대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.2, 489~508, March 2000

# 수 연산 지도에서의 웨일부인의 언덕도 (Mrs Weill's Hill)의 도입[1)]

이 의 원 (대구교육대학교)

## I. 서론

수학은 셈하는 것부터 시작된다(김용국, 1991). 셈의 중요성은 학교수학의 변천과정에서도 잘 나타난다. 실제로 1950년대 이전까지만 해도 학교수학에서는 지필계산이 강조되었고, 현대화운동이 실패한 후 1970년대의 'back to the basic' 운동에서도 필산은 강조되었다. 그러나 곧 계산기, 컴퓨터의 사용이 일상화됨으로서 NCTM은 1980년 'An Agenda for Action'에서 학교수학에 계산기의 적절한 도입을 권고하였고 또 1989년 'Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics'에서는 다음과 같이 강조하였다.

> K-4학년 단계에서 계산기는 수학학습을 위한 중요한 도구로 받아들여져야 한다. 계산기는 아동들로 하여금 수 개념과 패턴을 탐구하며, 중요한 개념발달을 위한 경험을 하게 하며, 문제해결 과정에 초점을 둘 수 있게 하며, 실제적 적용을 탐구하는 것을 가능하게 한다. … 계산기가 이용된다고 해서 기본적인 계산 지식을 학습하며 암산하거나 합리적인 지필 계산을 할 필요성을 없어지는 것은 아니다."(구광조, 오병승, 류희찬 역, 1992, p.26).

1940년대에 성인의 수 연산의 활용실태를 조사한 Guy Wilson(강문봉외 18인역, 1999, 재인용)은 "성인 계산의 90%는 0과 자연수에 대한 덧셈, 빨셈, 곱셈, 나눗셈의 기본 사칙계산이 차지하고, 간단한 분수, 퍼센트, 이자 계산이 사칙연산에 추가된다면 95%까지 올라갈 것"이라고 주장한다. Wilson은 이 연구로부터 사회가 요구하는 수학을 '반복훈련을 위한 아주 단순한 작업'이라고 결론 짓고, 모든 아동은 덧셈에 대한 100개의 기본구구, 300개의 연

---

1) 이 논문은 1999학년도 대구교육대학교 교내 연구비에 의하여 연구되었음.

관된 10의 배수에 관한 공식, 9×9까지의 곱셈에 필요한 80개의 구구, 간단한 세로형식의 계산, 39+9까지의 덧셈, 그리고 미국의 화폐에 관해 습득할 것을 제안하였다.

Wilson의 연구와 같이 만약 성인 계산의 대부분이 사칙연산에 관련된 것이라면 계산기는 성인에게 편리한 도구임에 틀림없다. 그러나 성인에게 편리하다고 해서 아동에게 그대로 적용되는 것은 아니다. 왜냐하면 계산기는 계산 결과만을 제공하기 때문에 아동으로서는 계산 과정을 이해할 수 없고 따라서 계산 결과만으로는 수 계산논리에 접근할 수 없기 때문이다.

그러나 복잡한 계산은 계산기로 대치하는 사회현실을 고려할 때, 학교수학은 계산의 신속성보다는 기본 계산의 다양한 접근을 유도하여 아동으로 하여금 적절한 수 감각을 형성하는 데 초점을 두어야 한다.

NCTM(1989)은 수 감각(number sense)을 수의 다양한 의미로부터 유도되는 수에 대한 직관으로서 수에 대한 직관적 느낌과 다양한 사용과 해석을 포함한다(구광조, 오병승, 류희찬 역, 1994). 또 수 감각은 계산과정에서 착오를 감지하고 합리적으로 결과를 유도할 수 있는 능력을 포함함으로 수 감각을 지닌 사람은 수를 이해할 수 있고, 일상생활에서 수를 효율적으로 사용할 수 있다(McIntosh et al, 1992). NCTM(1989)은 훌륭한 수 감각을 지닌 아동의 특성으로서 다음 5 가지를 들고 있다(구광조외 2인 역, 1992, 재인용).

· 수가 갖는 의미를 발달시키는 것.
· 조작을 사용하여 수 사이의 관계를 탐구하는 것.
· 수의 상대적인 양을 이해하는 것.
· 수를 계산하는 것의 상대적 효과에 대한 직관을 발달시키는 것.
· 아동의 환경에서 일상생활의 사상을 측정하기 위한 참조물을 개발하는 것.

결국 수 감각은 학습의 대상개념이기보다는 오히려 수학적인 문제해결과정에서 자연스럽게 습득되는 능력이다. 즉 수 감각은 문제상황에 임한 아동이 어떻게 이해하고 적절하게 대처하는가의 방법적 측면에서 형성되는 수학적 직관(intuition)능력과 밀접하게 관련된다.

그러면 학교에 입학하기 전의 아동은 어떠한 수 감각을 지니고 있는가? 유아의 수 감각에 대하여 연구한 Reys 등(강문봉 외 18인 역, 1999)은 아동은 세기를 시작하기 오래 전부터 수에 대한 몇 가지 감각이 발달하기 시작한다고 보고 있다.

여러 연구에서 밝히고 있듯이(Baroody & Standifer, 1993; Suydam & Weaver, 1981) 아동은 학교에 입학하기 오래 전부터 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 포함하는 문제를 해결하기 위해 수세기를 사

용한다. 충분한 시간만 주어지면 0과 자연수를 다루는 모든 문제는 수 세기를 통해 풀 수 있다.

또 이것은 유아의 다음과 같이 응답에서도 알 수 있다(강문봉 외 18인 역, p.197).

몇 살이니?--두 살
몇 번 채널을 보아야 하니?--13번
너의 아버지 사무실은 몇 층이니?--4층
너의 형제가 모두 몇 명이니?--1명.

그러나 아동은 성장하면서 수 세기만으로는 해결할 수 없는 여러 가지 사상에 직면하고, 보다 간편한 수 세기의 필요성을 체득한다. 결국 취학전의 유아들은 일상생활에서 나름대로 적절한 수 감각을 보유하고 있고, 또 학교에 입학한 후에는 체계적인 학습을 통하여 수 감각을 증진한다.

그런데 최근 기초학력부진아의 실태를 조사한 충남대의 주삼환 교수팀의 연구결과를 다음과 같이 보고하고 있다(대한교원신문, 2000. 3. 8).

읽기, 쓰기, 셈하기 등 기초학력이 없는 학생이 초·중등학교에서 한 반에 5명 안팎에 이르는 것으로 …. … 전국 초·중학교 교사 881명을 상대로 … 조사한 결과 초등학교의 경우 학급당 기초학력 부진아의 수에 대해 교사의 43.9%가 '5명 안팎'이라고 대답했으며, 1-2명(46.6%), 7-8명(2.7%),10명 안팎(1.4%) 등의 순이었다. 중학교도 …… 초등학교와 유사하게 나타났으나 '7-8명'과 10명 안팎의 비율이 높아 초등학교 때 수업결손이 있는 학생은 상급학교에서도 수업결손이 누적되는 것으로 풀이된다.…

물론 이 연구는 교사 대상의 설문조사 결과이므로 기초학력 부진아의 실태와는 다소간의 차이는 있을 수 있다. 그러나 계산기, 컴퓨터, TV, 비디오, 전화, 게임기, 각종 잡지 등 다양한 정보환경에 둘러싸인 오늘날의 아동들은 그들의 부모세대와는 비교할 수 없는 훌륭한 수 감각을 보유하고 있을 것이다. 더우기 학교는 훌륭한 시설과 우수한 요원을 확보하고 다양한 교수-학습자료를 활용하여 지도하고 있음에도 불구하고, 수학에서의 학력부진 특히 수 계산에서의 부진아의 수는 줄어들지 않는 것은 무엇 때문일까?

본 연구에서는 수학의 기초학력부진 특히 입문기 아동의 수 계산에서의 부진 원인을 지도방법적인 측면에서 살펴보고, 특히 저학년에서의 기초 계산기능을 신장하기 위한 대안으로서 웨일부인의 언덕도(Mrs Weill's Hill)의 도입방안을 알아보고자 한다.

## II. 문제상황과 수학적 힘

NCTM(1989)은 21세기 수학교육의 목적을 수학적 힘(mathematical power)에 두어야 한다고 강조하였고, 우리의 제 7차 교육과정(강옥기 외, 1997)에서도 수학적 힘을 기본방향으로 설정하고 있다.

수학적 힘이란 "탐구하고 추측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학에 관한 수학을 통한 의사소통능력, 수학 내에서 또는 수학과 다른 학문적 영역사이의 아이디어를 연결하는 능력, 수학적 개념과 절차에 대한 올바른 이해와 활용할 수 있는 능력, 문제해결능력, 수학적 성향 등을 모두를 포함한다(전평국, 1999, 재인용)."

또한 NCTM은 수학적 힘을 기르기 위해서는 학생들이 수학을 행할 것을 강조하고 있다. 결국 수 연산학습에서 아동이 수학을 행한다는 것은 수 개념을 이해하고 어림하고 암산하며 표현하는 등 다양한 활동의 바탕이 되는 적절한 수 감각을 습득하여야 한다.

그러면 나름대로 적절한 수 감각을 지니고 입학한 아동들이 왜 수 계산에서 학습부진이 일어나는 것일까? 이를테면 초등학교 입학하기 전의 아동에게 구슬을 제시하면서 "노란 구슬 2개와 빨강 구슬 3개를 합하면 구슬은 모두 몇 개인가?"라고 물으면 그들은 대부분 구슬을 보고 쉽게 대답한다. 그러나 이를 수문장(number sentence) 즉 $2+3=\square$ 또는 $2+\square=5$로 묻게되면 대부분의 아동들은 약간의 시간을 필요로 한다. 이것은 그들이 기호의 의미를 이해하지 못하여 식을 구체적 조작활동과 연관짓는데 실패하였음을 의미한다. 결국 수 계산에서의 아동의 지적저항은 식에서 발생한다고 볼 수 있다.

일반적으로 식은 "수나 대상을 나타내는 기호(3, a, x 등)와 이들에 대한 조작(연산)이나 관계를 나타내는 기호( $+, -, \times, \div, =, <$ 등)들을 일정한 규칙에 맞도록 결합하여 조작의 방법이나 차례 및 그 수량 또는 수량 사이의 관계(또는 조건)을 나타내는 수학적 문장(박성택 외 7인, 1993)"으로서 패턴을 나타내는 추상적, 형식적 표현 방식으로 대표된다. 또 식은 기호논리적인 변환과정을 추상적으로 표현하기 때문에 알고리즘(algorithm)과 밀접하게 관련된다.

또 학교수학은 전통적으로 수 계산 알고리즘을 중시함으로서 대부분의 교과서는 간단한 문장제를 제시하여 아동의 조작활동을 유도하고 곧이어 알고리즘을 도입한 후, 기능숙달용 연습문제를 제시하는 것이 보통이었다.

실제로 성인의 관점에서 보면 알고리즘은 기억하기 쉽고 또 비교적 명확한 절차에 따라 수행하면 누구나 정답을 유도할 수 있다. 그러나 아동은 알고리즘을 익히기 위하여 많은 연

습을 하지 않으면 안된다. 결국 획일적인 절차만이 요구되는 알고리즘 학습에서는 아동의 개성이나 개인차는 존중될 수 없고 따라서 다양한 상상력이나 창의성은 문제가 될 수 없다. Carraher 와 Schliemann은 알고리즘 학습의 문제점으로서 다음의 예를 들고 있다(대한 수학교육학회 역, 1995).

> 연구자들은 4년의 학교교육을 마친 9-15세의 브라질 소년들과 처음은 정상적인 거래를 하는 방식으로, 나중에는 좀더 형식적인 형태로 면접을 했다. 그들은 같은 문제를 나중에 형식적으로 제시했을 때 보다 거래를 하는 동안 더 성공적으로 계산해냈다. 예를 들면 4개의 코코 야자 열매를 각각 35불에 샀다. 그 소년은 '105가 될거고, 더하기 30,,,그러면 135,,,더하기 30,, 그러면 135, 하나는 35,,,140불입니다'고 말했다. 그러나 형식적인 절차로 진행된 면접에서는 그 소년은 35×4를 ' 4 곱하기 5는 20이니까 2 올리고. 2 더하기 3은 5; 곱하기 4는 20, 200입니다'라고 와 같이 풀었다.

결국 아동은 학교 밖에서 계산할 때에는 지속적으로 계산 장면을 잊지 않고 적절한 직관을 활용하는 반면, 학교 안에서의 계산은 매우 기호적(symbolic)이며 때로는 아무런 의미 없는 기억에 바탕한 것임을 알 수 있다.

실제로 성인의 경우, 문제상황에 임하였을 때 무조건 계산하는 사람은 드물고 대부분 자신의 경험에 비추어 문제상황을 전체적으로 의식하면서 적절한 직관과 논리를 통하여 자신의 행동을 조정한다. 그들은 계산이 필요한 경우에도 적절히 어림해 보고, 어림이 불가능한 경우에는 곧 바로 필산에 임하기보다는 오히려 계산기나 컴퓨터, 주판 등을 사용한다.

이것은 아동에게도 마찬가지로 적용된다. 즉 문제상황에 임한 아동도 역시 상황을 전체적으로 의식하면서 해결의 방향이나 전략 및 해결결과에 대한 직관적인 어림(estimation)활동이 가능하여야 한다. 왜냐하면 정확한 계산이 필요치 않은 상황에서 아동이 맹목적으로 계산한다면 그의 행동은 바람직한 수학적 활동이라 할 수 없기 때문이다.

결국 유효한 어림이 가능하기 위해서는 아동은 적절한 수 감각을 보유하여야 한다. 이를 위하여 학교수학은 외부의 알고리즘을 제시하여 맹목적인 수행을 요구하기보다는 적절한 문제상황을 재구성하고, 계산의 필요성과 어림, 암산 등 다양한 수학적 활동이 가능한 학습환경이 더욱 중요시된다. 왜냐하면 상황을 전반적으로 이해하는 아동은 해결에 이르기까지 나름대로의 전략을 창조하고 재구성하는 수학적 힘을 발휘할 수 있기 때문이다.

이러한 면에서 볼 때 추상성는 수학의 강력한 힘이지만 초등수학에서의 성급한 추상화는 아동으로 하여금 수학을 '무의미한 기호 조작 교과'로 오도하게 하여 자칫 수학불안감을 제공할 수 있다.

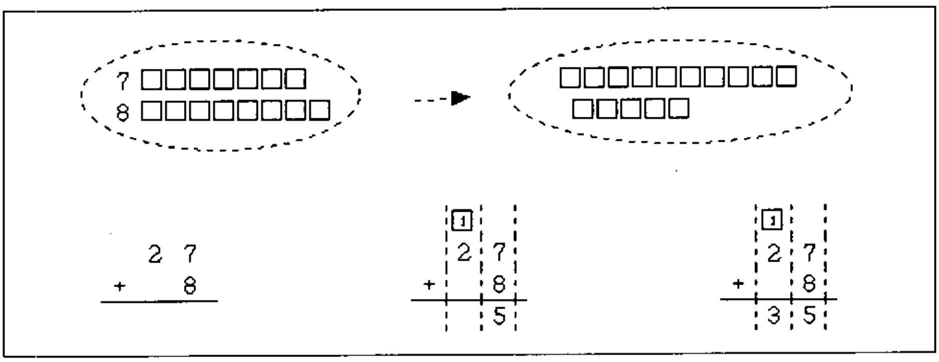
결국 효율적인 수 감각 형성을 위해서 학교수학은 계산의 신속성보다는 수와 연산의 관계를 다양하게 이해할 수 있는 실제적인 활동이 필요하게 된다. 이를 위하여 알고리즘을 도입하기 전에 문제상황을 그림으로 시각화하는 방법을 고려할 수 있다. 이를테면 문제상황을 어림 가능한 장면으로 시각화하고, 과감한 어림을 유도한 후 이를 확인하기 위한 방법으로 계산알고리즘을 도입할 수도 있다.

## III. 알고리즘 학습과 학습부진

현대수학의 두드러진 특징은 수학의 대수(代數)화, 즉 대수적 방법에 의한 수학의 연구이며, 오늘날 학교수학의 중심 역시 대수라 할 수 있다. 대수(algebra)란 말의 기원은 중세의 아라비아 수학자인 알콰리즈미(Al-khwarizmi)의 저서인 'aljabr wa al-muqabala'에서 비롯된 것으로 보인다. 알콰리즈미는 이 책에서 방정식의 풀이에서 이항하는 것을 al-jabr라고 불렀으며, 동류항을 간단히 정리하는 것을 almuqabala라고 불렀다. 대수는 절차적 지식 즉 알고리즘이 두드러진 역할을 하는 수학의 한 분야이다(서울대학교 교육연구소, 1998).

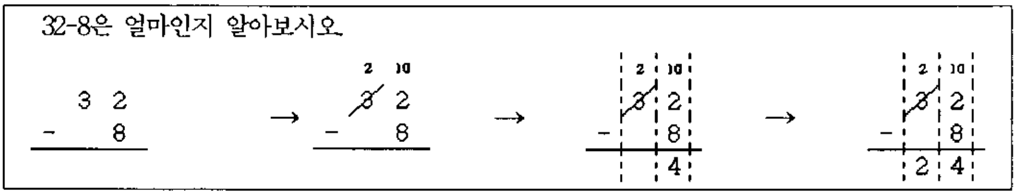
알고리즘이란 "일련의 문제를 해결할 수 있는 분명하고 체계적인 절차(Maurer, 1998)"로서, 확정된 일련의 절차를 따라 유한회의 절차를 수행하면 결정적인 해가 유도된다(NCTM, 1998). 이때 확정성(determinate)은 하나 하나의 절차가 명확하게 제시되어 있어서 한 절차가 끝나면 곧 다음 절차가 명확하게 제시됨을 뜻하고, '결정적인(conclusive)'이란 그 산출물이 문제를 정확하게 해결함을 의미한다(대구교대, 춘천교대 대학원 역, 1999).

계산 알고리즘을 강조하는 수학교과서에서는 받아올림 있는 덧셈, 이를테면 27+8을 다음과 같이 지도하고 있다(교육부, 2000, p. 21).

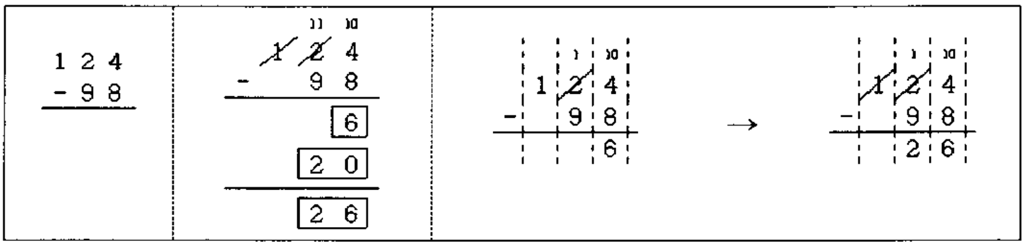


위 절차는 수모형을 이용하여 27 + 8을 조작적으로 계산하는 과정 즉, 낱개모형 10개를 십모형으로 바꾸어 조작한 후 세로셈으로 형식화하고 있다.

또 두 자리 수의 뺄셈 32- 8에서는 생활문제 상황을 제시하여 수 모형을 조작하는 활동을 유도한 한 후, 곧 세로셈으로 다음과 같이 형식화하고 있다(교육부, 2000, p.55).




또 제 6차 교육과정에서는 '124 - 98'을 다음 방식으로 제시하고 있다(교육부, 1999, p.22).



위의 계산알고리즘은 아동의 모형조작활동을 기호화한 것이다. 그러나 아동은 모형 조작에 많은 불편을 체험하였기 때문에 기호 조작에 보다 큰 관심을 가지게 된다. 그러나 알고리즘을 강조한 이러한 교과서는 EIS이론의 관점에서 볼 때 영상적(iconic) 표상단계가 생략되어 있다. 즉 전체적으로 행동적(enactive) 표상에서 곧 바로 상징적(symbolic) 표상으로 직행하였기 때문에 아동은 수 감각은 커녕, 알고리즘의 복잡한 절차를 이해하지 못하게 된다.

이를테면 아동은 2위수의 뺄셈을 위하여 다음을 기억하지 않으면 안된다.

· 빼지는 수는 위에, 빼는 수는 밑에, 자리 수에 맞추어 적는다.

· 뺄셈은 1의 자리 수부터 시작한다.

· 위에 적힌 1의 자리 수가 밑에 있는 수보다 작은 경우에는 조심해야 한다. 이 때에는 위의 10의 자리 수에서 1을 빌려와서 1의 자리수에 10을 적고, 밑의 수를 뺀 다음, 남은 수를 더해야 한다.

· 10의 자리 수의 뺄셈은 1의 자리에 빌려주고 남은 수에서 빼야 한다.

아동이 이러한 복잡한 절차를 기억하려면 많은 연습이 필요하고, 기능숙달을 위한 연습과 훈련이 강조되는 상황에서는 수 감각은 중시될 수 없을 것이다.

실제로 "몇 가지 확정된 절차를 수행하여 많은 문제를 해결할 수 있다."면 학생들은 그 절차를 배워야 한다. 그러나 그 절차가 외부에서 주어지기보다는 아동이 스스로 그러한 절차를 창안하는 것이 더욱 효율적이다. 왜냐하면 아동은 알고리즘에 익숙하게 되면 자칫 기계적인 절차에만 몰두하여 알고리즘이 생성된 배경을 잊기 쉽기 때문이다.

학생들이 수학에서 알고리즘을 배워야 하는 이유를 Usiskin(NCTM, 1998, 대구교대, 춘천교대 대학원 역, 재인용)은 알고리즘의 적용과 신뢰성, 신속·정확성 및 기록과 정신적 표상 등의 측면에서 다음과 같이 강조한다.

· 알고리즘은 강력하다.
· 알고리즘은 신뢰할 수 있다.
· 알고리즘은 정확하다.
· 알고리즘은 신속하다.
· 알고리즘은 지필 기록을 제공한다.
· 알고리즘은 정신적 표상을 증진한다.
· 알고리즘은 교육적(instructive)이다.
· 알고리즘은 다른 알고리즘에 사용될 수 있다.
· 알고리즘은 학습 주제가 될 수 있다.

그러나 학교수학에서 알고리즘의 교육적 효과가 지나치게 강조됨으로서 알고리즘 절차의 수행능력이 그의 수학적 능력으로 믿게 하였고(Tabitha, Mingus, Grassl, 1998), 그에 따라 아동은 알고리즘을 기억하여 정확하게 수행하는 데 집중하여 왔다.

결국 알고리즘은 성인의 관점에서 매우 능률적인 것으로 보이지만, 일단 학생들이 자신의 방법을 만들어 사용하면 이 이론은 더 이상 진실이 아니다. 왜냐하면 모형을 조작하는 방법에 따라 기호변형 순서는 매우 다양하기 때문이다. 또한 아동이 계산알고리즘을 기계적으로 수행하더라도 수행 그 자체는 수 감각과는 밀접한 관련이 없다.

그러면 알고리즘학습에서의 교사와 아동의 의사소통(communication)은 어떠한가? 이를테면, 2위수의 뺄셈 '62 - 28'을 교사는 다음과 같이 설명한다. "1의 자리 수 2에서 8을 빼지

못하니, 10의 자리 수 (6)에서 (1)을 빌려와서 10을 적고, 여기서 8을 빼면 2가 남고, 또 남아있는 2를 더하면 4가 된다. 또 10의 자리 수 (6)은 (1)을 빌려주었으니 (5)가 되고, 여기서 (2)를 빼면 십의 자리 수는 (3)이 된다, 따라서 답은 34가 된다."

실제로 위의 설명은 교사로서는 매우 당연한 것이다. 그러나 그는 이미 위의 괄호에 싸인 수 (6), (1), (5), (2), (3)이 각각 60, 10, 50, 20, 30을 나타낸다는 것을 알고 있기 때문에 가능한 것이다. 그러나 아동의 청각정보 즉 (6), (1), (5), (2), (3)은 단지 6, 1, 5, 2, 3을 의미하기 때문에 그의 청각정보와 내적정보는 충돌하게 된다. 이에 따라 그의 정보처리체계는 혼란에 직면, 착오를 유발한다.

결국 정보처리체계의 혼란에 직면하여 아동으로서는 특별한 대책이 없고 따라서 그들은 기호 조작의 규칙을 익히기 위하여 연습에 집중해야 한다. 그러나 만약 필산 알고리즘을 제공하지 않고, 아동 스스로 자신의 방법으로 계산하게 한다면 그들은 대부분 왼쪽(10의 자리 수)에서 오른쪽(1의 자리 수)으로 진행하게 된다. 그러나 교과서의 알고리즘은 오른쪽에서 왼쪽으로 진행하기 때문에 아동의 방법과 교과서는 충돌할 수밖에 없다. 결국 아동은 교과서와의 충돌을 피하기 위하여 자신의 사고를 포기하고 교과서의 필산 알고리즘을 수용하게 된다(NCTM, 1998). 이러한 관점에서 보면 알고리즘 학습은 교사와 아동의 원활한 의사소통을 보증할 수 없다.

필산 알고리즘은 숫자기호의 정확한 적용을 강조하기 때문에 많은 연습을 하지 않으면 시행착오를 유발한다. 그러나 문제는 그 형식을 마스터한 아동들이 그 절차를 단순한 것으로 알고 그 근원에 무관심해지기 쉽다(서울대교육연구소, 1998)는 것이다. 이에 따라 아동은 내면적으로는 뺄셈문제 상황 이를테면 $3+\square=7$에서 피상적인 기호만 보고 덧셈으로 대처하게 된다. 결국 알고리즘학습은 아동에게 수학적 힘을 제공할 수 있으나 동시에 기계적인 학습을 요구하게 된다.

그러면 사회에서의 필산알고리즘은 어떻게 사용되는가? 이를테면 $62-28$를 계산하는 경우, 성인들은 대부분 계산기를 사용하거나 다음과 같이 암산한다.

- 60에서 28을 빼면 32이나 $32+2$, 34다.
- 28 대신에 30을 빼면 32, 여기에 2를 더하면 34이다.
- 28의 2배는 56, 6 크므로, $28+6$은 34.

이것은 곱셈알고리즘에서도 예외가 아니어서, 이를테면 $25\times16$의 경우, 곱셈 알고리즘을 사용하기보다는 대부분 $25\times4=100$임을 알고 바로 400으로 계산하는 것이다(NCTM, 1998).

실제로 수학에서 고통스럽게 학습한 계산알고리즘이 일상생활에서는 거의 사용되지 않는다면 사회의 수학관은 긍정적이 될 수 없다. 이러한 관점에서 Madell(1985), Burns (1994), Leinwand(1994)는 "알고리즘은 대부분의 아동들에게 의미가 없고 또 논리적인 사고를 방해하기 때문에 알고리즘 교수는 중지해야 한다."고 주장한다. 이들은 "알고리즘의 강조가 교육적으로 유해하다."고 주장하는 근거로서 다음 두 가지를 들고 있다(NCTM, 1998).

- 알고리즘은 학생들로 하여금 자신의 생각을 포기하도록 조장한다.
- 알고리즘은 학생들로 하여금 자리값의 의미를 잊어버리게 한다.

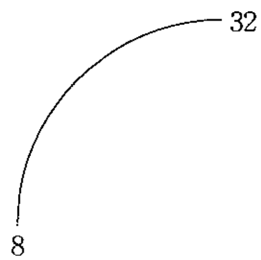
## Ⅳ. 웨일부인의 언덕도

구체물 조작에 이어 계산알고리즘을 도입하게 되면 아동으로서는 자신의 전략을 창안할 기회를 상실하게 된다. 그들은 낯선 규칙을 익히기 위하여 연습에 집중하여야 하기 때문에 학습불안을 느끼게 된다.

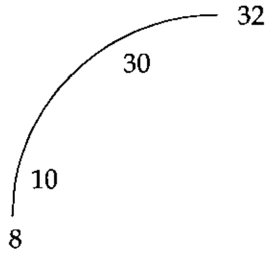
결국 수 계산과정에서 아동의 흥미와 자신감 및 신뢰, 긍지를 유도하기 위해서는 상황에 대한 다양한 접근활동이 존중되어야 한다. 실제로 교과서의 행동적 표상과 상징적 표상의 중간단계에 시각적 접근이 가능한 영상적 단계를 도입한다면 저학년 아동의 학습불안은 어느 정도 예방할 수 있을 것이다.

Bernice Weill(1978)은 수학학습 부진을 예방하기 위한 방안으로서 'Mrs Weill's Hill'(이하 언덕도로 함) 사용을 강조한다. 언덕도는 언덕 모양의 곡선으로, 복잡한 계산 과정을 부분 계산 가능하게 그림으로 시각화한 것이다. 이를테면 뺄셈 32－8을 언덕도를 이용하여 다음과 같이 4 단계로 구분하여 접근할 수 있다.

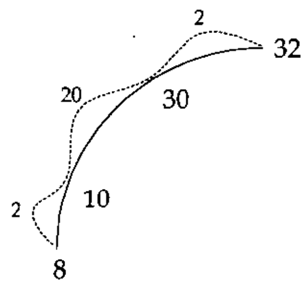
1 단계 : 언덕도를 그리고 하단에 감수 8을, 상단에 피감수 32를 적는다.



2 단계 : 8 과 32 사이에 몇 개의 점을 잡는다. 이를테면 10, 30을 잡을 수 있다.




3 단계 : 언덕도 위에 기록된 수(8, 10, 30, 32)의 차를 구한다.



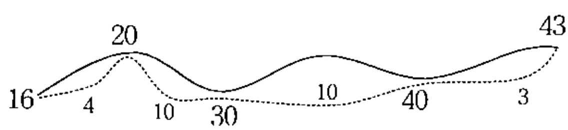

4 단계 : 구한 차를 모두 더한다.

$$32-8=2+20+2=24$$

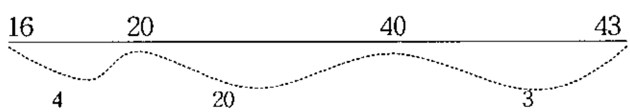
실제로 8에서 32까지의 차(거리)를 구하기에는 아동에게 너무 멀다. 따라서 그 사이에 적절한 중간점을 잡아 소구간으로 구분하여 부분 계산한다면 매우 편리하다.

또 언덕도는 곡선이므로 아동으로서는 시각적으로 특별한 저항을 느끼지 않게 되고 능력에 따라 언덕도는 다양한 곡선으로 확장될 수 있다. 이를테면 43 -16의 계산에서 아동은 다음과 같이 확장할 수 있게 된다.

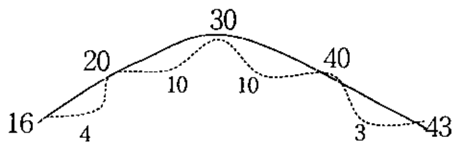
①




②



③




언덕도는 두 수의 차가 매우 큰 경우에도 적절한 중간점을 선택함으로서 쉽게 계산할 수 있다. 이를테면 뺄셈 562 - 129을 계산하는 경우 중간점을 130, 200, 300, 400, 500, 560을 적절히 선택하여 부분계산 가능하게 된다.

그러나 언덕도를 사용하기 위해서는 아동은 다음과 같은 수와 연산 감각을 보유하여야 한다.

- 7 + 6 과 6 + 7 은 같다. (덧셈의 교환법칙)
- 10 − 7 = 3 (10에 대한 보수)
- 43은 34보다 크다. (수 감각)
- ‘53 − 17’보다 ‘53 − 20’의 계산이 더 쉽다. (연산감각)

그러면 필산 알고리즘과 언덕도는 어떠한 관계를 갖는가? 알고리즘은 언덕도의 관점에서 보면 8과 10의 차(2)와 30과 32의 차(2)를 구하여 합(4)한 다음, 10과 30의 차(20)를 더한 것(24)으로 작은 수를 먼저 계산한 것이다. 따라서 알고리즘은 언덕도의 다양한 방법 중 특수한 계산 즉 작은 수에 초점을 둔 계산방법이다.

아동은 언덕도를 친근한 곡선으로 시각화하고 또 능력에 따라 적절히 중간점을 선택할 수 있기 때문에 조작과정에서 자유를 만끽한다. 나아가 곡선이 심적으로 내면화됨으로서 암산과 어림의 바탕이 되는 정신적 각주(mental footnote)를 구성하게 된다.

## V. 언덕도의 정보처리적 관점

정보처리 이론은 컴퓨터의 각종장치들의 처리과정과 아동의 문제해결과정이 매우 유사하다는 관점에서 출발한다. 즉 컴퓨터가 데이터정보를 수용하여 이를 내장된 프로그램정보에 따라 조작하여 그 결과를 처리하는 것과 마찬가지로 아동의 문제해결과정도 그의 경험을 바탕으로 내적 정보의 통제하에 문제로부터 필요한 정보를 추출하고 적절히 조작하여 문제를 해결한다는 측면에서 매우 유사한 것이다(이의원, 1995).

실제로 알고리즘을 기억하여 수와 연산을 관련시키는 아동의 지적활동은 일련의 정보처리과정이라 할 수 있다.

수 계산과정에서 아동의 뇌 속의 활동은, 이를테면 단기기억이 장기기억의 지원을 받아 문제장면으로부터 데이터정보를 수집하고 적절한 가치를 부여하고 위계 지워 단기기억 내의 작업기억(working memory)은 단기기억으로부터 전송된 데이터정보를 적절히 조작하여 문제를 해결한다. 물론 이 모든 과정은 장기기억의 주도하에서 진행된다.

Howard는 정보처리이론에서 다음과 같은 가설을 설정하였다(Cobb, 1988, 이의원, 1995, 재인용).

· 자극과 반응사이에는 일정한 시간의 처리단계가 있다.
· 자극이 여러 처리단계를 거칠 때 자극의 형태와 내용은 일련의 변화를 거친다.
· 각 처리단계에서의 처리장치들은 일정한 용량을 지니고 있다.

이 가설에 따르면 아동의 기억장치 즉 단기기억과 장기기억, 작업기억은 모두 일정한 용량을 가지고 있고 정보를 처리하는 데에는 일정한 시간이 필요하다.

따라서 알고리즘 학습에서는 복잡한 절차가 있고 또 신속성과 정확성이 강조되기 때문에 아동의 기억장치들은 과도한 작업부담을 요구받게 된다. 결국 기억장치들의 과도한 업무부담은 고장을 유발할 수 있고, 이는 곧 계산착오로 나타나게 된다.

실제로 아동의 장기기억은 매우 작은 용량이어서 문제상황을 전체적으로 보관할 수 없고 따라서 단기기억과 작업기억을 적절히 지원할 수도 없다. 결국 장기기억의 부실한 용량에도 불구하고, 문제해결을 위해서 작업기억은 장기기억의 역할까지 수행하지 않으면 안된다. 즉 작업기억은 문제상황을 보관하면서 당면한 숫자기호를 조작, 계산하여야 한다. 이에 따라 작업기억은 고장을 유발한다.

결국 계산 착오를 예방하기 위해서는 장기기억의 용량을 확장하여 작업기억을 효율적으로 지원토록 하거나 또는 단기기억과 작업기억의 업무를 경감하는 방안을 창안하지 않으면 안된다. 그러나 장기기억의 용량을 확장하기에는 육체적 발달과 더불어 수학의 내적, 외적으로 많은 경험이 필요하기 때문에 단기간의 목표달성은 거의 불가능하다. 결국 계산착오를 줄이기 위해서는 단기기억과 작업기억의 업무를 경감하여야 하고, 이를 위하여 필요 정보를 외부에 기록하는 방안을 생각할 수 있다.

외부기억(external memory)이란 작업기억의 용량을 확장하고 그 업무를 경감하기 위하여 필요한 정보를 외부에 잠시동안 보관하는 것으로 이를테면 아동이 중요 정보를 메모하거나

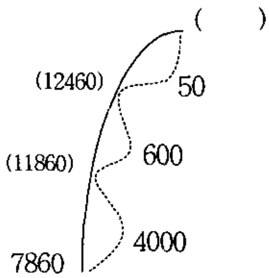
벤도, 도표, 정경도, 선분도, 구조도, 웨일부인의 언덕도 등이 있다(이의원, 1995).

언덕도는 문제상황에 임한 아동으로 하여금 해결에 필요한 문제장면과 데이터정보를 외부에 저장함으로서 작업기억의 업무를 경감시켜 주는 효과를 제공한다. 즉 문제의 전반적인 상황과 필요 정보를 외부기억에 보관함으로서 작업기억은 구역화된 부분 계산에 전념할 수 있게 된다. 그 결과 작업기억은 특별한 저항없이 해결에 도달한다.

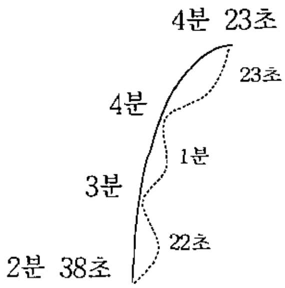
즉 언덕도는 장기기억의 역할을 대신함으로서 작업기억의 업무부담을 경감시키는 효과를 제공한다. 결국 작업기억의 업무 경감은 용량 확장으로 나타남으로서 아동은 뺄셈뿐만 아니라 큰 수나 분수, 소수의 가감산 및 시간, 길이, 무게, 들이 등 복명수의 문제해결까지도 가능하게 된다. 이것은 다음의 예에서도 살펴볼 수 있다.

① 큰 수의 덧셈; 7860 + 4650(교육부, 1991, p.18)

6차 교과서에서는 모의 화폐를 이용하여 조작한 후, 세로셈으로 형식화하고 있다. 그러나 이 경우에도 다음과 같이 언덕도를 이용할 수 있다.




② 시간 계산; '4분 23초 - 2분 38초'의 계산( 수학, 4-1, 36쪽)




③ 오전 8시 20분에서 오후 3시 15분까지의 시간(중간점으로서 9시, 12시)

④ 복잡한 수의 계산, 예를 들면 74와 231의 차(중간점; 80, 100)

⑤ 두 분수의 차, 1¾과 4⅓의 차(중간점; 2와 4)
⑥ 무게, 3kg 250g과 6kg 170g의 차(중간점; 4kg)
⑦ 들이, 15L 256mL과 8L 350mL의 차(중간점; 9L, 10L)
⑧ 거리, 5km 230m와 9km 140m의 거리의 차(중간점; 6km)

결국 언덕도는 문제상황을 시각화하여 해결에 이르기까지 온전하게 보관함으로서 작업기억으로 하여금 부분계산에 집중하게 한다. 이에 따라 작업기억의 특별한 저항을 받지 않고 계산하게 되고, 아동은 수 계산과정에서 학습불안을 느낄 수 없게 된다.

작업기억의 용량 확장으로 말미암아 언덕도는 암산과 어림셈의 바탕이 되는 내적 이미지로서 저장된다. 그에 따라 아동은 받아올림이나 받아내림 등의 복잡한 기호조작을 통하지 않고 즐거운 계산활동을 하게 된다.

결국 언덕도는 문제해결단계에 이르기까지 계산의 의미를 포함한 문제장면을 보관하는 장기기억의 역할을 보완함으로서 작업기억으로 하여금 간단한 정보 조작에 몰두하게 하는 학습효과를 제공한다.

## VI. 결론

초등수학의 수 연산학습은 비교적 계통적인 내용의 형식적 절차가 강조되기 때문에 교사로서는 가르치기 쉬운 교과로 간주되는 반면 아동에게는 어려운 교과로 인식된다.

실제로 수 연산개념은 수학의 기초·기본적인 기능으로서 중요하지만 아동으로서는 일상생활과정에서 지필 계산의 모습을 교실이외에서는 찾아볼 수 없고 대부분 컴퓨터, 계산기 또는 암산으로 대처하는 것만 보아 왔다. 이러한 측면에서 보면 대부분의 아동들은 수학학습이 사회에서 사용하지 않는 계산방법을 익혀야 하는 부담을 심적으로 간직하고 있음에 틀림없다.

실제로 미래사회 변화에 비추어 볼 때 학교수학은 신속한 계산보다는 아동의 구체적 조작활동이 어떻게 수학화 되는가를 인식토록 하는 데에 초점을 맞추어야 한다.

특히 입문기 아동의 경우, 성공적인 학습경험은 후속학습에 대한 동기유발, 자신감, 수학에 대한 긍정적 가치관 등에 효과적이기 때문이다. 이를 위하여 아동은 모형을 조작활동에서 곧바로 필산 알고리즘으로 진행하기보다는 그 중간단계에 문제상황을 그림으로 표현하고 설명하는 기회제공이 필요하다.

이러한 면에서 수 연산영역에서의 언덕도의 도입은 알고리즘학습에 비하여 다음과 같은 특징이 있다.

① 언덕도는 계산을 간단한 부분계산으로 단순화한다.

알고리즘학습은 수가 복잡해질수록 복잡한 절차의 반복수행을 요구하기 때문에 아동은 연습에 많은 시간을 할당하여야 한다. 이에 비하여 언덕도는 비록 복잡한 계산일지라도 적절한 중간점을 선택함으로서 부분계산으로 단순화한다. 이에 따라 대부분의 아동은 계산에 성공할 수 있게 된다. 언덕도를 통하여 아동은 기호조작의 원리를 감각동작(sensory motor)적인 방법으로 접근하는 발견자의 경험이 가능하게 된다.

② 언덕도는 아동의 개인차를 존중한다.

알고리즘학습은 아동의 능력에 관계없이 모든 학생에게 획일적인 절차 수행을 요구한다. 따라서 아동의 개성이나 개인차는 존중될 수 없다. 이에 비하여 언덕도는 곡선의 모양에서 중간점의 저유롭게 선택할 수 있다. 아동은 자신의 능력과 취향에 따라 이를테면 곡선의 요철, 중간점의 수와 위치 등을 자유롭게 결정함으로서 계산의 의미를 이해하고 다양한 상상력과 창의력을 신장할 수 있다.

③ 언덕도는 낮은 자리 수보다는 큰 자리 수에 보다 큰 관심을 갖는다.

알고리즘학습은 낮은 자리 수에 특별한 주의를 집중하지 않으면 계산에 실패한다. 그러나 실제 생활에서 중요한 것은 작은 수가 아니라 큰 수이다. 언덕도는 곡선을 그리는 과정에서 수의 대소를 판단하게 하여 큰 자리 수에 집중하게 한다. 이에 따라 언덕도는 컴퓨터, 계산기의 접근방법과도 일치하고 생활에 적용될 수 있다.

④ 언덕도는 교사와 아동의 원활한 의사소통을 가능하게 한다.

알고리즘학습에서의 교사의 설명은 아동에게 그대로 전달될 수 없다. 왜냐하면 아동의 청각정보와 기억정보는 상호 충돌하여 지적혼란이 유발되기 때문이다. 결국 알고리즘학습은 교사와 아동의 원활한 의사소통을 보증할 수 없다. 알고리즘은 언덕도의 다양한 해결방법 중의 특수한 경우이다. 언덕도를 통한 다양한 접근이 가능해 짐으로서 교사와 아동의 원활한 의사소통은 가능해 진다.

⑤ 언덕도는 EIS이론의 관점에서 매우 적절하다.

알고리즘을 중시하는 교과서체제는 행동적 표상단계에서 곧 바로 상징적 표상단계로 진행하기 때문에 아동의 시행착오를 유발한다. 그러나 언덕도는 그 중간단계에서의 영상적 표상단계의 역할을 수행함으로 EIS이론과도 일치한다. 그에 따라 아동은 지적저항을 받지 않게 된다.

⑥ 언덕도는 수학관과 그 학습관을 긍정적으로 변화시킨다.

많은 연습과 노력으로 알고리즘을 학습하였음에도 불구하고 계산알고리즘은 실생활에서 거의 사용되지 않는다. 이러한 상황에서는 아동의 수학관이 긍정적이 될 수 없다. 이에 비하여 언덕도는 아동의 수학관을 긍정적으로 변화시킬 수 있는 요인으로는 다음을 들 수 있다.

· 언덕도는 복잡한 계산을 의미있는 부분계산으로 변환함으로서 모든 아동의 성공을 보증한다.

· 언덕도는 수 계산을 거리, 길이, 높이, 깊이, 들이, 부피 등의 측정영역에서의 전이효과를 제공한다. 이에 따라 아동은 계산장면에 임하여 어림과 암산의 바탕이 되는 정신적 모델을 구성한다.

· 언덕도는 수를 지우는 낭비적인 활동을 하지 않는다. 알고리즘학습은 숫자를 지우고 쓰는 복잡한 절차를 요구한다. 이러한 절차는 작업기억의 처리능력에 부담이 될 수 있다.

· 언덕도는 일상생활의 문제해결에 적용성이 높다. 알고리즘은 복잡하고 불편하기 때문에 일상생활에서 거의 사용되지 않으나 언덕도는 큰 자리 수를 중시하고 또 부분계산을 통하여 계산하기 때문에 생활문제해결에 활용할 수 있다. 큰 수를 중시하는 것은 계산기, 컴퓨터의 접근방법과도 일치된다.

한편 정보처리적 관점에서 언덕도는 다음의 역할 수행한다.

· 언덕도는 장기기억의 역할을 지원함으로서 작업기억의 업무를 경감한다. 알고리즘 학습에서는 장기기억은 용량한계에 따라 작업기억을 적절히 지원할 수 없다. 결국 문제해결을 위하여 작업기억은 문제상황을 간직하면서 데이터정보를 엄격한 절차에 따라 신속하게 수행하여야 한다. 이에 따라 과도한 업무부담에 따라 작업기억은 고장을 유발한다. 언덕도는 문제정보를 외부기억에 저장하는 장기기억의 역할을 보완한다. 그 결과 작업기억의 작업부담은 줄어들고 처리능력은 향상된다. 작업기억의 능력이 확장됨으로서 아동은 다른 업무처리에 종사할 수 있게 된다.

· 언덕도는 작업기억으로 하여금 새로운 전략 창안의 기회를 제공한다. 알고리즘 학습에서는 작업기억은 과도한 업무부담에 따라 다른 창의적인 아이디어를 생각할 수 없다. 그러나 언덕도에 의하여 작업능률이 향상된 작업기억은 문제상황의 전반에 걸쳐 생각하고 또 곡선과 중간점을 반성하게 한다. 이에 따라 언덕도는 암산과 어림의 바탕이 되는 심적표상을 제공한다. 실제로 언덕도는 문제상황을 친밀한 상황으로 시각화하고, 또 부분계산으로 진행하기 때문에 아동은 계산과정에서 불안을 느끼지 않게 된다. 이에 따라 아동은 자리 수를 맞추어 쓰고, 받아내(올)림하는 등 복잡한 절차를 생략하고, 지루한 계산의 고통에서 벗어나게 된다.

결론적으로 언덕도는 수 계산이 무의미한 기호의 절차가 아니라 실제 상황에서의 양 개념으로 비유되는 광범하고 구조화된 개념체계를 제공한다. 그 결과 장기기억은 수의 조작을 다양한 개념으로 확장하여 실제 문제상황에서 창의적인 방법을 구안할 수 있게 된다.

언덕도를 통하여 아동은 뺄셈상황을 덧셈 상황으로 접근하고 그에 따라 뺄셈과 덧셈의 상보적인 관계를 이해한다. 즉 기계적인 학습에서 유발되는 아동의 시행 착오 이를테면 $7+5=\square$와 $5+\square=7$의 혼돈을 예방할 수 있는 것이다.

이러한 관점에서 계산알고리즘은 언덕도에 의한 계산조작이 충분히 이루어질 때까지 미루어져야 하고, 필산만을 강조한 교과서의 구성체제는 다양한 조작이 가능하도록 재검토되어야 한다. 아울러 이러한 관점에서 교사의 지도방법 및 지필위주의 평가방법, 익힘책의 구성체계 등을 재조명할 필요가 있는 것이다.

## 참 고 문 헌

김용국(1991). 수학의 토픽스. 전파과학사. 32.

구광조, 오병승, 류희찬 공역(1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 경문사. 26-59.

교육부(2000). 수학 2-가. 교육부

교육부(1999). 수학 3-1. 교육부

박성택 외 7인(1993). 수학교육. 동명사. 304.

이의원(1997). 초등수학교육의 열린교육적 관점. 한국수학교육학회 시리즈 C. 85-95.

이의원(1995). 국민학교 아동의 수학과 문제해결과정의 정보처리적 관점. 대한수학교육학회 논문집, 5(1), 39-53.

전평국(1999). 수학과 교수·학습에서의 교수매체의 역할. 한국수학교육학회 시리즈 F, 3집, 21-25.

서울대학교 교육연구소(1998). 교육학 대백과 사전. 하우동설. 1021-1023.

岐谷眞也(1990). 數學學習の 情報處理的 考察. 數學教育學の Perspective. 56-75.

Baroody, A. J. & White M. S.(1983). The development of counting skills and number conservation. *Child Study J.*, 13, 95-105.

Hughes, M(1986). *Children and number difficulties in learning mathematics.* Oxford; England: Basil Blackwell

Hart, L. E., and Walker, J.(1993). The role of affect in teaching and learning mathematics. In Owens, D. T. (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*(pp.22-38). Reston, VA: NCTM and NY: Macmillian.

Mclntosh, A., Reys, B., Reys R. E.(1992), A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12, 2-8.

Owens, D. T. (Ed.) (1993). *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*. NCTM. 대한수학교육학회 역 (1995). 수학교육연구주제 1.

Morrow, L. J., & Kenney, M. J. (Eds.)(1998). *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*, 1998 NCTM Yearbook. 대구교육대학교, 춘천교육대학교대학원 역 (1999). 136-137.

Gage, N. L. & Berliner, D. C.(1984). The cognitive processing of information. *Educational Psychology*, 298-332.

Cobb, P.(1988). Instruction and cognitive change in mathematics. *Educational Psychologist*, 23(2), 87-103.

Calfee, R.(1981). Cognitive psychology and educational practice. *Review of Research in education* 9, 3-74.

Reys R. E., et al(1995). *Helping children learn mathematics*(5th Edition). Boston, Mass: Allyn and Bason. 강문봉외 18인(역)(1999). 초등수학 학습지도의 이해. 양서원. 45-301.

Resnick, L. B. & Ford, W. W.(1981). *The Psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Association.

Maurer, S. B.(1998), What is an algorithm? What is an answer? In Morrow, L. J. Kenney, M. J. (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*(pp.21-31). NCTM 1998 Yearbook. Reston, VA: NCTM.

Mingus, T. T. Y., Grassl, R. M.(1998). Algorithmic and recursive thinking. In Morrow, L. J. Kenney, M. J. (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in School Mathematics*(pp.32-43). NCTM 1998 Yearbook. Reston, VA: NCTM.

Wilson Guy M.(1948). The social utility theory as applied to arithmetic, its research basis, and some of its implication. *Journal of Educational Research*, 41, 321-337.

Weill, E.(1978). Mrs. Weill's hill: A successful subtraction method for use with learning disabled child. *Arithmetic Teacher*, 26, 34-35.

Usiskin, Z.(1998). Paper and pencil algorithms in a calculator and computer age. In Morrow, L. J., Kenney, M. J. (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*(pp.10-15). NCTM 1998 Yearbook. Reston, VA: NCTM.

# Effects of the Mrs. Weill's Hill in Addition and Subtraction

Lee, Eui-Won (taegu National University of Education)

With the increased use of computational technology, many educators question about spending large amount of class time for dealing with computational algorithms in elementary school math classroom at the expense of more holistic aspects of mathematics such as number sense, spatial sense, problem solving, and data management.

This paper introduce the new method for learning addition and subtraction so called 'Mrs. Weill's Hill,' which is believed as a suitable remedial method for children with mathematical learning disabilities, with perceptual problems, or with limited working memory capacities.

This method provides children with external memory strategies by allowing them to solve the addition and subtraction problems in a stage by stage fashion with as many steps as they require. It also gives the child greater flexibility in the solution process and thus helps reduce anxiety.