대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.2, 333~355, September 2000

수학 교수 · 학습에서의 암호산술 문제의 활용 가능성에 관한 연구

박 교 식 (인천교육대학교)

I. 서론

본 논문에서는 수학 교수 · 학습에서의 암호산술 문제의 활용 가능성에 관해서 논의하게 된다. 암호산술은 문자 또는 기호를 0부터 9까지(십진법의 경우)의 수로 대치시키는 수학 문제를 취급하는 레크리에이션 수학의 한 가지이다. 대개 알파벳이나 기호 *, # 또는 □를 사용한다. 암호산술은 영어 cryptarithmetic을 번역한 것이다. crypt가 암호(暗號)를, arithmetic이 산술(算術)을 뜻하기 때문에 암호산술이라고 한 것이다. 암호산술 대신 강완과 백석윤(1998)은 '문자산수'로, 좌준수와 임중상은 크란츠(Krantz, 1996/2000)의 책을 번역하면서 '암호-대수'로 번역하고 있다.

영어 cryptarithmetic은 cryptarithmie를 번역한 것이다. cryptarithmie는 바드리콴트(M. Vadriquant)가 벨기에의 레크리에이션 수학 잡지인 Sphinx 1931년 5월호에서 사용한 것으로 알려져 있다. 특히, 알파벳 문자를 사용한 것을 '알파벳산술'이라고 하기도 한다. 이 용어는 1955년에 헌터(J. A. H. Hunter)가 사용한 alphametic을 번역한 것이다. 한편, 암호산술을 영어로 cryptarithms, cryptography, code machines, concealment, ciphers, substitution ciphers, transposition ciphers라고도 한다(Eiss, 1988).

오른쪽의 문제는 가장 잘 알려진 암호산술 문제의 하나로 대부분의 수학 퍼즐 책에 등장한다(Frohlichstein, 1967; Bolt, 1987; Eiss, 1988; Smith, & Backman, 1992; 中村義作, 1993). 이 덧셈에서 문자는 0부터 9까지의 수를 나타낸다. 단, 서로 같은 문자는 같은 수를 나타내고, 서로 다른 문자는 서로 다른 수를 나타낸다. 본 논문에서는 초 · 중 · 고등학교에서 이러한 암호산술 문제를 해결해 보는 경험을 통해 문제해결력이 길러질 수 있을 것으로 보고 있다.

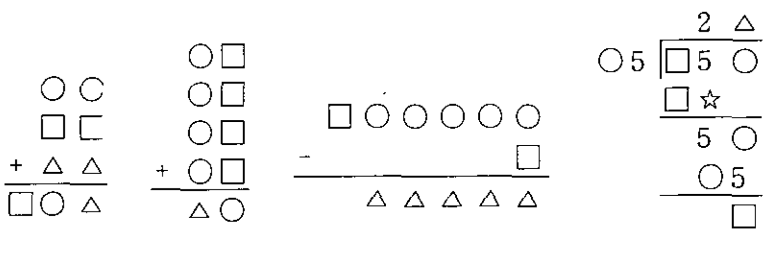
$$\begin{array}{r} S\ E\ N\ D \\ +\ M\ O\ R\ E \\ \hline M\ O\ N\ E\ Y \end{array}$$

그 뿐만 아니라 문제를 해결해 가는 각 단계를 거치는 동안 수학적 사고력도 아울러 길러질 수 있을 것으로 보고 있다. 문제해결력 신장을 위한 암호산술 문제의 효용성은 크란츠(Krantz, 1996/2000)가 잘 예시하고 있다. 그는 문제해결에 동원되는 여러 가지 기법을 설명하는 자신의 책에서, 논리적 추론을 통한 암호산술 문제의 풀이 과정을 상세히 보여주고 있다. 그것은, 암호산술 문제의 해결 과정은 바로 논리적 추론의 과정이므로, 암호산술 문제를 해결해 보는 경험을 통해 논리적으로 추론하는 것을 학습할 수 있다는 것을 말해준다.

한편, 무써와 버거(Musser & Burger, 1997)는 암호산술 문제의 해결 과정에서 예상과 확인 전략, 변수 이용 전략이 어떻게 사용될 수 있는지를 예시하고 있다. 고지마(小嶋隆夫, 1996)는 초등학교 수준에서 수학적 사고력의 신장에 유용한 암호산술 문제를 예시하고 있다. 그는 이 암호산술 문제로 구체적으로 어떠한 수학적 사고력의 신장을 염두에 두고 있는지에 대해서는 언급하고 있지 않다. 그러나 그가 제시하고 있는 풀이를 볼 때 대체로 연역적 사고력의 신장을 염두에 두고 있는 것으로 보인다.

사실 우리 나라에서도 이 암호산술 문제가 문제해결력 신장에 도움이 될 것으로 보고 있다. 이를테면 현재 사용되고 있는 초등학교 4학년 1학기 교과서(6차 교육과정)에서도 다음과 같은 암호산술 문제가 제시되고 있다(교육부, 1999, p.123).

다음 식에서 ○, □, △, ☆은 서로 다른 숫자이다. 각각 알맞은 숫자를 구하여라.



교사용 지도서(교육부, 1999)에서 이 문제에 대한 자세한 풀이와 답을 제공하고 있으나, 이 문제의 수학교육적 가치에 대해서는 자세히 언급하고 있지 않다. 그러나 이 문제가 '여러 가지 문제(2)'라는 단원에서 제시되고 있다는 점에서 문제해결력의 신장을 염두에 두고 제시되었다는 것은 분명하다.

현재 사용되고 있는 중학교 2학년 교과서(6차 교육과정)의 하나에도 다음과 같은 암호산술 문제를 볼 수 있다(김호우, 박교식, 신준국, 정은실, 1999, p.277).

오른쪽은 세로 형식의 나눗셈을 알파벳으로 나타낸 것이다. 이때 서로 다른 문자는 서로 다른 수를 뜻한다. 각 문자에 해당하는 알맞은 수를 찾아보아라. 단, 각 문자는 0, 1, 2, ..., 9 중의 어느 수를 나타내고 있다.

$$
\begin{array}{r}
HUNG \\
UP\overline{)DOPEY} \\
\underline{DU} \\
UP \\
\underline{UP} \\
EY \\
\underline{EY} \\
0
\end{array}
$$

이 교과서에서 이 문제와 그 풀이가 '문제를 잘 풀려면 어떻게 해야하는가?'라는 제목 아래 제시되고 있다는 점에서, 이 문제 역시 문제해결력의 신장을 염두에 두고 제시되었다는 것은 분명하다.

본 논문에서는 초·중·고등학교에서의 수학 교수·학습에서 암호산술 문제가 수학 지식의 습득, 수학적 사고력의 신장, 그리고 문제해결력의 신장에 활용될 수 있다는 주장을 하고자 한다. 이 주장을 위해, 암호산술 문제의 풀이 과정 몇 개를 상세히 제시하고, 그 속에서 수학 지식의 습득, 수학적 사고력의 신장, 그리고 문제해결력의 신장이 어떻게 이루어질 수 있는지 구체적으로 살펴보게 된다.

II. 암호산술 문제의 풀이 과정

암호산술 문제에는 대체로 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 유형이 있다. 그러나, 이 유형으로 분류하기 곤란한 문제도 있다. 또, 뺄셈 문제는 덧셈 문제로 바꿀 수 있기 때문에, 여기서 뺄셈 문제의 예는 제시하지 않기로 한다.

1) 덧셈 문제(사례1)

다음 덧셈 문제에서 문자는 0에서 9까지의 수를 나타낸다. 단, 서로 같은 문자는 같은 수를 나타내고, 서로 다른 문자는 서로 다른 수를 나타낸다.

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & S & E & N & D \\
+ & & M & O & R & E \\
\hline
 & M & O & N & E & Y
\end{array}
$$

암호산술 문제를 해결하는 어떤 특별한 알고리즘이 있는 것은 아니다. 그러나 덧셈 문제의 경우, 부분적으로는 식을 만들어 보는 정형화된 풀이 방식을 생각해 볼 수는 있다. 이와 같이 식을 만들어 해결하는 방식은 후지무라와 다무라(藤村幸三郎, 田村三郎, 1993)를 모방한 것이다. 여기서 식을 만들어 문제를 해결하는 것은 단지 풀이 과정을 간단·명료한 형태로 나타내기 위한 것일 뿐이다. 즉, 이렇게 한다고 해서 초·중·고등학생들이 반드시 그렇

게 할 수 있다는 것, 또는 그렇게 해야한다는 것을 의미하는 것은 아니다. 실제로는 초등학생들과 중학생들이 이와 같은 방식으로 문제를 해결할 가능성은 거의 없어 보인다.

위의 문제에서 일반적으로 (한 자리 수)+(한 자리수)≤18이다. 백의 자리에서 받아올림이 없다면 $S+M \leq 17$이고, 받아올림이 있다면 $S+M+1 \leq 18$이다. 천의 자리에서 1이 받아올림된다. 따라서, $M=1$이다. 이제 주어진 문제를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{rcccc} & S & E & N & D \\ + & & O & R & E \\ \hline & O & N & E & Y \end{array}$$

이 문제에서 다음 식을 만들 수 있다. 여기서 x, y, z는 각각 받아올림이 있는 경우와 없는 경우를 한꺼번에 나타낸 것이다.

$D+E=10x+Y$ ($x=0$ 또는 $x=1$) …①
$x+N+R=10y+E$ ($y=0$ 또는 $y=1$) …②
$y+E+O=10z+N$ ($z=0$ 또는 $z=1$) …③
$z+S+1=10+O$ …④

④에서 $z=0$이면 $S-O=9$이므로 $S=9$, $O=0$이다. 또, $z=1$이면 $S-O=8$이므로 $S=8$, $O=0$이다. 따라서, 어느 경우이든 $O=0$이다. 그런데, $z=1$이면 ③에서 $y+E=10+N$이다. 이때, (좌변)≤10, (우변)≥12가 되어 모순이므로 $z=0$, $S=9$이다. 그러면 ③에서 $y+E=N$이므로 $y=1$ 즉, $1+E=N$이다. 이제 ②에서 $x+N+R=10+E$이다. 그런데 $x=0$이면, $N+R=10+E$에서 $1+E+R=10+E$이므로 $R=9$가 되어 모순이다. 따라서 $x=1$이다. 그러면, $1+N+R=10+E$ 즉, $2+E+R=10+E$에서 $R=8$이다. 이제 위의 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$D+E=10+Y$ ..... ①
$1+E=N$ ..... ③

①에서 $D+E=10+Y$이다. 그런데, $2\leq Y\leq 7$이므로 $12\leq D+E\leq 17$이다. 따라서, (D, E)는 (5, 7), (6, 7), (7, 5) 또는 (7, 6)이다. 그런데, $E=7$이면 $N=1+E=8$이므로 모순이다. 따라서 $D=7$이다. 이때, $E=6$이면 $N=7$이므로 모순이다. 따라서 $E=5$, $N=6$이다. 그리고 $Y=2$이다. 결국 구하는 덧셈은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 9\ 5\ 6\ 7 \\ +\ 1\ 0\ 8\ 5 \\ \hline 1\ 0\ 6\ 5\ 2 \end{array}$$

이 문제에서, 각 문자가 나타내는 수중에서 일부를 미리 제시해 줌으로써 난이도를 낮출 수 있고, 따라서 초등학교 고학년에서 이 문제의 해결을 가능하게 할 수 있다. 이를테면, 학생의 수준에 따라 $Y=2$, $D=7$, $N=6$ 등의 정보를 다음과 같이 미리 제시한다.

$$\begin{array}{r} S\ E\ 6\ 7 \\ +\ M\ O\ R\ E \\ \hline M\ O\ 6\ E\ 2 \end{array}$$

이렇게 난이도를 낮출 경우, $7+E=12$가 되어야 하므로 $E=5$임을 알 수 있다. 이때 $1+6+R=15$가 되어야 하므로 $R=8$임도 알 수 있다. $1+5+O=6$에서 $O=0$임을 알 수 있다. 또 $M=1$이므로 $S=9$임을 알 수 있다.

2) 덧셈문제(사례2)

다음 덧셈 문제는 앞의 덧셈 문제보다 어려운 문제로서, 스미스(Smith, 1998, p.273)에 있는 것이다. 그러나 스미스가 이 문제의 풀이와 답을 제시하고 있지는 않다. 사실상 이 문제의 해결에는 상당한 시간이 필요하다. 또 앞의 (사례1)과는 다르게 답이 2가지이다. 이 문제에서 문자는 0에서 9까지의 수를 나타낸다. 단, 서로 같은 문자는 같은 수를 나타내고, 서로 다른 문자는 서로 다른 수를 나타낸다.

$$\begin{array}{r} D\ A\ D \\ S\ E\ N\ D \\ +\ M\ O\ R\ E \\ \hline M\ O\ N\ E\ Y \end{array}$$

이 문제의 해결에서 사용되는 중요한 수학적 지식은 (한 자리 수)+(한 자리 수)+(한 자리수)의 결과로 받아올림되는 수는 2이하라는 사실이다. 앞의 (사례1)에서와 같은 방법으로 $M=1$임은 분명하다. 이제 주어진 문제를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{r} D\ A\ D \\ S\ E\ N\ D \\ +\ 1\ O\ R\ E \\ \hline 1\ O\ N\ E\ Y \end{array}$$

이 문제에서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다. 여기서 x, y, z는 각각 받아올림이 있는 경우와 없는 경우를 한꺼번에 나타낸 것이다.

$2D+E=10x+Y$ ($x=0$, $x=1$ 또는 $x=2$) .....①
$x+A+N+R=10y+E$ ($y=0$, $y=1$ 또는 $y=2$) .....②
$y+D+E+O=10z+N$ ($z=0$, $z=1$ 또는 $z=2$) .....③
$z+S+1=10+O$ .....④

④에서 $z=2$이면 $S-O=7$에서 $(S, O)=(9,2)$ 또는 $(S, O)=(7,0)$이다. $(S, O)=(9,2)$이면 ③에서 $y+D+E=18+N$이다. $D+E\leq 15$이므로 $y+D+E\leq 17$이다. 그런데 $18+N\geq 18$이므로 모순이다. 따라서 $(S, O)=(9,2)$는 조건에 맞지 않는다. $(S, O)=(7,0)$이면 ③에서 $y+D+E=20+N$이다. 이때 (좌변)≤ 19, (우변)≥ 22이므로 조건에 맞지 않는다.

④에서 $z=0$이면 $S-O=9$이고, 따라서 $S=9$, $O=0$이다. 이때, ②, ③에서 $A+D+R=9y-x$이므로 $y\neq 0$이다. $y=1$이면 $x=0$이어야 한다. 그러면 ①에서 $2D+E=Y$이고, 이때 $D\geq 2$, $E\geq 2$이므로 $Y=7$또는 $Y=8$이다. $Y=7$이면 $D=2$,

$E=3$이다. $D=2$이면 $A+D+R=9y-x$에서 $A+R=7$이다. 이것을 만족하는 A, R의 값을 구할 수 없다. 따라서 $Y\neq7$이다. $Y=8$이면 $D=3$, $E=2$이다. $D=3$이면 $A+D+R=9y-x$에서 $A+R=6$이다. 이것을 만족하는 A, R의 값을 구할 수 없다. 따라서 $Y\neq8$이다. 결국 $y=2$이어야 한다. ②에서 $x+A+N+R=20+E$ 즉, $A+N+R=20-x+E$이다. 그런데, (좌변)≤21에서 (우변)≤21이어야 하므로 $x\neq0$이다. $x=1$이면 $E=2$이다. 이때 $2D+2=10+Y$에서 $Y=4$ 또는 $Y=6$이다. $Y=4$이면 $D=6$이다. 이것은 조건에 맞지 않는다. $Y=6$이면 $D=7$이다. 이것도 조건에 맞지 않는다. $x=2$이면 $E=2$ 또는 $E=3$이다. $E=2$이면 $2D+2=20+Y$에서 $2D=18+Y$가 되어 Y의 값을 구할 수 없다. $E=3$이면 $2D+3=20+Y$에서 $2D=17+Y$가 되어 Y의 값을 구할 수 없다. 결국 $z=0$이면 조건에 맞지 않는다. $z\neq0$, $z\neq2$이므로 결국 $z=1$이어야 한다. 이때 $S-O=8$이고, 따라서 $S=8$, $O=0$이다. 이제 주어진 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$2D+E=10x+Y\ (x=0,\ x=1 \text{ 또는 } x=2)\ .....①$$
$$x+A+N+R=10y+E\ (y=0,\ y=1 \text{ 또는 } y=2)\ .....②$$
$$y+D+E=10+N\ .....③$$

$x=0$이면 ①에서 $2D+E=Y$이고, 이때 $D\geq2$, $E\geq2$이므로 $Y=7$ 또는 $Y=9$이다. $Y=7$이면 $D=2$, $E=3$이다. ③에서 $y+D+E=10+N$에서 (좌변)≤7, (우변)≥14이므로 모순이다. $Y=9$이면 $D=2$, $E=5$이다. ③에서 (좌변)≤9, (우변)≥13이므로 조건에 맞지 않는다. 결국 $x=1$ 또는 $x=2$이다. 또, ②, ③에서 $A+D+R=10+9y-x$이므로 $y\neq2$이다. ②에서 $x+A+N+R=10y+E$이다. $y=0$이면 (좌변)≥10, (우변)≤9가 되어 모순이다. 따라서 $y\neq0$이다. 결국 $y=1$이다. 만약 $x=2$, $y=1$이면 ②, ③에서 $2+A+N+R=10+E$, $1+D+E=10+N$이므로 $A+R+D=17$이다. ①에서 $2D+E=20+Y$이므로 D≥6이다. 따라서 $D=7$ 또는 $D=9$이다. $D=7$이면 조건에 맞는 E의 값을 구할 수 없다. $D=9$이면 $A+R=8$이다. 그런데 ②에서 $2+8+N=10+E$이므로 $N=E$가 되어 모순이다. 따라서 $x=1$, $y=1$이어야 한다. 이제 주어진 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$2D+E=10+Y \ .....①$$
$$1+A+N+R=10+E \ .....②$$
$$1+D+E=10+N \ .....③$$

먼저 D의 값을 구해 보자. $O=0$, $M=1$, $S=8$이 이미 정해졌으므로 $D\neq0$, $D\neq1$, $D\neq8$임은 분명하다. ①에서 $2D+E=10+Y$이므로 $D\neq5$임은 분명하다. 또, ③에서 $D\neq9$임도 분명하다. 결국 D는 2, 3, 4, 6, 7 중의 한 수이다. $D=2$이면 ③에서 $3+E=10+N$이다. 그런데 (좌변)≤12, (우변)≥13이므로 모순이다. 즉, $D\neq2$이다. $D=3$이면 ③에서 $E=6+N$이다. $N\neq0$, $N\neq1$이므로 $N=2$이어야 한다. 이때, $E=8=S$가 되어 조건에 맞지 않는다. 즉, $D\neq3$이다. $D=4$이면 ③에서 $E=5+N$이므로, $N=2$이어야 한다. 이때 $E=7$이므로, ①에서 $8+7=10+Y$이므로 $Y=5$이다. 이때 ②에서 $A+R=14$이므로 $A=8$ 또는 $R=8$이 되어 조건에 맞지 않는다. 즉, $D\neq4$이다. $D=7$이면 ③에서 $E-N=2$이므로 E는 4, 5, 6 중의 한 수이다. 그런데 ①에서 $14+E=10+Y$이므로 E는 4, 6이 될 수 없다. $E=5$이면 $N=3$, $Y=9$이다. 그러나 이때 $A+R=11$이 되는 A, R의 값을 구할 수 없다. 즉, $D\neq7$이다. $D=6$이면 $E-N=3$에서 $E=7$ 또는 $E=5$이다. $E=7$이면 $A+R=12$를 만족하는 A, R의 값을 구할 수 없다. $E=5$이면 $N=2$, $Y=7$이다. 이때 $A+R=12$를 만족하는 (A, R)는 (3, 9) 또는 (9, 3)이다. 따라서 구하는 덧셈은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 6\ 3\ 6 \\ 8\ 5\ 2\ 6 \\ +\,1\ 0\ 9\ 5 \\ \hline 1\ 0\ 2\ 5\ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ 9\ 6 \\ 8\ 5\ 2\ 6 \\ +\,1\ 0\ 3\ 5 \\ \hline 1\ 0\ 2\ 5\ 7 \end{array}$$

이 문제에서도, 각 문자가 나타내는 수중에서 일부를 미리 제시해 줌으로써 난이도를 낮출 수 있다. 이를테면 $D=6$, $E=5$, $N=2$라고 하자. 그러면 주어진 문제는 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 6\ A\ 6 \\ S\ 5\ 2\ 6 \\ +\,M\ O\ R\ 5 \\ \hline M\ O\ 2\ 5\ Y \end{array}$$

$6+6+5=17$에서 $Y=7$임을 알 수 있다. 또, $1+A+2+R=15$가 되어야 하므로 $A+R=12$이다. 따라서 $(A,R)=(3,9)$ 또는 $(A,R)=(9,3)$임을 알 수 있다. 또, $1+6+5+O=12$가 되어야 하므로 $O=0$이다. 그리고 $M=1$이므로 $S=8$이다.

3) 곱셈 문제(사례3)

곱셈 문제의 해결 과정에는 대체로 덧셈의 과정이 수반된다. 따라서, 곱셈 문제의 해결에는 덧셈 문제의 해결이 중요한 역할을 한다. 다음 곱셈 문제는 버트휘슬(C. Birtwistle, 1971, p.150, 186, 198)에 있는 것이다. 버트휘슬은 약간의 힌트와 답을 제시하고 있으나, 완전한 풀이는 제시하지 않고 있다. 이 문제에서 각 문자는 0에서 9까지의 수를 나타낸다. 단, 서로 같은 문자는 같은 수를 나타내고, 서로 다른 문자는 서로 다른 수를 나타낸다.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & M & B & C & F \\
 & \times & & A & G & H \\
\hline
 & & B & J & G & H \\
M & M & J & F & J & \\
C & J & B & K & & \\
\hline
B & M & C & A & A & H
\end{array}
$$

이 문제의 해결에서 사용되는 중요한 수학적 지식은 (한 자리 수)+(한 자리 수)+(한 자리수)의 결과로 받아올림되는 수는 2이하라는 사실과 (네 자리 수)×(한 자리수)의 결과가 네 자리 수 또는 다섯 자리 수가 된다는 사실이다. 이 문제에서 A, G, H, F, C는 0 또는 1이 아님은 분명하다. 또, $M\neq 0$이다. 이제 다음 식을 얻을 수 있다. 여기서 x, y, z, w는 각각 받아올림이 있는 경우와 없는 경우를 한꺼번에 나타낸 것이다.

$G+J=10x+A$ ($x=0$ 또는 $x=1$) .....①

$x+J+F+K=10y+A$ ($y=0$, $y=1$ 또는 $y=2$) .....②

$y+2B+J=10z+C$ ($z=0$, $z=1$ 또는 $z=2$) .....③

$z+M+J=10w+M$ ($w=0$ 또는 $w=1$) .....④

$w+M+C=B$ .....⑤

④에서 $w=0$이면 $J=0$이다. 따라서 ①에서 $G=10x+A$이다. $x=0$이면 $G=A$가 되어 모순이다. $x=1$이면 $G\geq 12$가 되어 모순이다. 결국 $w\neq 0$이므로, $w=1$이다. 이때 ④에서 $J=10-z$이므로 $z=1$ 또는 $z=2$임을 알 수 있다. $z=1$이면 $J=9$이다. 그러면 ①에서 $G+9=10x+A$이다. $x=0$이면 $G+9=A$가 되어 모순이다. 따라서 $x=1$이다. 그러면 ②에서 $10+F+K=10y+A$이다. $y=0$이면 모순이므로 $y=1$ 또는 $y=2$이다. $y=1$이면 ③에서 $1+2B+9=10+C$이므로 $2B=C$이다. 이 식과 ⑤에서 $1+M+B=0$임을 알 수 있다. 그런데 (좌변)>0이므로 이것은 조건에 맞지 않는다. 또, $y=2$이면 ③에서 $1+2B=C$를 얻는다. 이 식과 ⑤에서 $2+M+B=0$임을 알 수 있다. 그런데 (좌변)>0이므로 이것도 조건에 맞지 않는다. 따라서 $z=2$이고, 이때 $J=8$이다. 이제 주어진 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$G+8=10x+A$ ($x=0$ 또는 $x=1$) .....①
$x+8+F+K=10y+A$ ($y=0$, $y=1$ 또는 $y=2$) .....②
$y+2B=12+C$ .....③
$1+M+C=B$ .....⑤

G의 값을 구해 보자. $J=8$이 이미 정해졌으므로 $J\neq 8$이다. ①에서 $x=0$이면 $G+8=A$가 되어 $G=1$, $A=9$이다. 그런데, $M\geq 2$에서 $MBCF\times A=MBCF\times 9=$ (다섯자리수)가 되므로 조건에 맞지 않는다. (여기서 MBCF는 천의 자리의 수, 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 각각 M, B, C, F인 네 자리 수를 간단히 나타내기 위해 이 논문에서 일시적으로 사용한 표기이다.) 따라서 $x=1$이다. 이제 주어진 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$G=2+A$ .....①
$9+F+K=10y+A$ ($y=0$, $y=1$ 또는 $y=2$) .....②
$y+2B=12+C$ .....③
$1+M+C=B$ .....⑤

$y=0$이면 ②에서 $9+F+K=A$가 되어 조건에 맞지 않는다. 또, $y=2$이면 ②에서

$F+K=11+A$, ③에서 $2B=10+C$이다. 또, 이것과 ⑤에서 $M+B=9$이다. 그런데 $C\neq0$이므로 $2B=10+C$에서 $B=6$ 또는 $B=7$이다. ($B=9$이면 $C=8$이 되어 조건에 맞지 않는다. 따라서 $B\neq9$이다.) 만약 $B=6$이면 $M=3$, $C=2$이다. 이때 $MBCF\times A=$(네자리수)가 되게 하는 A의 값을 구할 수 없다. $B=7$이면 $M=2$, $C=4$이다. 이때 $F+K=14$를 만족하는 F, K의 값을 구할 수 없다. $(F,K)=(5,9)$ 또는 $(F,K)=(9,5)$이면 $A=3$이다. 이때 ①에서 $G=5$가 되어 모순이다. 따라서 $y=1$이다. 이제 주어진 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G=2+A \quad .....①$$
$$F+K=1+A \quad .....②$$
$$2B=11+C \quad .....③$$
$$1+M+C=B \quad .....⑤$$

③에서 $B=6$, $B=7$ 또는 $B=9$이다. $B=6$이면 $M=4$, $C=1$이다. 그런데, $MBCF\times A=$(네자리수)이려면 $A=2$이어야 하고, 이때 $G=4$가 되어 조건에 맞지 않는다. $B=7$이면 $M=3$, $C=3$이 되어 조건에 맞지 않는다. $B=9$이면 $M=1$, $C=7$이다. 이때 $197F\times G=$(다섯자리수)이려면 $G=6$이어야 한다. 따라서 $A=4$, $F+K=5$이다. 그런데 $H=5$이어야 하므로 $F=3$, $K=2$이다. 즉, 구하는 곱셈은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 1\ 9\ 7\ 3 \\ \times\quad 4\ 6\ 5 \\ \hline 9\ 8\ 6\ 5 \\ 1\ 1\ 8\ 3\ 8 \\ 7\ 8\ 9\ 2 \\ \hline 9\ 1\ 7\ 4\ 4\ 5 \end{array}$$

이 문제에서도, 각 문자가 나타내는 수중에서 일부를 미리 제시해 줌으로써 난이도를 낮출 수 있다. 이를테면 $B=9$, $J=8$, $M=1$이라고 하자. 그러면 주어진 문제는 다음과 같다.

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 1 & 9 & C & F \\ & \times & & A & G & H \\ \hline & & 9 & 8 & G & H \\ 1 & 1 & 8 & F & 8 & \\ C & 8 & 9 & K & & \\ \hline 9 & 1 & \mathrm{C} & A & A & H \end{array}$$

$C=7$이므로 $197F\times A=789K$를 성립하게 하는 A의 값은 4뿐이다. 따라서 $G=6$이다. F×H의 일의 자리 수가 다시 H가 되려면 $H=5$이어야 한다. 이때 $F=3$이고, 따라서 $K=2$가 된다.

4) 곱셈 문제(사례4)

다음 곱셈 문제는 약간 특이한 형태로 트리그(Trigg, 1985, p.35, 133)에 있는 것이다. 이 문제의 풀이는 트리그의 책에 있는 부커(Buker)의 풀이를 거의 그대로 답습한 것이다. 이 문제에서 각 자리의 P는 10보다 작은 소수를 나타낸다.

$$\begin{array}{rrrrr} & & P & P & P \\ & \times & & P & P \\ \hline & P & P & P & P \\ P & P & P & P & \\ \hline P & P & P & P & P \end{array}$$

이 문제의 해결을 위해서는 소수에 관한 지식이 있어야 한다. 위의 문제에서 P는 2, 3, 5, 7 중의 하나이다. 이제 주어진 조건을 만족하면서 (세 자리 수)×(한 자리 수)=(네 자리 수)가 되는 것을 찾아야 한다. 주어진 문제에서 피승수를 편의상 abc, 승수를 de라고 하자. (여기서 abc는 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 각각 a, b, c인 세 자리 수를 간단히 나타내기 위해 이 논문에서 일시적으로 사용한 표기이다. 같은 방법으로 de는 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 각각 d, e인 두 자리 수를 간단히 나타낸 것이다.)

주어진 문제에서 c≠2, e≠2임은 분명하다. $c=3$이면 $e=5$이어야 한다. 그러나 이때 주어진 조건을 만족하는 b의 값을 구할 수 없다. 따라서 c≠3이다. $c=7$이어도 $e=5$, $b=2$이어야 한다. 그러나 이때 주어진 조건을 만족하는 a의 값을 구할 수 없다. 따라서 c

$\neq 7$이다. 결국 가능성이 있는 것은 $c=5$이다. 이때 $e=3$이면, $ab5\times 3=$(네 자리 수)에서 $a=5$ 또는 $a=7$이다. 그런데 $a=5$이면 조건에 맞지 않으므로 $a=7$이어야 한다. 이때 $b=7$이어야 한다. 같은 방법으로 $e=5$이면, $a=5$ 또는 $a=7$이어야 한다. $a=5$이면, $b=5$이다. $a=7$이어도, $b=5$이다. $e=7$이면, $a=3$이어야 하고, $b=2$이어야 한다. 이상에서 주어진 조건을 만족하는 것은 다음의 네 가지이다.

$$775\times 3=2325,\ 555\times 5=2775,\ 755\times 5=3775,\ 325\times 7=2275$$

그런데, 위의 네 식에서 피승수가 모두 다르므로, 주어진 식에서 d와 e는 같아야 한다. 따라서 이것을 만족하는 것은 다음뿐이다.

$$\begin{array}{rrrrr} & & 7 & 7 & 5 \\ & \times & & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & \\ \hline 2 & 5 & 5 & 7 & 5 \end{array}$$

이 문제에서도, 각 문자가 나타내는 수중에서 일부를 미리 제시해 줌으로써 난이도를 낮출 수 있다. 이를테면 문제를 다음과 같이 제시할 수 있다.

$$\begin{array}{rrrrr} & & P & 7 & 5 \\ & \times & & 3 & P \\ \hline & P & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & P & \\ \hline P & P & P & P & 5 \end{array}$$

피승수를 편의상 a75, 승수를 3e라고 하자. $e\neq 2$임은 분명하다. e는 3, 5, 7 중의 하나이지만, 하나 하나 검토해 보면 $e=3$임을 알 수 있다. 또, $a=5$임을 알 수 있다.

5) 나눗셈 문제(사례5)

다음에서 왼쪽의 나눗셈 문제는 버트휘슬(Birtwistle, 1971, p.149)에 있는 것(오른쪽의 문제)을 난이도를 높이기 위해 필자가 수정한 것이다. 이 문제에서 기호 *는 0에서 9까지의

임의의 수를 나타낸다.

```
          8 * * *               8 * * *
  * * ) * * * * *       * * ) * * 7 * *
        * *                   * *
          * *                   * *
          * *                   * *
            * * *                 * * *
            * * *                 * * *
                0                     0
```

이 문제의 해결을 위해서는 나눗셈에서 피제수, 제수, 몫 사이의 관계를 알고 있어야 한다. 이 나눗셈에서 제수를 d라고 하자. d는 두 자리 수이고 $8\times d=$(두 자리 수)이다. 따라서 $10\le d\le 12$임을 알 수 있다. 몫을 편의상 8abc라고 하자. (여기서 8abc는 천의 자리의 수, 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 각각 8, a, b, c인 네 자리 수를 간단히 나타내기 위해 이 논문에서 일시적으로 사용한 표기이다.) 위의 문제에서 $b=0$, $c=9$임은 분명하다. 따라서 $9d=$(세 자리 수)가 되려면 $d=12$이어야 한다. 즉, $12\times 9=108$이다. 이상의 사실에서 주어진 나눗셈을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

```
          8 a 0 9
  1 2 ) 9 * * 0 8
        9 6
          * *
          * *
            1 0 8
            1 0 8
                0
```

여기서 피제수의 천의 자리의 수와 백의 자리의 수로 구성된 두 자리 수 **와 12×a를 나타내는 **의 차는 1이다. 이것을 만족하는 것으로 $a=1$, $a=2$, $a=3$의 세 경우가 있다. $a=1$이면 $13-12=1$이다. $a=2$이면 $25-24=1$이다. $a=3$이면 $37-36=1$이다. 결국 구하는 나눗셈은 다음의 세 가지이다.

$$
\begin{array}{rl}
 & 8109 \\
12 & \big)\overline{97308} \\
 & \underline{96} \\
 & 13 \\
 & \underline{12} \\
 & 108 \\
 & \underline{108} \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 8209 \\
12 & \big)\overline{98508} \\
 & \underline{96} \\
 & 25 \\
 & \underline{24} \\
 & 108 \\
 & \underline{108} \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 8309 \\
12 & \big)\overline{99708} \\
 & \underline{96} \\
 & 37 \\
 & \underline{36} \\
 & 108 \\
 & \underline{108} \\
 & 0
\end{array}
$$

이 문제에서도, 각 문자가 나타내는 수중에서 일부를 미리 제시해 줌으로써 난이도를 낮출 수 있다. 이를테면 위에서 오른쪽에 있는 문제는 왼쪽에 있는 문제보다 쉽다. 이때도 제수를 d, 몫을 8abc라고 하면 $b=0$, $c=9$이고 $d=12$이다. 여기서 피제수의 천의 자리의 수와 백의 자리의 수로 구성된 두 자리 수 *7과 12×a를 나타내는 **의 차는 1이다. 즉, $*7-**=1$이고, 이것을 만족하는 것은 $37-36=1$이므로 $a=3$임을 알 수 있다. 결국 구하는 나눗셈은 앞의 세 답 중 가장 오른쪽에 있는 것뿐이다.

6) 방정식 문제(사례6)

다음 문제는 트리그(Trigg, 1985, p.24, 112)에 있는 것이다. 이 문제의 풀이는 트리그의 풀이 그대로이다. 이 문제에서 각 문자는 0에서 9까지의 수를 나타낸다. 서로 같은 문자는 서로 같은 수를 나타내고, 서로 다른 문자는 서로 다른 수를 나타낸다.

$$7(FRYHAM)=6(HAMFRY)$$

이 문제의 해결을 위해서는 서로 소의 개념을 알고 있어야 한다. 이 문제에서 $FRY=x$, $HAM=y$라고 하면, 위의 식을 간단히

$$7(1000x+y)=6(1000y+x)$$

와 같이 나타낼 수 있다(여기서 FRY는 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 각각 F, R, Y인 세 자리 수를 간단히 나타내기 위해 이 논문에서 일시적으로 사용한 표기이다. HAM의 경우도 마찬가지이다.) 이 식을 정리하면 $6994x=5993y$이고, 결국 $538x=461y$가 된다. 그런데 538과 461은 서로 소이므로 $x=461$, $y=538$이어야 한다.

따라서, 주어진 식은 다음과 같다.

$$7 \times 461538 = 6 \times 538461$$

III. 암호 산술 문제의 풀이 과정 분석

앞에서 암호산술 문제의 유형 6가지를 보았다. 암호산술 문제의 풀이 과정에 주목해 보면, 이러한 풀이를 위해서는 대체로 수학 지식, 수학적 사고력, 문제해결력이 필요함을 알 수 있다. 이제 이에 대해 자세히 살펴보기로 하자.

1) 수학 지식의 측면

덧셈 문제의 해결에서는 덧셈을 할 수 있는 기능이외에 받아올림에 관련된 지식이 사용된다. 즉, (한 자리 수) + (한 자리 수)의 결과로 받아올림되는 수는 1이하라는 사실이 사용된다. 가장 큰 한 자리 수는 9이므로 9+9라고 해도 그 합은 18이다. 이때, 받아올림되는 것은 1이다. 만약 아래 자리에서 1이 받아올림되었다고 해도, 그 합은 19이하이다. 따라서 (한 자리 수) + (한 자리 수)의 결과로 받아올림되는 수는 1이하이다. 두 수의 덧셈 대신 세 수의 덧셈에서는 (한 자리 수) + (한 자리 수) + (한 자리수)의 결과로 받아올림되는 수는 2이하라는 사실이 사용된다. 가장 큰 한 자리 수는 9이므로 9 + 9 + 9라고 해도 그 합은 27이다. 이때, 받아올림되는 것은 2이다. 만약 아래 자리에서 2가 받아올림되었다고 해도, 그 합은 29이하이다. 따라서 (한 자리 수) + (한 자리 수) + (한 자리수)의 결과로 받아올림되는 수는 2이하이다.

뺄셈 문제는 덧셈 문제로 바꿀 수 있기 때문에, 뺄셈 문제는 본질적으로 덧셈 문제와 같다. 실제로 뺄셈 문제를 덧셈 문제로 바꾸면, 부분적으로 앞서 보았던 정형화된 풀이 방식을 이용하는 것이 가능하기 때문에, 뺄셈 문제 그대로 해결하는 것보다 쉬울 수 있다. 그러나 때로는 뺄셈 문제를 덧셈 문제로 바꾸기보다는 뺄셈 문제 그대로 해결하는 것이 더 쉬울 수도 있음은 물론이다. 그 판단은 주어진 뺄셈 문제를 이해하고, 그리고 그 해결 계획을 세우는 과정에서 결정될 사항이다.

곱셈 문제의 해결에서는 곱셈을 할 수 있는 기능 이외에 피승수와 승수, 그리고 곱의 관계에 대한 지식이 사용된다. 이 지식에는 곱셈구구의 구조에 대한 지식이 포함된다. 또, 이를테면 (세 자리 수)×(한 자리 수)는 (세 자리 수) 또는 (네 자리 수)가 된다는 사실이 포

함된다. 한편 곱셈 문제의 해결 과정에서는 덧셈이 자연스럽게 수반된다. 따라서 덧셈 문제의 해결을 위한 지식 또한 사용된다.

나눗셈 문제의 해결에서는 나눗셈을 할 수 있는 기능 이외에 피제수와 제수, 그리고 몫의 관계에 대한 지식이 사용된다. 그런데, 이 나눗셈 문제의 해결 과정에서는 곱셈이 자연스럽게 수반된다. 따라서 곱셈 문제의 해결을 위한 지식이 사용된다. 뿐만 아니라 뺄셈도 수반되므로 뺄셈 문제의 해결을 위한 지식도 사용된다.

대부분의 암호산술 문제에서는 사칙 계산과 관련된 기본적인 지식이 사용된다. 그러나 문제에 따라 서로 소, 소수, 식, 방정식 등과 같은 지식이 더 사용되기도 한다. 암호산술 문제의 해결 과정에서 이와 같은 지식을 적절하게 활용하는 것이 결코 쉬운 일은 아니다. 이와 같은 지식을 알고 있다고 해도 그러한 지식을 곧바로 활용할 수 있는 것은 아니다. 필요한 지식을 적절한 시기에 떠올리는 일은 사고의 범주에 속하기 때문이다.

2) 수학적 사고의 측면

암호산술 문제의 해결 과정을 수학적 사고의 측면에서 분석하기에 앞서, 수학적 사고력과 문제해결력을 구분해 둘 필요가 있다. 수학적 사고력이란 수학적으로 사고하는 능력을 의미하는데, 더 구체적으로는 대체로 가타키리(片桐重男, 1988/1992)가 규정한 수학적인 사고 방법을 구사하는 능력을 의미한다. 한편, 문제해결력은 문제를 해결하는 능력을 의미하는데, 더 구체적으로는 폴리아(Polya, 1957/1986)가 규정한 문제해결의 네 단계를 수행하는 능력을 의미한다. 실제로 문제해결의 각 단계에서는 여러 가지 수학적 사고가 사용되게 된다.

이제 암호산술 문제의 해결 과정을 수학적 사고의 측면에서 분석해 보기로 하자. 암호산술 문제의 해결에서는 주로 문자 또는 기호의 값을 정하기 위한 여러 가지 조건을 검토하게 되는데, 이와 같은 검토의 과정에 수학적 사고가 개재되게 된다. 암호산술 문제의 해결 과정에서는 하나의 문자 또는 기호가 하나의 값을 갖게 되는 이유를 합리적으로 제시하지 않으면 안 된다. 특히, 주어진 조건으로부터 무엇을 말할 수 있는지, 또는 어떤 사실이 성립하는지에 대해 중점적으로 사고하게 된다. 이와 같은 사고는 대체로 '총합적(総合的)인 사고'에 해당한다. 그리고 그것은 또, 연역적인 사고의 일종으로 볼 수 있다(片桐重男, 1988/1992). (사실 가타키리는 연역적인 사고 대신 '연역적인 사고 방법'과 같은 표현을 사용하고 있다. 또한, 이용률, 성현경, 정동권, 박영배는 가타키리의 책을 번역하면서 '사고 방법(考え方)'에 해당하는 것으로 '생각'이라는 용어를 사용하고 있다. 그래서 '연역적인 사고

방법' 대신 '연역적 생각'이라고 하고 있다. 본 논문에서는 가타키리가 규정한 '연역적 사고 방법(연역적 생각)'을 구사하는 사고를 바로 연역적 사고로 간주하고 있다. 이하 수학적 사고는 모두 가타키리가 규정한 '수학적 사고 방법(수학적 생각)'을 구사하는 사고를 의미한다.)

암호산술 문제의 해결에서는 주로 종합적인 사고가 사용되고 있지만, 다른 형태의 사고도 또한 사용되고 있다. 이를테면 한 문자 또는 기호의 값이 다른 문자 또는 기호의 값에 좌우될 수 있다는 의존 관계에 주목하는 사고가 많이 사용되고 있다. 이와 같은 사고는 대체로 '함수적인 사고'에 해당한다. 더 근원적으로는 문자 또는 기호로 제시된 것을 이해하고, 그리고 그에 바탕을 두어 사고를 추진하게 된다. 이와 같은 사고는 대체로 '기호화의 사고'에 해당한다. 수의 대소, 상등의 비교 방법을 바르게 적용해야 하는데, 이것은 표현 방법의 약속을 바탕으로 하는 사고 즉, '표현의 사고'의 발로(發露)이다. 계산 방법을 알아내고, 그것을 논리적으로 설명하는 것은 계산의 기본 성질에 주목하기 때문인데, 이것은 '기본 성질의 사고'에 해당한다. 또, 각 경우의 한계를 조사하여 문자 또는 기호가 취할 수 있는 값의 가능한 범위를 알아보고 있는데, 이것은 '특수화의 사고'에 해당한다.

초등학교 수준에서는 앞에서 본 것과 같이 수식(數式)을 만들어 해결하는 것이 용이하지 않을 것이다. 그러나 중학교 이상인 경우에는 부분적으로 수식을 만들고, 그리고 그것을 형식적으로 조작하는 것도 가능해 보인다. 이것은 '식에 대한 사고'에 해당한다.

지금까지의 논의에 따르면 암호산술 문제의 해결 과정에서는 주로 연역적 사고, 특수화의 사고, 함수적 사고, 기호화의 사고, 표현의 사고, 기본 성질의 사고, 식에 대한 사고가 많이 사용되고 있다. 이러한 사고 이외에 이러한 사고가 적절하게 작용하도록 제어하는 '메타 사고' 역시 사용되고 있다. 이를테면 암호산술 문제에서 얻을 수 있는 정보를 정리하기 위한 효율적인 방법을 찾아야 한다는 메타 사고가 발동한 결과로 식에 대한 생각을 할 수 있게 되는 것이다.

3) 문제해결의 측면

앞에서 문제해결력은 폴리아가 규정한 문제해결의 네 단계를 수행하는 능력을 의미한다고 했다. 폴리아가 규정한 문제해결의 네 단계는 문제 이해, 계획 수립, 계획 실행, 그리고 반성이다. 따라서 문제를 해결하는 능력은 세부적으로 말하자면 문제를 이해하는 능력, 계획을 수립하는 능력, 계획을 실행하는 능력, 그리고 반성하는 능력의 집합체라고 할 수 있다. 특히, 해결 계획을 수립하는 과정에서는 적절한 문제해결 전략을 선택하는 능력이 요구

된다.

이제 암호산술 문제의 해결 과정을 문제해결의 측면에서 분석해 보기로 하자. 암호산술 문제에서는 대개 알파벳이나 기호 *, # 또는 □를 사용한다. 문제 이해의 단계는 바로 이러한 문자 또는 기호의 의미를 분명히 파악하는 것으로부터 시작된다. 이를테면, 이 단계에서 ABCD는 천의 자리의 수, 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 각각 A, B, C, D인 네 자리 수를 나타내며, 따라서 $A \neq 0$임을 인식해야 한다.

다음으로는 해결 계획을 수립해야 하는데, 이를 위해서는 주어진 문제에서 얻을 수 있는 정보가 무엇인지, 그리고 그러한 정보를 어떻게 정리할 것인지를 판단해야 한다. 또, 문제해결의 실마리를 어디서, 어떻게 얻을 수 있는지 생각해야 한다. 이 과정에서 적절한 전략을 선택해야 한다. 가장 쉽게 선택할 수 있는 전략은 '예상과 확인(시행 착오)' 전략이다. 그러나 이 전략이 항상 효율적이지는 않다. 경우의 수가 많은 경우에는 다른 전략을 생각해 보아야 한다. 이 단계에서 학생들의 수준에 따라 '표만들기', '식만들기' 등의 전략이 사용될 수 있다. 그러나 가장 많이 사용되는 전략은 '논리적 추론'이다. 이 전략은 자신이 결정한 문자 또는 기호의 값이 틀리지 않았다는 것을 타당성 있게 설명해 가는 전략이다. 크란츠(Krantz, 1996/2000)에서 볼 수 있듯이, 암호산술 문제의 풀이 과정은 바로 이러한 논리적 추론 과정의 연속이다.

암호산술 문제의 해결에서는 계획 수립과 계획 실행의 단계가 확연히 구분되는 것은 아니다. 암호산술 문제를 해결하는 과정 자체가 여러 개의 작은 과정으로 나뉘어 있기 때문이다. 그래서 하나의 작은 과정에서 그 과정 자체의 해결 계획을 수립한 후에는 실행이 이어지게 되고, 그 다음에 다시 새로운 작은 과정에 이르게 되어, 새로운 해결 계획의 수립과 그 계획의 실행이 반복되기 때문이다. 대체로 계획 실행의 단계에서는 계산이 요구된다. 복잡하지 않은 계산은 직접 할 수도 있다. 그러나 복잡한 계산의 경우는 계산기의 도움을 받을 수 있다. 때로는 적지 않은 횟수의 계산을 해야하기 때문에 계산기의 도움이 필수적일 수도 있다.

반성의 단계에서는 자신이 구한 값이 합리적인지를 확인하게 된다. 이런 경우는 대개 본래의 문자 또는 기호에 자기가 구한 수를 다시 대입한 다음 문제가 제대로 성립하는지를 확인하면 된다. 이러한 확인의 과정을 통해 문제해결 과정에서의 오류가 밝혀질 수 있다. 그러나 반성의 단계에서 본인이 구한 답의 합리성만을 확인하는 것은 아니다. 자신의 문제해결 풀이 과정을 면밀히 검토하여 더 나은 해결 방안은 없는지, 그리고 해결 과정에서 논리적인 비약은 없는지를 확인하는 것도 포함된다. 물론 이러한 반성은 문제해결의 작은 과정에서도 수시로 이루어지게 된다.

IV. 결론

지금까지 암호산술 문제의 예 및 그 풀이 과정을 살펴보았다. 특히 풀이 과정을 수학 지식, 수학적 사고, 그리고 문제해결의 측면에서 살펴보았다. 이러한 논의를 바탕으로 결론적으로 수학 교수 · 학습에서의 암호산술 문제의 활용 가능성을 다음과 같이 제시할 수 있다.

첫째, 수학 지식의 심화를 위해 활용할 수 있다. 암호산술 문제의 해결에서는 필수적으로 사용되는 수학 지식이 있다. 이를테면 받아올림을 분명하게 이해하고 있어야 덧셈 문제를 해결할 수 있다. 단지 두 수를 더해 받아올림을 하는 수준이 아니라, 두 수를 더한 경우 받아올림이 없을 수도 있고, 또 받아올림이 있다고 하면 그것은 1이라는 사실을 알고 있는 수준이 요구된다. 이 이외에 문제에 따라 어떤 특정한 수학 지식의 심화된 형태가 사용된다. 따라서 암호산술 문제는 수학 지식의 심화에 기여할 수 있는 것이다. 암호산술 문제는 때때로 증명 그 자체의 학습을 위해서 사용될 수도 있다. 암호산술 문제가 수학 지식의 심화를 위해 활용될 수는 있으나, 사실상 암호산술 문제의 해결 과정에 요구되는 수학 지식 그 자체는 고급의 수학 지식은 아니다.

둘째, 수학적 사고력의 신장을 위해 활용할 수 있다. 암호산술 문제의 해결 과정에서는, 이를테면 연역적 사고, 특수화의 사고, 함수적 사고, 기호화의 사고, 표현의 사고, 기본 성질의 사고, 식에 대한 사고, 메타 사고가 많이 사용된다. 따라서 암호산술 문제를 이와 같은 수학적 사고의 훈련을 위해, 그리고 더 나아가 이와 같은 사고력을 신장시킬 목적으로 사용할 수 있다. 학생들은 암호산술 문제를 해결하는 과정에서 이와 같은 수학적 사고를 경험하고, 몸에 익히게 되며, 결과적으로 다른 문제 상황에서도 그와 같은 수학적 사고를 발휘할 수 있게 된다.

셋째, 문제해결력의 신장을 위해 활용할 수 있다. 암호산술 문제의 해결 과정에서는 예상과 확인, 표만들기, 식만들기, 논리적 추론 등의 전략이 많이 사용된다. 따라서 암호산술 문제를 이와 같은 문제해결 전략의 습득을 위해, 그리고 더 나아가 문제해결력을 신장시킬 목적으로 사용할 수 있다. 학생들은 암호산술 문제를 해결하는 과정에서 이와 같은 문제해결의 절차와 방법을 경험하고, 몸에 익히게 되며, 결과적으로 다른 문제를 해결하는 상황에서도 그와 같은 문제해결의 절차와 방법을 사용할 수 있게 된다.

넷째, '열린 문제(open ended problem)'로 활용할 수 있다. 열린 문제는 학생들이 독자적으로 사고할 수 있게 해준다는 점에서 학생들의 창의력을 신장시키는 바탕이 된다. 암호산술 문제에서는 답이 여러 가지로 주어지는 경우가 많이 있다. 따라서 학생들에 따라 다양한

답을 하는 것이 가능하다. 이를테면, 고지마(小嶋隆夫, 1996)는 초등학교 수준에서 암호산술 문제가 열린 문제로 활용되는 몇 가지 예를 보여주고 있다.

다섯째, 개별화 학습을 위한 소재로 활용할 수 있다. 학생들의 수준을 반영하여 암호산술 문제의 난이도를 낮추는 것이 항상 가능하다. 일부 문자 또는 기호가 취할 수 있는 값을 제시해 줌으로서 난이도를 낮출 수 있고, 따라서 초 · 중 · 고등학생들 각각의 수준에 맞도록 그 문제를 변형할 수 있다. 각각의 학생들은 이러한 변형을 통해 자신들의 수준에 맞는 수학적 사고력과 문제해결력을 발휘할 수 있다.

여섯째, 협동 학습을 위한 소재로 활용할 수 있다. 협동 학습에서 각 소집단마다 같은 암호산술 문제 또는 다른 암호산술 문제를 주어 학생들의 협동 학습을 효과적으로 유도할 수 있다. 학생들은 이 협동 학습의 과정에서 자신의 추론이 타당하다는 것을 다른 학생들에게 설명해야 한다. 그리고 이 과정에서 의사소통의 능력을 증진할 수 있다.

일곱째, 문제만들기 학습의 소재로 활용할 수 있다. 암호산술 문제를 스스로 만들어 보는 것이 가능하다. 사실상 암호 산술 문제는 무궁무진하게 만들어 낼 수 있다. 학생들은 암호산술 문제를 만들어 보는 과정을 통해, 자신의 수학 지식, 수학적 사고력, 문제해결력을 활용할 수 있다. 암호산술 문제를 만들기 위해서는 수학 지식의 측면, 수학적 사고의 측면, 문제해결의 측면에서 문제로서의 적합성을 검토해야 하기 때문이다.

지금까지 암호산술 문제의 활용 가능성을 몇 가지로 제시해 보았다. 그러나 본 논문에서 이러한 가능성을 구체적으로 확인한 것은 아니다. 따라서, 이제 학생들이 이러한 암호산술 문제를 해결하는 과정에서 이러한 가능성을 구체적으로 확인하는 연구가 필요하다. 한편, 본 논문에서는 암호산술 문제의 단점에 대해서는 논의하지 않고 있다. 이를테면 중 · 고등학교의 정규 수학 수업 시간에서 암호산술 문제를 취급하기 어렵다는 것도 하나의 단점이 될 수 있다. 이 이외에도, 추후 구체적인 연구를 통해, 암호산술 문제의 단점이 많이 드러날 수 있을 것으로 본다. 본 논문에서는 수학 교수 · 학습에서 암호산술 문제에 여러 가지 단점이 있을 것으로 예상하기는 하지만, 앞서와 같은 장점이 있기에 활용해 볼 만한 가치가 있다고 보고 있다. 그리고 그 가치가 후속 연구를 통해 더욱 분명하고 구체적으로 확인되기를 기대한다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤(1998). 초등수학교육론. 서울: 동명사.

교육부(1999a). 수학 4-1. 충남: 국정교과서주식회사.

교육부(1999b). 수학 4-1 교사용 지도서. 충남: 국정교과서주식회사.

김호우, 박교식, 신준국, 정은실(1999). 중학교 수학 2. 서울: (주)지학사.

藤村幸三郎, 田村三郎(1993). パズル數學入門. 東京: 講談社.

小嶋隆夫(1996). 算數に强くなる問題60選. 樂しい算數の授業 6月號(No. 137) 臨時增刊. 東京: 明治圖書.

中村義作(1993). 數學パズル・200の解法. 東京: 講談社.

片桐重男(1992). 이용률, 성현경, 정동권, 박영배(역), 수학적인 생각의 구체화. 서울: 경문사. (원작은 1988년에 출판)

Birtwistle, C.(1971). *Mathematical puzzles and perplexities: How to make the most of them.* Oxford: George Allen & Unwin Ltd.

Bolt, B.(1987). *The amazing mathematical amusement Arcade.* Cambridge: Cambridge University Press.

Eiss, H. E.(1988). *Dictionary of mathematical games, puzzles, and amusement.* New York: Greenwood Press.

Frohlichstein, J.(1967). *Mathematical fun, games and puzzles.* New York: Dover Publications, Inc.

Krantz, S. G.(2000). 좌준수, 임중상(역), 문제해결의 수학적 전략. 서울: 경문사. (원작은 1996년에 출판)

Musser, G. L. & Burger, W. F.(1997). *Mathematics for elementary teachers (4th ed).* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Polya, G.(1986). 우정호(역), 어떻게 문제를 풀 것인가. 서울: 천재교육. (원작은 1957년에 출판)

Smith, K. J.(1998). *The nature of mathematics (8th edition).* Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company.

Smith, S. E. Jr. & Backman, C. A.(1992). *Games and puzzles for elementary and middle School mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Trigg, C. W.(1985). *Mathematical quickies: 270 stimulating problems with solutions.* New York: Dover Publications, INC.

A Study on Possibility of Practical Use of Cryptarithmetic Problems in Teaching and Learning of Mathematics

Park, Kyo-sik (Inchon National University of Education)

In this paper, possibility of practical use of cryptarithmetic problems in teaching and learning of mathematics is discussed. There might be seven cases to use them practically like followings: (1) Cryptarithmetic problems might be used for deepening the mathematical knowledges. (2) Cryptarithmetic problems might be used for fostering mathematical thinking abilities. (3) Cryptarithmetic problems might be used for fostering problem solving abilities. (4) Cryptarithmetic problems might be used as open ended problems. (5) Cryptarithmetic problems might be used as materials for personalized learning. (6) Cryptarithmetic problems might be used as materials for cooperative learning. (7) Cryptarithmetic problems might be used as materials for problem posing.