text{Subject to } G_j - k\sigma_{G_j} \geq 0 \quad (7)$$

$$\mu_f^* - \mu_f \geq 0 \quad (8)$$

목적함수의 평균값과 분산을 분리하여 분산 값을 새로운 목적함수로 설정하고 평균값을 제한하는 새로운 제한조건을 추가하는 방법이다. 그러나 목적함수 평균값의 상한값  $\mu_f^*$  를 정하는 합리적인 방법이 필요하다. 또한 두 방법 모두 일차 민감도를 이용하여 최적설계 정식화를 수행하였기 때문에 최적설계 프로그램을 이용할 때 이차 민감도가 필요한 방법이다.

### 2.2 확률조건을 이용한 강건설계 방법

확률조건을 이용하는 방법은 기존의 제한조건을 확률 제한조건으로 전환해서 제한조건의 강건성을 확보하는 방법이다. 확률 제한조건을 직접 풀기 위해서는 정확한 확률을 구해야 하는데 이를 수식적으로 구하는 것은 상당히 어려운 문제이다. 따라서 근사적으로 확률을 구하는 방법이 많이 연구되었는데 몬테카를로 모의 실험 방법과 안전지수 방법이 많이 이용되는 방법이다. 몬테카를로 방법은 비교적 정확한 방법이나 계산 시간이 많이 필요하므로 실제 최적설계를 할 때 이용하기에는 무리가 있지만 검증 방법으로는 유용하다. 안전지수 방법은 현재의 설계 점에서 제한조건 경계와의 관계를 이용하여 안전지수를 구해서 확률을 근사하는 방법이다. 안전지수를 구하는 방법은 FOSM 과 AFOSM 방법이 있는데 FOSM 은 선형근사식을

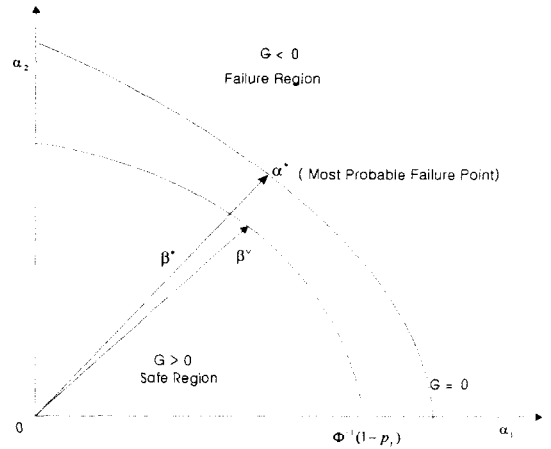


Fig. 1 Comparison of safety indices

통해 현재의 설계 점에서 안전지수를 근사하는 방법으로 설계점의 평균값과 표준편차가 필요하지만 AFOSM 방법은 제한조건의 경계까지의 거리를 계산해서 안전지수를 구하기 때문에 제한조건까지 최소거리를 찾는 부 최적화를 해야 한다. FOSM 방법은 계산이 간단한 반면 해의 정확성과 일관성이 부족해서 AFOSM 방법이 많이 이용되고 있다. 그러나 AFOSM 방법은 부 최적화 문제를 풀기 위해 내부적으로 민감도 계산과 함수값 계산 시간이 많이 소요되는 단점이 있다. 목적함수의 강건성을 확보하기 위해서는 민감도 이용 강건설계 방법처럼 목적함수의 평균값과 분산을 분리하는 방법과 가중값을 이용해서 동시에 최적화 하는 방법이 있다. 일반적인 확률 제한조건을 이용한 강건설계 수식화는 다음과 같다.<sup>(10)</sup>

$$\text{Minimize } \sigma_f^2 \quad (9)$$

$$\text{Subject to } \text{Pr}[G_j \leq 0] \leq p_j \quad (10)$$

식 (10)을 확률제한조건의 안전지수를 이용하여 일반적인 결정론적 수식화로 전환하여 풀 수 있다. AFOSM 방법을 이용해서 안전지수를 구하는 방법은 확률변수로 구성된 다음과 같은 부 최적화 문제를 풀어야 한다.

$$1 - \Phi(\beta^*) \leq p_j \quad (11)$$

$$\beta^* = \text{Min}_{\alpha \in \Omega} \|\alpha\| \quad (12)$$

$$\text{where } \Omega = \{ \alpha \mid G_j(\alpha) \leq 0 \}$$

여기서,  $\alpha \in R^r$  는 표준 정규분포를 갖는 독립 확률 변수로서 설계변수와 시스템 파라미터 중에

서 불확정성을 갖는 항들로 구성된다. Fig. 1 에서 확률변수  $\alpha$  로 전환된 공간의 원점은 설계점의 평균값을 의미한다.  $\Phi(\cdot)$  는 누적 표준 정규분포 함수(cumulative standard normal distribution function) 이고  $\beta^*$  는 안전지수를 나타낸다. 최소화 부 최적화 문제를 해결할 수 있는 방법으로는 HL-RF (Hasofer Lind - Racwitz Fiessler) 방법처럼 특수한 알고리즘을 이용할 수 있으며 물론 일반적인 최적 설계 알고리즘도 사용할 수 있다.<sup>(11)</sup> 그러나 참고 문헌 (11)에서 언급한 방법들은 모두 정확한 안전지수를 구해서 목표 안전지수의 상한 값과 비교해서 위반정도를 판별한다. 따라서 정확한 안전지수를 구하는데 많은 노력이 들게 된다. 본 논문에서는 정확한 안전지수를 구할 필요 없이 안전지수의 상한값에 해당하는 안전범위 안에서 제한조건을 만족하는 가장 작은 값을 구한 다음 그 설계점에서 실제 제한조건 값이 만족하도록 최적화를 수행하는 방법을 이용했다. 수식으로 정리하면 다음과 같다.

$$G_j^* \geq 0 \tag{13}$$

$$\text{where } G_j^* = \text{Min}_{\alpha \in D} G_j(\alpha) \tag{14}$$

$$D = \{ \alpha \mid \|\alpha\| = \beta_j^* \}$$

$$\beta_j^* = \Phi^{-1}(1-p_j)$$

위 식에서의 최소화 문제는 Fig. 1 처럼 확률변수의 안전 범위 경계면에서 제한조건을 최소화값을 찾는 문제이다. HL-RF 방법 처럼 식 (15)의 제한조건 경계면에 수직방향인 단위 방향 벡터를 구한 후 그 벡터 방향을 따라 제한조건이 '0' 이 되는 정확한 안전지수  $\beta_j^*$  를 구하는 것이 아니고 설계자가 원하는 안전확률에 해당하는 거리  $\beta_j^*$  만큼 떨어진 설계점을 축차적으로 찾아내는 방법이다. 제한조건 함수가 선형이면 1 번의 축차로 그 설계점을 찾을 수 있지만 일반적인 비선형 함수일 경우 몇번의 축차가 필요하다. 그러나 함수값 계산 횟수는 일반적인 알고리즘을 이용할 때 보다 상당히 줄일 수 있다.

$$\alpha^* = -\beta_j^* \frac{\frac{\partial G_j^T}{\partial \alpha}}{\left\| \frac{\partial G_j^T}{\partial \alpha} \right\|} \tag{15}$$

따라서 기존의 방법들은 정확한 함수값을 계산하기 위해 많은 시간이 소요되지만 이 방법은 민감

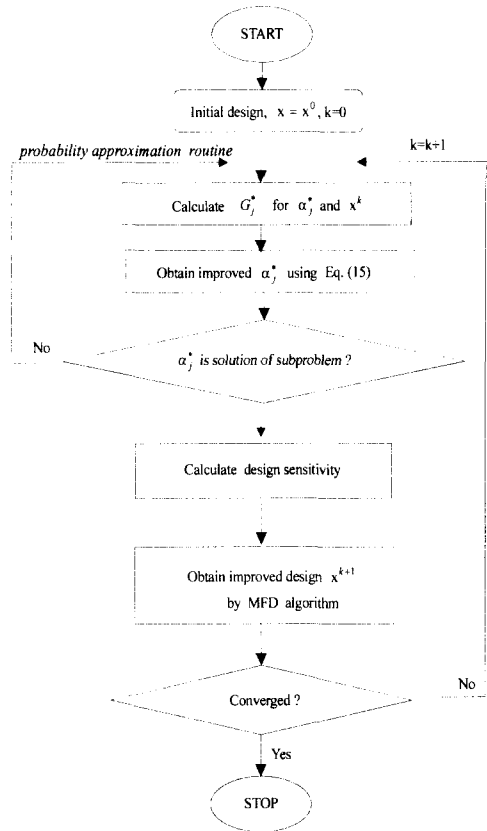


Fig. 2 Flow chart of new robust optimization method

도 계산만으로 축차적으로 부분제를 해결할 수 있다. 본 논문에서는 이 방법을 수정 HL-RF 방법이라고 지칭한다.

### 3. 강건 최적설계 수식화

#### 3.1 강건설계 수식화와 민감도

기존의 강건설계 방법들에서 대부분 목적함수의 평균값과 분산값을 동시에 줄일 수 있는 합리적인 방법 개발이 어려우므로 본 논문에서는 새로운 목적함수 파라미터를 도입하여 새로운 목적함수로 설정하고 목적함수 파라미터와 연관된 새로운 확률제한조건을 추가하여 성능함수의 기대값과 분산값을 동시에 최적화하는 강건 최적설계 수식화를 제안했다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && b \\ &\text{Subject to} && \end{aligned} \tag{16}$$

$$\text{Pr} [G_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0] \leq p_j \quad j=1,2,\dots,m \tag{17}$$

$$\text{Pr} [f \geq b] \leq p_{m+1} \tag{18}$$

(22)

$\mathbf{x}$  는 설계변수 벡터이며,  $\mathbf{p}$  는 시스템 파라미터 벡터이다. 식 (16)은 새로운 목적함수와 관련된 파라미터로서 식 (17)과 연관이 되면서 설계변수 벡터에 추가된다. 그리고 식 (17)은 위반확률 제한조건으로서  $p_j$  는 위반확률의 상한값이고 식 (18)은 기존 목적함수인 성능함수의 평균값에 대한 제한조건이면서 분산의 개념을 갖고 있는 확률 제한조건이다. 따라서 식 (16)과 (18)을 통해 목적함수의 평균값과 분산값을 동시에 최적화할 수 있다. 식 (18)에서 목적함수의 강건성을 위해 고려하는 목적함수의 평균값은 설계변수와 시스템 파라미터의 평균값에서 계산한다. 제안한 수식을 부 최적화 문제를 도입해서 다시 써보면 다음과 같다.

$$\text{Minimize } b \tag{19}$$

Subject to

$$\text{Min}_{\alpha \in D} G_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \alpha) \geq 0 \tag{20}$$

$$j = 1, 2, \dots, m+1$$

$$\text{where, } D_j = \{ \alpha \mid \|\alpha\| = \Phi^{-1}(1-p_j) \}$$

$$G_{m+1} = b - f \tag{21}$$

결국, 제안한 강건설계 수식은 확률제한조건 식이 도입되므로써 목적함수나 제한조건의 이차 민감도 값은 필요하지 않게 된다. 확률제한 조건식을 해결하기 위해 2 장에서 언급된 수정 HL-RF 방법을 이용한다. 민감도 값은 문헌(12)에서 유도된 식을 이용한다. 전체적인 강건설계 프로그램의 흐름도는 Fig. 2 와 같다.

#### 4. 수치예제와 검토

제안한 강건 최적설계 방법의 효율성을 보이기 위해 한 개의 수학적 예제와 두 개의 기계설계 문제를 풀었다. 각 결과값 에서의 분산값과 제한조건 만족확률은 몽테카를로 모의실험을 10 만회 한 결과와 비교했다.

##### 4.1 수학적 예제

제안한 방법이 목적함수의 강건성 확보와 평균값의 최소화를 동시에 수행하는지를 알아보기 위해 문헌(3)에 제시된 예제를 풀었다. 목적함수의 형태는 볼록한 형상이고 선형 제한조건을 갖는 문제이다.

Minimize

$$f(x) = 12 + x_1^2 + \frac{1+x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 x_2^2 + 100}{(x_1 x_2)^4}$$

Subject to

$$G_1(x) = \frac{5}{3}x_1 + x_2 - 5 \geq 0.0$$

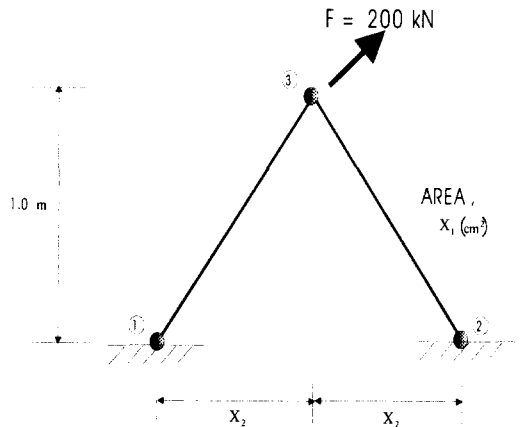
$$0.0 \leq x_1 \leq 10.0$$

$$0.0 \leq x_2 \leq 10.0$$

설계변수의 확률밀도 함수는 정규분포를 가진다고 가정했으며 표준편차는 0.33333 이다. Table 1 에서 보는 바와 같이 결정론적 최적설계의 해에서는 목적함수 값이 다른 방법보다 작은 편이지만 분산값이 매우 컸고 몽테카를로 모의실험을 통해 설계변수의 변동량에 대한 제한조건의 위반확률이 50 % 이상으로 상당히 높음을 알 수 있었다. 이는 결정론적 최적설계 해가 제한조건 경계면에 가까이 위치한다는 것을 의미한다. 제안된 방법의 결과가 참고문헌의 결과와 거의 비슷한 결과를 보였지만 평균값과 분산값이 약간 더 작으며 제한조건의 위반확률은 거의 미미함을 알 수 있다.

**Table 1** The robust optimal design results of a mathematical problem

	Deterministic method	Weighting method <sup>(6)</sup>	Present
Object function,	17.45	20.33	20.19
Variance	12.96	0.954	0.942
$X_1$	1.762	2.234	2.232
$X_2$	2.061	3.942	3.851
$G_1$ Constraint satisfaction,%	49.97	99.98	99.98



**Fig. 3** Two-bar truss design

4.2 2 요소 트러스 구조물

구조설계 예제로서 Fig. 3 에 2 요소 트러스 구조물의 중량 최적화 문제를 나타내었다. 제한조건으로는 각 요소에 작용하는 응력값을 제한한다. 설계변수는 각 요소의 단면적(cm<sup>2</sup>)과 절점 1 과 절점 2 사이의 거리(m)로서 두개이다. 시스템 파라미터는 재료의 밀도, 절점 3 에 작용하는 하중값과 응력 상한값으로 세 개의 성분으로 이루어진 벡터 **p** 이다. 설계변수와 시스템 파라미터는 정규분포를 가지는 확률변수로 가정한다. 설계변수는 평균값을 중심으로 1 % 의 변동을 가진다고 가정하고 시스템 파라미터는 평균값을 중심으로 5 % 의 변동을 가진다고 가정한다.<sup>(4)</sup> 일반적인 확정론적 최적설계 문제는 식 (23)과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = p_1 x_1 \sqrt{1+x_2^2} \quad (23) \\ &\text{Subject to} \\ &G_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left( 1.0 - \frac{p_2}{2\sqrt{65}p_3} \sqrt{1+x_2^2} \left( \frac{8}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} \right) \right) \geq 0.0 \\ &G_2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left( 1.0 - \frac{p_2}{2\sqrt{65}p_3} \sqrt{1+x_2^2} \left( \frac{8}{x_1} - \frac{1}{x_1 x_2} \right) \right) \geq 0.0 \\ &0.2 \leq x_1 \leq 4.0 \\ &0.1 \leq x_2 \leq 1.6 \\ &\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \rho_{bar} \\ |F| \\ \sigma_{max} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^4 & \text{kg/m}^3 \\ 200 & \text{kN} \\ 1000 & \text{MPa} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

식 (23)을 본 논문에서 제안한 수식화를 통해 목적함수 파라미터를 도입하고 제한조건은 확률 제한조건으로 전환한다. 제한조건의 만족확률은 99.5% 이상이 되도록 제한하였다. 제한조건 만족확률의 검증은 각 설계값에서 10 만회의 몬테카를로 모의실험을 이용하였다. 강건 최적설계의 결과로는 Table 2 에 중량의 평균값, 분산값과 제한조건 만족확률을 나타내었다. 비교한 문헌결과는 다구찌의 손실함수를 목적함수로 하고 제한조건의 강건성을 위해 기존 제한조건의 분산 항을 도입한 Rao<sup>(4)</sup> 방법의 결과 값들이다. 설계변수의 변동을 고려하지 않는 확정론적 최적설계 값에서는 중량의 평균값과 분산값이 작았지만 제한조건 위반확률이 가장 높았다. 제안한 강건설계 방법과 Rao 가 제안한 방법의 결과값들이 거의 비슷하였지만 본 논문에서 제안한 방법이 평균값과 분산값이 약간 더 작았다. 첫번째 제한조건의 만족확률은 확정론적 최적설계 해에서 50 % 미만이었고 나머지

방법들의 결과에서는 모두 99.8 % 이상의 확률을 얻을 수 있었다.

확률 제한조건을 해결하기 위해서는 부 최적화 문제를 풀어야 하는데 2 장에서 언급한 것 처럼 많은 방법들이 존재한다. 본 논문에서는 수정가용 방향 방법(MFD), HL-RF 방법과 본 논문에서 제안한 수정 HL-RF 방법을 Table 3 에 비교했다. 마지막 행에서는 각 제한조건의 부 최적화 문제를 풀기 위한 함수값 계산의 평균횟수를 비교했다. 수정 HL-RF 방법의 결과는 Table 2 에 보여지는 'present' 결과와 동일하다. 다른 방법들보다 수정 HL-RF 방법이 적은 계산시간을 통해 비교적 좋은 해를 얻을 수 있었다.

4.3 보 지지용 구조물

Fig. 4 에 보이는 것 처럼 평판 구조물에 보 요소가 용접된 문제를 세번째 예제로 선택했다<sup>(4)</sup>. 목적함수는 용접 재료의 가격과 보 요소 가격의 합이지만 가격은 중량에 비례해서 구해지기 때문에

Table 2 The robust optimal design results of two bar truss design

	Deterministic method	Constraint method <sup>(4)</sup>	Present
Object function, kg	1.5033	1.6135	1.6124
Variance, 10 <sup>-3</sup>	0.6851	0.7815	0.7796
X <sub>1</sub> , cm <sup>2</sup>	1.4070	1.5070	1.5055
X <sub>2</sub> , m	0.3764	0.3827	0.3817
G <sub>1</sub> Constraint satisfaction, %	48.71	99.83	99.82
G <sub>2</sub> Constraint satisfaction, %	99.99	99.99	99.99

Table 3 Comparison of the results using different subproblem optimization methods in present method

	MFD	HL-RF <sup>(5)</sup>	Modified HL-RF
Object function, kg	1.6177	1.6194	1.6124
Variance, 10 <sup>-3</sup>	0.7850	0.7863	0.7796
X <sub>1</sub> , cm <sup>2</sup>	1.5135	1.5173	1.5055
X <sub>2</sub> , m	0.3772	0.3731	0.3817
G <sub>1</sub> Constraint satisfaction, %	99.89	99.89	99.82
G <sub>2</sub> Constraint satisfaction, %	99.99	99.99	99.99
Function call No.	33	29	6

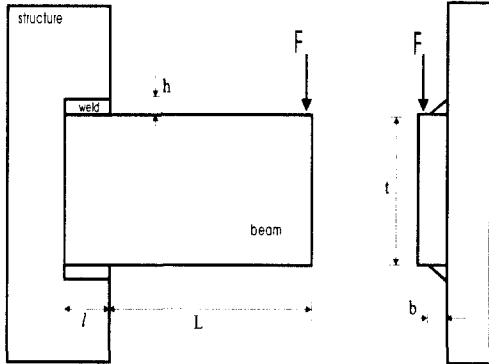


Fig. 4 Welded beam design

결국 구조물의 중량과 관련된 함수이다. 제한조건으로는 용접부위의 전단응력  $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ , 보 요소의 굽힘 응력  $s(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ , 보 요소의 변위와 임계응력 ( $P_c$ )에 대하여 설정했다. 설계변수는 각 용접 재료의 길이( $l$ ), 폭( $h$ ), 보 요소의 높이( $t$ )와 두께( $b$ )로 4개이다. 시스템 파라미터는 하중값, 보 요소 길이( $L$ ), 재료상수( $E, G$ ), 보 끝단의 변위량( $\delta_f$ ), 용접부위의 최대 전단 응력값( $\tau_d$ ), 보 요소의 최대 굽힘 응력값( $s_d$ ), 가격 상수( $C_1, C_2$ ) 등으로 모두 9개이다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = C_1 x_1^2 x_2 + C_2 x_3 x_4 (p_2 + x_2) \\ &\text{Subject to} \\ &\quad \tau_d - \tau(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0.0 \\ &\quad s_d - s(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0.0 \\ &\quad x_4 - x_1 \geq 0.0 \\ &\quad x_1 - 0.125 \geq 0.0 \\ &\quad \delta_f - \delta(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0.0 \\ &\quad P_c(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - F \geq 0.0 \end{aligned} \quad (24)$$

where,

$$\mathbf{x} = \{h \quad l \quad t \quad b\}^T$$

$$\mathbf{p} = \left\{ \begin{array}{l} F \\ L \\ E \\ G \\ \delta_f \\ \tau_d \\ s_d \\ C_1 \\ C_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 1.348 & \text{kN} \\ 35.52 & \text{cm} \\ 206.7 & \text{GPa} \\ 82.68 & \text{GPa} \\ 6.35 & \text{mm} \\ 93.7 & \text{MPa} \\ 206.7 & \text{MPa} \\ 6.739 \times 10^{-5} & \$/\text{m}^3 \\ 2.936 \times 10^{-6} & \$/\text{m}^3 \end{array} \right\}$$

Table 4 The robust optimal design results of welded beam design

	Deterministic method	Constraint method <sup>(4)</sup>	Present
Object function, \$	2.036	2.679	2.383
Variance, $10^{-2}$	0.1647	0.2679	0.2193
$X_1$ , mm	4.418	5.892	4.897
$X_2$ , mm	137.2	191.7	147.5
$X_3$ , mm	143.1	216.2	154.1
$X_4$ , mm	8.971	6.430	9.441
$G_3$ Constraint satisfaction, %	99.99	99.96	99.99
$G_5$ Constraint satisfaction, %	53.67	99.99	99.98

Table 5 Comparison of the results using different subproblem optimization methods in present method

	MFD	HL-RF <sup>(5)</sup>	Modified HL-RF
Object function, \$	2.6543	2.4153	2.383
Variance, $10^{-2}$	0.2885	0.2327	0.2193
$X_1$ , mm	2.541	5.186	4.897
$X_2$ , mm	138.4	153.6	147.5
$X_3$ , mm	123.1	158.2	154.1
$X_4$ , mm	14.54	9.046	9.441
$G_3$ Constraint satisfaction, %	99.99	99.99	99.99
$G_5$ Constraint satisfaction, %	99.93	99.98	99.98
Function call No.	86	65	8

설계변수는 평균값을 중심으로 1%의 범위 안에서 변동을 하며 시스템 파라미터 값들은 평균값 근처에서 5% 범위 안에서 변동을 하는 정규분포 확률변수로 가정한다. 확정론적 최적설계 수식화는 식 (24)와 같이 쓸 수 있다.

Table 4에 확정론적 최적해와 강건 최적설계 결과들을 비교했다. 확정론적 최적해의 제한조건 만족확률이 5번째 제한조건에서 낮은 값을 보였고 강건 최적설계 값들에서는 만족확률이 비교적 높

았다. 표시하지 않은 제한조건 만족확률은 99.99% 이상이다. 또한 본 논문에서 제안한 방법의 설계 값에서의 목적함수의 평균값과 분산값이 Rao<sup>(4)</sup> 방법의 결과보다 작은 결과값을 보였다.

Table 5 에서는 본 논문에서 제안된 수식에 대해 부최적화 문제를 수정 가용방향 방법(MFD), HL-RF 방법과 수정 HL-RF 방법을 이용해서 풀고 결과를 비교했다. 수정 HL-RF 방법의 결과는 Table 4 에 보여지는 'present' 결과와 동일하다. 수정가용방향 방법을 이용해서 풀 결과는 설계변수의 경향이 약간 달랐으며, HL-RF 방법은 수렴성에 문제가 있었는데 이는 많은 문헌<sup>(5)</sup>에서 HL-RF 방법의 단점으로 기술되는 점이다. 다른 방법에 비해서 수정 HL-RF 방법의 결과가 비교적 수렴성이 좋은 결과를 보여 줬다. 수정 HL-RF 방법도 축차과정을 수행하지만 보통 2~3 회 안에 수렴하기 때문에 다른 방법에 비해 계산시간이 줄어든다. 그러나 함수값 계산량이 줄어들기는 하지만 축차과정 중에 민감도 계산 횟수를 줄이는 방법의 연구가 요구된다.

세 가지 예제들에서 설계 변수와 시스템 파라미터가 정규분포를 가진다고 가정하였지만 실제 상황에서 발생할 수 있는 다른 분포 형태도 이용할 수 있다. 또한 설계변수의 변동량을 새로운 설계 변수로 설정하면 공차 설계 문제로 정식화를 수행할 수 있다. 질량, 감쇠, 강성 행렬로 모델링 되는 동적 시스템은 정적 시스템보다 많은 불확정 요소를 포함할 수 있으므로 제안된 강건설계 방법을 통해 불확정 요인을 고려한 설계를 수행하는 연구도 필요하다.

## 5. 결론

본 논문에서는 확률 제한조건을 도입하여 좀 더 세밀하게 제한조건의 강건성을 확보하면서 또한 목적함수의 강건성 확보와 평균값 최소화를 동시에 추구할 수 있는 새로운 강건 최적설계 방법을 제안했다. 또한 도입된 확률 제한조건을 풀기 위해 근사화 개념을 이용한 효율적인 부 최적화 문제 해결방법을 제시했다.

제안된 강건 최적설계 방법은 목적함수의 강건성을 위해 새로운 목적함수로 성능함수와 관련된 파라미터를 도입하였고 이를 평균값과 연관시켜 분산값의 개념을 갖는 새로운 확률제한조건을 추가했다. 또한 기존의 강건설계 방법들과는 다르게 실제 최적설계 프로그램을 이용할 때 기존 제한조

건의 2 차 민감도 값이 필요하지 않게 되었다. 세 가지 예제를 통해 확정론적 최적해와 기존 강건설계 방법들의 결과와 비교하였고 기존의 부문제 해결 방법들과도 비교를 했다.

## 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술 연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Phadke, M. S., 1989, *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (2) 한형석, 박태원, 1996, "반응표면 분석법을 이용한 기구의 강건설계," 한국정밀공학회지, 제 13 권, 제 10 호, pp. 56~61.
- (3) 이권희, 박경진, 1997, "설계변수의 공차를 고려한 구조물의 강건 최적설계," 대한기계학회논문집, 제 21 권, 제 1 호, pp. 112~123.
- (4) Ramakrishnan, B. and Rao, S. S., 1996, "A General Loss Function Based Optimization Procedure for Robust Design," *Engineering Optimization*, Vol. 25, pp. 255~276.
- (5) Melchers, R. E., 1987, *Structural Reliability Analysis and Prediction*, Ellis Horwood Limited.
- (6) Swan, D. A. and Savage, G. J., 1998, "Continuous Taguchi - A Model Based Approach to Taguchi's 'Quality by Design' with Arbitrary Distributions," *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 14, pp. 29~41.
- (7) Sepulveda, A. E. and Jensen, H., 1996, "Comparison of Local and Global Approximations for Reliability Estimation," *AIAA*, Vol. 34, No. 10, pp. 2162~2170.
- (8) Grandhi, R. V. and Wang, L., 1998, "Reliability-Based Structural Optimization Using Improved Two-Point Adaptive Nonlinear Approximations," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 29, pp. 35~48.
- (9) Rao, S. S., 1996, *Engineering Optimization*, John Wiley & Sons, New York.
- (10) 정도현, 이병채, 2000, "기계구조의 강건 설계를 위한 최적화 기법의 개발," 대한기계학회논문집, 제 24 권, 제 1 호, pp. 215~224.
- (11) Liu, P.L. and Kiureghian, A.D., 1991, "Optimization Algorithms for Structural Reliability," *Structural Safety*, Vol. 9, pp. 161~177.
- (12) Kwak, B. M. and Lee, T. W., 1987, "Sensitivity Analysis for Reliability-Based Optimization Using an AFOSM Method," *Computers & Structures*, Vol. 27, pp. 399~406.