대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.2, 545~562, September 2000

산술 삼각형의 구성 원리를 수업에 응용하기

조 윤 동(서울공업고등학교)

I. 들어가는 글

학생이 어떤 것을 어떻게 배우느냐하는 것은 교육에서 매우 중요한 문제이다. 마찬가지로 그에 대응하여 교사가 어떤 것을 어떻게 가르치는가 하는 것도 중요한 것이다. 그런데 이 때 사실 일차적으로 갖추어져야 할 것이 가르칠 대상에 대한 지식(학과목에 대한 지식, 학생에 대한 지식, …)과 그것을 해결하는 방법에 대한 교사의 지식일 것이다. 왜냐하면 어떤 것에 대한 생각이 있다고 해서 그 생각만 가지고 일을 풀어갈 수 있는 것이 아니라는 것은 분명한 사실이다. 물론 하고자 하는 생각이 없으면 아무리 많은 지식을 가져다주어도 소용이 없음도 또한 사실이다. 그렇지만 어떤 것이 일차적인가 하면 그것은 어떤 상황을 풀어갈 때 도구가 되는 지식이 아닌가 한다. 이런 관점에서 교과 내용에 대한 폭넓은 지식과 그것을 이루고 있는 체계를 제공하려는 노력은 매우 중요하다고 하겠다. 여기서는 중·고등학교 교사라고 하면 모두 알고 있는 사항이라고 할 수 있으나 부분적으로만 알고 있는 것으로서 하나의 원리로 엮일 수 있는 것을 소개하고자 한다.

우리가 수학 문제를 다룰 때 전에 풀었던 적이 있는 같거나 비슷한 유형의 문제를 생각하는 것이 그 문제의 풀이 전략을 생각하는데 많은 도움이 된다는 것은 누구나 공감하는 바이다. 이 때 같은 유형의 문제라는 것을 보통은 형태가 같은 것, 같은 주제를 다루는 것들을 주로 생각한다. 그러나 여러 문제 상황을 보다보면 근과 계수의 관계처럼 단지 방정식의 근을 다루는 문제뿐만 아니라 어떤 도형의 자취를 구한다든지 하는 문제에도 그것이 쓰이는 것을 볼 수 있다. 이것은 겉보기에 같은 형태의 문제 해결에 대한 것은 아니다. 그러나 이런 것 말고도 하나의 기본 원리가 여러 주제에 걸처 다루어지는 것이 있다. 그것의 한 예가 산술 삼각형(파스칼의 삼각형)이다.

산술 삼각형만큼 여러 곳에 응용되는 하나의 주제도 드물 것이다. 그와 관련해서 우리가 보통 알고 있고 자주 쓰고 있는 것은 계수가 1인 두 항으로 이루어진 식을 거듭제곱한 식

에서 그것을 전개한 것(이항 전개식)을 어느 한 문자에 관하여 내림차순 또는 올림차순으로 정리했을 때 각 항의 계수를 차례로 쓴 것 정도이다. 그러나 중국인들이 먼저 발견하고 나서 파스칼이 이것을 확률에 응용한 것을 비롯하여 이제는 많은 곳에 쓰이고 있다. 사실 산술 삼각형은 중국인들이 파스칼보다 600년 이상이나 앞서서 발견해내어 사용하고 있었다. 그런데 이것을 굳이 파스칼의 삼각형이라 하는 것은 그가 그 속에 들어있는 원리를 찾아 정리하고 그 응용의 폭을 넓혔던 데에 있는 듯하다.

그러나 그것을 처음 발견하여 사용한 것의 가치를 인정하지 않으려는 것은 서양 수학자 또는 역사가들이 자신들의 역사에 대한 우월성을 내세우려는 의도가 다분하지 않나 생각된다. 왜냐하면 서양수학사를 살펴보면 원리의 규명이나 응용의 폭을 넓히지 않았더라도 그것에 발견자의 이름을 붙이는 경우가 자주 있기 때문이다. 그리고 사실 앞으로 살펴보겠지만 중국에서도 구성 원리를 밝히고 이항전개식의 계수에 이용했을 뿐만 아니라 방정식의 근을 구하기도 했기 때문이다.

여기서는 먼저 산술 삼각형의 역사를 살펴보면서 그것이 어떻게 중국에서 서양으로 건너가게 되어 파스칼의 삼각형이라 이름이 붙게 되었는지를 보도록 한다. 그리고 나서 산술 삼각형의 구성 원리가 적용되고 있는 여러 내용을 중·고등학교 교육 내용을 중심으로 관련지어 정리하여 보고자 한다.

II. 산술 삼각형의 모습과 그 역사

산술 삼각형은 아래 <그림 1>과 같이 이루어져 있는 수의 열을 말한다. 이러한 방식으로 수를 배열한 것이 처음 보이는 것은 늦춰 잡아 13세기의 중국에서 나온 책이라고 한다. 그러나 이는 서양에서 보이는 16세기의 기록보다 무려 3세기나 빠르고, 파스칼의 삼각형으로 연구되기 시작한 것보다 4세기나 빠른 것이다. 실제로 기록에 남아 있는 것을 보면 6세기나 앞서 있다. 아래에서 이 산술 삼각형이 대한 역사를 중국, 아라비아, 서양의 순서로 살펴보기로 하겠다.

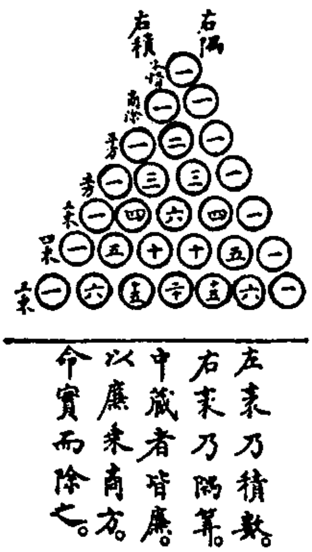
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
. . . .

<그림 1>

1) 중국

1100년 이전에 중국의 수학책 가운데 이항계수를 그림으로 나타내는 방법을 언급한 것이 있기 때문에 산술 삼각형은 중국에서 그 무렵에 등장했다고 보아도 좋을 것이다. 중국에서 정수 제곱의 이항식에 관한 이항정리의 발견의 기원은 거듭제곱보다 오히려 근의 거듭제곱근 풀이와 관련이 있다고 한다.

가헌(賈憲, 1050년 무렵)의 저작에서 산술 삼각형을 이용한 증거가 남아 있는데 우리는 거기서 제곱전개와 세제곱전개의 새로운 방법—증승개평방, 개립방법(增乘開平方, 開立方法)—을 볼 수 있다. 이것으로부터 늦어도 11세기 중엽에는 중국 중세의 수학자들은 이미 이러한 고차 거듭제곱의 전개도 할 수 있었음을 알 수 있다. 남아 있는 기록을 보면 양휘(楊輝)는 <상해(구장)산법(詳解算法)>에서 <그림 2>의 '개방작법본원(開方作法本原)' 그림을 싣고, 같은 그림이 "석쇄산서(釋鎖算書)에 나오고 가헌이 이 기록을 사용했다."라고 쓰고 있다. 또 '증승방구렴법초(增乘方求廉法草)'를 싣고 '초(草)'가 '석쇄구렴본원(釋鎖求廉本原)'인 것을 밝히고 있다. 따라서 늦어도 가헌의 책에는 고차거듭제곱 전개가 쓰여 있었다는 것을 알 수 있다.

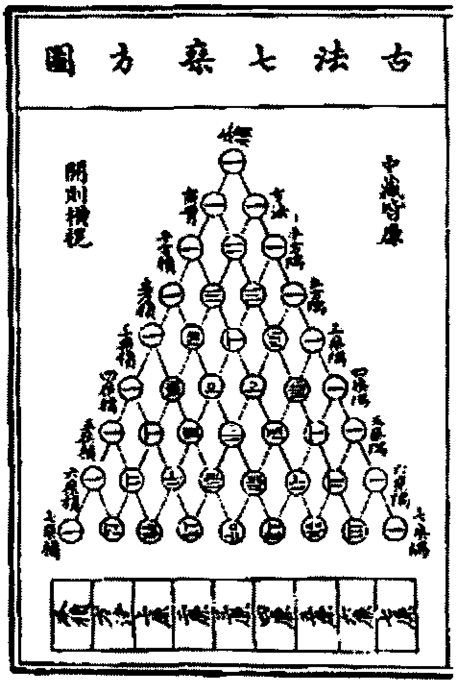


<그림 2> 錢 宝琮 編 川原秀城譯 <中國數學史>에서 복사한 것임

고대의 제곱 전개, 세제곱 전개 방법에 따라 발달하여 온 고차 거듭제곱의 전개 방법 말고 그것과 나란히 '증승방법(增乘方法)'에 따라 임의의 고차 거듭제곱을 전개하는 새로운 방법이 있다. 후자의 방법은 전자보다 분명히 나은데 그냥 옛 방법과 견주어 간단하다는 정도가 아니다. 이러한 방법이 유익(劉益)과 진구소(秦九韶)와 같은 사람들의 활동을 거쳐 중국의 수학사상 커다란 광채를 발하는 임의의 고차방정식의 수치해법으로까지 발전하였다고 한다.

'개방작법본원(開方作法本原)'의 그림은 가헌(1050년 무렵), 양휘(1261년), 주세걸(1303년), 그 뒤 오경(吳敬)(1450년)과 주술학(周述學)(1558년)과 같은 사람들에 의하여 인용되었다. 양휘의 책에는 중국 수학의 황금시대를 마감했던 주세걸의 <사원옥보(四元玉寶)>를 통해서 출판되고 널리 알려진 급수의 합 그리고 이른바 파스칼 삼각형의 원형을 이루는 것이 포함되어 있었다. <사원옥보>는 산술 삼각형 그림으로 시작한다(<그림 3> 참조). 주세걸이 표

시한 배열에서 이항전개의 8제곱의 계수까지만 나타나는데 그 계수들은 산목의 부호와 0과 같은 둥근 부호로 분명히 표시되어 있다. 주세걸은 그 삼각형을 만드는데 자신이 힘쓴 바는 없고 그것을 "8제곱 이하의 계수를 찾기 위해 오래 전부터 쓰던 방법을 나타낸 그림"이라고 말하고 있다. 6제곱까지의 이항계수를 마찬가지로 배열한 것이 양휘의 저서에도 보이지만 여기에는 0과 같은 둥근 부호는 사용되지 않았다. 서양 여러 나라에서는 보통 이 '개방작법본원'의 그림을 파스칼의 삼각형이라 하고 프랑스의 수학자 파스칼(1623~1662년)이 발명한 것이라고 하지만 그것은 옳지 않다(중국수학사 160-164).



<그림 3> 1303년의 주세걸의 <사원옥보>의 앞면에 그려진 '산술 삼각형'인 '고법칠승방도(古法七乘方圖)'(이것은 C. B. Boyer의 <수학의 역사>가 J. Needam 저 <중국의 과학과 문명> 제3권 135에서 복사한 것을 다시 복사한 것.)

2) 아라비아

중국에서 이항정리가 사용되던 무렵에 오마르 하이얌(Omar Khayyam)은 이 정리를 분명히 알고 있었던 것 같다. 그러나 이것을 처음으로 기록한 남아있는 아라비아 책은 15세기의 알 카시(al-Kashi)가 쓴 책이다. 그는 <산술의 열쇠>에서 '파스칼의 삼각형' 형태로 이항정리를 9차 거듭제곱에 이르는 도표로 기록하고 있다. 이는 중국에서 파스칼의 삼각형이 출판되고 나서 정확히 한 세기 뒤이고 서구에서 책으로 출판되기 약 한 세기 전에 해당된다.

3) 서구

독일의 수학자이자 천문학자인 아피안(Peter Apian)이 1527년 펴낸 상업 산술책 <계산>(Rechung)의 표지에 산술 삼각형이 처음으로 인쇄되었다고 한다. 이것은 파스칼이 태어나기 100년쯤 전이라는 사실에 주목할 만하다. 그 뒤 16세기에 발간된 독일의 대수학 저서 가운데 가장 값진 책이라고 하는 슈티펠(Michael Stifel)의 <산술전서>(Arithmetica integra, 1544)에 파스칼의 삼각형이 실려 있다. 사실 이 책에는 이것보다 더욱 중요한 것으로 음수,

거듭제곱, 거듭제곱을 다루는 방법도 있다.

파스칼은 <수 삼각형론>을 1653년에 썼는데 그것은 1665년까지 발행되지 않았다. 그는 <그림 2>에서 볼 수 있는 수삼각형(數三角形)을 만들었다. 앞으로 다루는 내용에서 살펴볼 것으로 이항계수를 알아보는 것은 파스칼이 그의 삼각형을 이용하려는 것 가운데 하나였다. 그는 또한 그것을 확률론의 연구에서 n개에서 한 번에 r개를 꺼내는 조합의 수를 구하는 데 이용하여 $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (여기서 $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$)과 같이 정확하게 나타내었다. 수삼각형의 수를 포함하는 관계식이 많이 있는데 그 가운데 몇 개는 파스칼이 발견한 것이라고 한다. 어쨌든 이러한 수 배열이 파스칼의 삼각형으로 알려지게 된 것은 확률의 연구를 산술 삼각형에 연결하여 발전시킨 것을 비롯하여 그 삼각형이 가지고 있는 많은 성질을 개발했고 응용하였기 때문이라고 하겠다.

1	1	1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	6	7	…
1	3	6	10	15	21	28	…
1	4	10	20	35	56	84	…
1	5	15	35	70	126	210	…
1	6	21	56	126	252	462	…
1	7	28	84	210	462	924	…
·	·	·	·	·	·	·	…

<그림 4>

파스칼은 <그림 4>에서 같은 세로열의 위치에 있는 칸을 '같은 수직계수의 칸'이라 하고 같은 가로열의 위치에 있는 칸을 '같은 수평계수의 칸'이라고 하였으며 위를 향하여 비스듬한 대각선 위에 함께 있는 칸을 '같은 밑변의 칸'이라 하였다. 이 삼각형 자체는 600년보다 더 오래 전부터 알려져 있었는데 파스칼이 밝힌 또 하나의 새로운 성질은 다음과 같다.

"모든 산술 삼각형에서 같은 밑변에서 이웃하고 있는 두 칸 가운데 위의 칸에 있는 수와 아래 칸에 있는 수의 비는 위의 칸에서 밑변의 위쪽 끝에 이르기까지 칸의 수와 아래의 칸에서 밑변의 아래쪽 끝에 이르기까지 칸의 수의 비와 같게 된다."

그런데 이 성질에 대한 증명 방법은 그 성질 자체보다 중요하다. 왜냐하면 1654년 파스칼은 이 증명과 관련해서 수학적 귀납법에 대한 훌륭하고 명확한 설명을 제시했기 때문이다. 그러나 '수학적 귀납법'이라는 이름은 훨씬 뒤인 1838년의 페니 백과사전(Penny Cydopaedia)에 드 모르강(Auguestus De Morgan)이 '귀납법(수학)'에 대해서 쓴 글에서 나온 것 같다.

III. 산술 삼각형의 구성 원리

산술 삼각형의 구성 원리는 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$이다. 여기서 앞에서 이야기한바와 같이 ${}_nC_r = \binom{n}{r}$이다. 이것을 위 <그림 1>에서 설명하면 가로줄에 있는 어떤 수 k는 바로 위에 있는 줄에서 k가 놓인 순서보다 하나 앞의 수와 그 수 바로 다음의 수를 더한 값이다. 앞의 그림에서 예를 들어 설명하면, 일곱째 줄의 다섯째 수 15는 바로 윗줄의 넷째 수 10과 다섯째 수 5를 더한 값이다.

이 산술 삼각형을 이루는 각 숫자는 다음의 의미를 지니고 있다. 넷째 행의 수 1, 4, 6, 4, 1을 살펴보자. 동전 한 개를 네 번 던진다고 하자. 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 H와 T로 이루어진 16가지의 배열이 나온다. 이것을 앞면이 나타나는 횟수를 기준으로 분류하면 다음과 같다. 물론 뒷면이 나오는 횟수를 기준으로 하면 역으로 보면 된다.

앞면 4번	앞면 3번	앞면 2번	앞면 1번	앞면 0번
HHHH	HHHT HHTH HTHH THHH	HHTT HTHT TTHH HTTH THHT THTH	HTTT THTT TTTH TTHT	TTTT
1	4	6	4	1

이 수열은 산술 삼각형 제 5행과 같다. 이는 조합의 수로 나타내면 각각 ${}_4C_0=1$, ${}_4C_1=4$, ${}_4C_2=6$, ${}_4C_3=4$, ${}_4C_4=1$이다. 그러면 동전을 2번, 3번, 5번 던졌을 때는 어떻게 될지 구해 보아 앞의 산술 삼각형과 비교해 보면 정확히 각각 3, 4, 6행의 수들과 일치하는 것을 볼 수 있을 것이다.

Ⅳ. 산술 삼각형과 이항전개

이항전개는 중등 수준의 수학교육에서는 반드시 알아야 하는 내용이다. 그런데 많은 학생들의 경우 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 을 전개식 또는 인수분해 공식으로 외우고 있지만 그 이상의 식에 대해서는 전혀 유추해 내지 못하는 것을 자주 보게 된다. 그냥 외우게 해서만은 학생들의 응용력을 키워줄 수 없다. 다른 방식을 도입해서 해결하도록 해야 하겠다. 산술 삼각형이 그 역할을 톡톡히 해낼 것이다. 이 때 산술 삼각형의 구성 원리를 알게 하기만 하면 어떤 차수의 이항전개식이든 만들어낼 수 있으므로 좀더 적극적으로 이것을 이용할 필요가 있겠다. 그러면 공식을 하나라도 덜 외울 것이고 그 만큼 수학적 내용 사이에 연결성을 늘릴 수 있을 것이다. 실제로 저학년의 학생들에게라도 산술 삼각형을 몇 행 써놓고 각 행이 구성되는 원리를 물어보면 쉽게 깨우칠 수 있는 것을 볼 수 잇다. 따라서 이를 깨닫게 하고 전개에 이용한다면 앞으로 많은 곳에 응용할 때 커다란 도움이 될 것이다.

1) 지수가 자연수일 때의 이항전개

이는 많이 알고 있는 사항이다. <그림 5>에서 각 행에 나오는 수들은 맨 위 가로줄부터 차례로 $(1+a)^n$ (단, $n\geq 0$ 인 정수)을 전개했을 때 나오는 계수를 차례로 쓴 것이다. 직접 전개한 것을 다섯째 행까지 써보면 다음과 같다.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
.	.	.	.	.	.	.

<그림 5>

$$(1+a)^0=1$$
$$(1+a)^1=1+1\,a$$
$$(1+a)^2=1+2\,a+1\,a^2$$
$$(1+a)^3=1+3\,a+3\,a^2+1\,a^3$$
$$(1+a)^4=1+4\,a+6\,a^2+4\,a^3+1\,a^4$$

위에서 행마다 있는 각 항의 계수가 산술 삼각형의 대응하는 행의 수의 배열과 같음을 볼 수 있다. 이러한 내용은 중학교 과정에서 충분히 다루어질 수 있는 내용이다.

2) 지수가 음의 정수일 때의 이항전개

그렇다면 지수가 음수인 경우, 곧 음의 거듭제곱 이항전개는 어떻게 될까? 이러한 의문을 가졌던 적이 있을 것이다. 이것을 앞서 언급한 산술 삼각형의 구성 원리를 적용하여 풀 수는 없을까? 답은 '있다'이다. 이제 그 과정을 살펴보자. 아주 쉽게 유추할 수 있다.

위의 <그림 5>에서 각 행의 오른쪽에 각 행마다 열에 줄을 맞추어 0을 써 놓는다. 그 다음 산술 삼각형의 구성 원리 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$를 적용하여 위쪽으로 각 행을 만들어 나간다. 그러면 아래의 표에서 왼쪽에 있는 수의 배열을 얻게 된다. 보기를 들면 첫 줄의 6은 그 앞의 수 −3과 바로 아래의 수 3을 가지고 찾아낸다. 곧, 그 수 6은 $-3+x=3$ 의 근이다. 그렇게 구한 각 수들은 맨 왼쪽에 있는 식을 전개했을 때 나타나는 각 항의 계수임을 알 수 있다.

$(1+a)^1$	1	-3	6	-10	15	-21	28
$(1+a)^{-2}$	1	-2	3	-4	5	-6	7
$(1+a)^{-1}$	1	-1	1	-1	1	-1	1
$(1+a)^0$	1	0	0	0	0	0	0
$(1+a)^{-3}$	1	1	0	0	0	0	0
$(1+a)^2$	1	2	1	0	0	0	0
$(1+a)^3$	1	3	3	1	0	0	0
$(1+a)^4$	1	4	6	4	1	0	0
$(1+a)^5$	1	5	10	10	5	1	0

그러니까 $(1+a)^{-3}$을 전개하면 다음과 같이 된다는 것이다.

$$(1+a)^{-3} = 1 - 3a + 6a^2 - 10a^3 + 15a^4 - 21a^5 + 28a^6 - \cdots$$

그런데 이것은 실제로 $\frac{1}{(1+a)^3}$을 장제법으로 계산한 것과 같다.

3) 지수가 유리수일 때의 이항전개

사실 삼차방정식의 풀이법과 관련하여 잘 알려져 있는 카르다노와 파스칼은 이항 전개식의 계수의 법칙성이 있다는 것을 잘 알고 있었다. 그러나 그들은 데카르트의 지수 기호를

이용하지 않았기 때문에 거듭제곱식의 지수를 정수에서 분수로 확장하지 못했다고 한다. 이것을 해결한 사람이 바로 뉴턴이다.

뉴턴이 1664년 또는 1665년에 발견하였다고 하는 이항정리는 1676년에 올덴부르크에게 보낸 편지에 들어 있다. 뉴턴이 이항정리를 표현한 식이 어색하게 보일지도 모르는데 사실 이것은 뉴턴의 발견이 정수의 거듭제곱지수를 단순히 분수로 바꾸어 놓는 것만은 아니었다. 그것은 대수적 양의 나눗셈과 거듭제곱근에 대해 뉴턴이 하였던 여러 가지 시행착오의 결과였다. 뉴턴이 위에서 발견한 정리는 다음과 같다.

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \cdots$$

여기서 P는 거듭제곱되는 두 항 가운데 첫 항이고 Q는 두 번째 항을 처음 항으로 나눈 몫이고, $P+PQ$와 P 다음의 $\frac{m}{n}$은 거듭제곱의 지수이다. 오른쪽 변에서 두 번째 항부터 나타나는 인수 A, B, C, D, …는 A는 첫째 항 $P\frac{m}{n}$를, 둘째 항 B는 $\frac{m}{n}AQ$를 나타낸다. 그 다음도 마찬가지이다. 예를 들어보자.

$$\begin{aligned}&(1+a)^3\\&=1^3+\frac{3}{1}\cdot 1^3\cdot a+\frac{3-1}{2\cdot 1}\left(\frac{3}{1}\cdot 1^3\cdot a\right)a+\frac{3-2}{3\cdot 1}\left\{\frac{3-1}{2\cdot 1}\left(\frac{3}{1}\cdot 1^3\cdot a\right)a\right\}a+\frac{3-3}{4\cdot 1}\cdots\\&=1+3a+3a^2+a^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(1+a)^{-3}\\&=1^{-3}+\frac{-3}{1}\cdot(1^{-3})\cdot a+\frac{-3-1}{2\cdot 1}\left(\frac{-3}{1}\cdot 1^{-3}\cdot a\right)a\\&\qquad+\frac{-3-2}{3\cdot 1}\left\{\frac{-3-1}{2\cdot 1}\left(\frac{-3}{1}\cdot 1^{-3}\cdot a\right)a\right\}a\\&\qquad+\frac{-3-3}{4\cdot 1}\left[\frac{-3-2}{3\cdot 1}\left\{\frac{-3-1}{2\cdot 1}\left(\frac{-3}{1}\cdot 1^{-3}\cdot a\right)a\right\}a\right]a+\cdots\\&=1-3a+6a^2-10a^3+15a^4-\cdots\end{aligned}$$

$$\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-x)+\frac{1-2}{2\cdot 2}\left(-\frac{1}{2}x\right)\cdot(-x)+\frac{1-2\cdot 2}{2\cdot 3}\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot(-x)+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\cdots$$
(여기서 $Q=-x,\ \frac{m}{n}=\frac{1}{2}$)

이것이 맞는지 오른쪽 변을 제곱하여 보면 다음과 같다.

$$\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\cdots\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{16}x^3-\cdots$$
$$=1-x+0x^2+0x^3+\cdots$$
$$=1-x$$

우변의 제곱이 좌변이 되었으므로 이 이항 전개는 올바른 것이다.

V. 산술 삼각형과 유한 집합의 부분 집합의 개수

공통 수학에서 다루는 집합 단원에 유한 집합의 부분 집합의 개수를 구하는 문제가 나온다. 집합 A의 원소의 개수가 n개일 때 집합 A의 부분 집합의 개수는 2^n이다. 학생들이 이것을 배울 때는 원소의 개수가 하나, 둘, 셋인 경우의 예를 들어 실제로 부분집합을 구한 뒤 이 때의 개수를 세어보고 2^n을 유추하고 난 뒤 외우게 된다. 그렇기 때문에 그 단원을 배운지 오랜 시간이 지나지 않아 그 공식을 잊는 경우가 많다. 그런데 이것은 다음과 같이 이항 전개식에서 유도할 수 있다. 수학 I의 순열 조합 단원에서 이항 전개식을 배우고 난 뒤 조합의 기본 원리를 통해 공통수학에서 배웠던 부분집합의 개수 공식을 다시 상기시키면서 둘 사이의 관계를 맺어주게 되면 부분간 연계성을 의식하게 해줄 수 있게 할 것이다. 이러한 면에서 산술 삼각형의 구성 원리는 좋은 소재이기도 하다.

n개의 원소가 있는 집합에서 $i\,(0\leq i\leq n)$개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_nC_i$인데 이것은 집합 A에서 원소의 개수가 i개인 부분 집합의 개수와 같다. 곧, 집합이나 조합은 순서를 생각하지 않으므로 다음과 같이 대응된다. n개에서

하나도 꺼내지 않는 방법의 수는 $_nC_0$ …공집합의 개수
하나를 꺼내는 방법의 수는 $_nC_1$ …원소가 하나인 부분집합의 개수
두 개를 꺼내는 방법의 수는 $_nC_2$ …원소가 두 개인 부분집합의 개수
세 개를 꺼내는 방법의 수는 $_nC_3$ …원소가 세 개인 부분집합의 개수
· · · · · ·
$n-1$개를 꺼내는 방법의 수는 $_nC_{n-1}$ …원소가 $n-1$개인 부분집합의 개수
n개를 꺼내는 방법의 수는 $_nC_n$ …원소가 n개인 부분집합의 개수

이것을 모두 더하면

$$_nC_0 + {_nC_1} + {_nC_2} + {_nC_3} + \cdots + {_nC_n} \quad \cdots ㉠$$

그런데 이 값은 이항 전개식

$$(1+a)^n = {_nC_0} + {_nC_1}a + {_nC_2}a^2 + {_nC_3}a^3 + \cdots + {_nC_n}a^n \quad \cdots ㉡$$

에서 양변에 $a=1$을 대입해서 얻은 우변과 같다. 따라서 ㉠, ㉡에서

$$_nC_0 + {_nC_1} + {_nC_2} + {_nC_3} + \cdots + {_nC_n} = 2^n$$

이와 같이 해서 원소의 개수가 n개인 유한 집합의 부분집합의 개수를 구할 수 있다. 순열, 조합을 배운 뒤에는 반드시 부분 집합의 개수를 구하는 내용과 연결시켜 주어야 할 것이다.

VI. 산술 삼각형과 수열

1) 등차수열과 그 밖의 수열

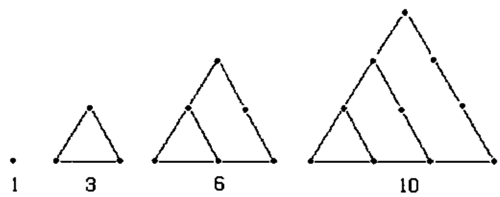
산술 삼각형을 그림 3과 같이 쓴 것에서 좀더 많은 사실을 알 수 있는데 그 가운데 하나가 피타고라스의 도형수와 관련된 것이다. 그것을 살펴보면 다음과 같다.

첫째 열은 모두 1이므로 공차가 0인 등차수열 또는 공비가 1인 등비수열로 볼 수 있는데 공간의 차원으로 말하면 0차원의 수들이다.

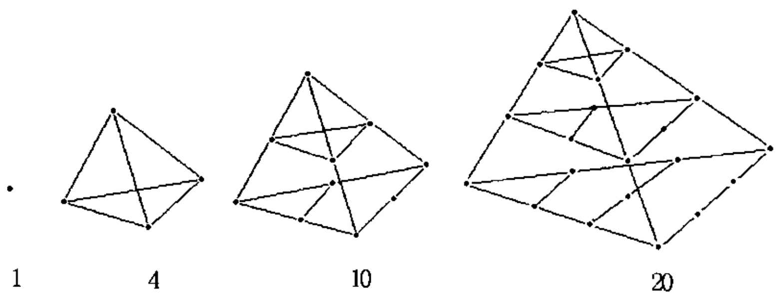
둘째 열은 자연수의 열이 나오는데 이는 첫째 항이 1이고 공차가 1인 등차수열이고 1차원의 수들이다.

셋째 열을 살펴보자. 어떤 삼각형도 세 개보다 적은 점으로는 만들 수 없으나 그보다 많은 6, 10, 15개의 점으로는 가능하다(<그림 6>). 1, 3, 6, 10, 15와 같이 일반적으로 $N=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$로 주어진 수를 삼각수라고 한다. 이 때 이 수열은 계차수열이 등차수열이 되고 2차원의 수라고 하겠다.

넷째 열에서는 나온 숫자의 개수만큼의 점으로 정사면체 모양으로 배열할 수 있기 때문에 그 수들을 사면체수(<그림 7>)라고 한다. 계차의 계차수열이 등차수열인 수열이 되는 3차원의 수이다.



<그림 6>



<그림 7>

2) 산술 삼각형과 피보나치 수열

다음 <그림 8>처럼 산술 삼각형에서 빗금을 그어 그에 걸려 있는 수들을 더하여 차례로 쓰면 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …, a_n, …과 같이 되어 피보나치 수열이 됨을 알 수 있다. 여기서 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$이다. 곧, 처음 두 항 다음의 항부터는 그 바로 앞의 두 항의 합이다. 수열은 인도-아라비아

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
. . . .

<그림 8>

숫자의 사용을 강력하게 주장하는 대수적 방법과 문제에 관한 논문인 피보나치(피사의 레오나르도)의 저작인 <산반서>(Liber abaci)에 실려 있는 수열이다. 여기서 다룬 피보나치 수열은 여러 성질이 있다. 수학능력 시험에서도 직접 언급하지는 않지만 여러 차례 응용되었다. 이 수열에 대해서는 다음과 같은 기본성질이 들어있다.

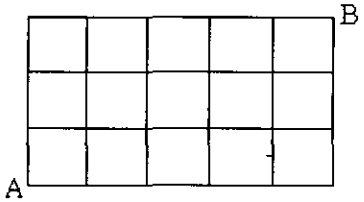
① 연속하는 두 항은 어느 것이나 서로 소이다.

② $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이 황금분할비 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 이다.

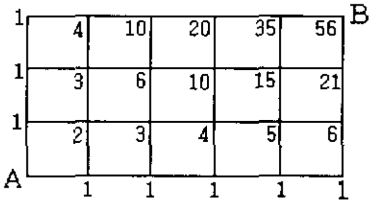
이 피보나치 수열을 이루는 수와 그것을 구성하는 어떤 두 수의 비는 자연계(잎차례, 생물의 성장), 건축, 미술, 음악, 우리의 몸 등등 여러 곳에서 발견할 수 있다. 피보나치 수열에 대하여 더 자세한 것은 수학사랑에서 펴내는 <수학사랑> 제 10호에서 13호에 실려 있는 글을 참조하기 바란다.

VII. 산술 삼각형과 순열, 조합

산술 삼각형을 만드는 기본 원리 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$를 이용하면 <그림 9>와 같은 도로망을 가진 마을의 A에서 B까지 가장 빠른 길로 가는 방법의 수를 구할 수 있다. 그 결과를 <그림 8>에 나타내었다. 이는 고등학교 과정의 '같은 것이 있는 순열의 수' 부분에서 다루는 방법 $({}_7C_4 = {}_7C_3 =) \frac{7!}{4!3!} = 35$와 그 결과가 같다. 물론 이 경우 문제 상황을 잘 파악하여 해당되는 공식을 바로 떠올리면 좋겠지만 그렇지 못하더라도 다음의 것을 한두 예를 통해서 실제로 하여 보면 잊지 않고 그 방법을 기억해 낼 것이다.



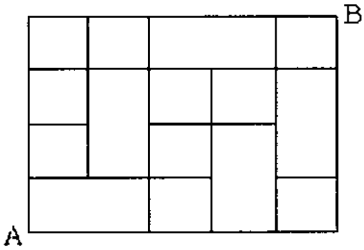
<그림 9>



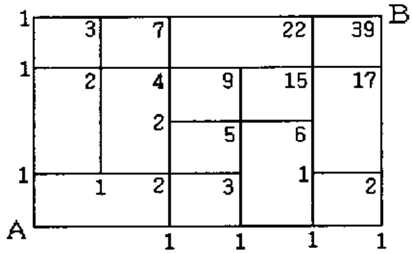
<그림 10>

그런데 여기서 소개한 방법을 좀더 확장하면 아래 <그림 11>과 같은 계획적으로 짜이지 않은 도로망을 가진 마을에서 A에서 B까지 가장 짧은 길을 따라 가는 방법의 수를 구할

수 있다. 이 경우는 조합의 방법 가운데 이른바 같은 것이 있는 순열의 수로 구하는 것이 까다로울 때 사용하면 매우 편리하다. 사실 이 경우는 고등학교 과정에서 다루는 순열, 조합의 방법으로는 계산할 수 없는 경우라고 할 수 있겠다. 계산 결과는 오른쪽 <그림 12>에 나타내었다. 이는 산술 삼각형의 원리를 극명하게 활용하는 부분이라고 본다.



<그림 11>



<그림 12>

VIII. 퀴즈로 알아보는 파스칼 삼각형이 나타나는 여러 경우들

아래에 소개하는 퀴즈는 산술 삼각형의 구성 원리를 이용하여 만든 퀴즈이다. 이러한 것들은 실제로 학교 학습에서 교과 내용과 직접 관련되는 것은 아니지만 학생들의 흥미를 돋우는데 도움을 주는 것들이다. 잠깐 짬을 내어 학생들과 즐겨보면서 그 안에 감추어진 산술 삼각형의 구성 원리를 끌어내어 본다면 이는 꽤 쓸모있는 소재가 될 것이라고 생각된다.

1) 11의 거듭제곱

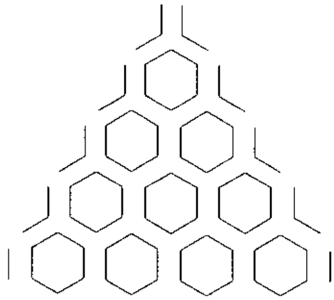
$$11^0 = 1$$
$$11^1 = 1\ 1$$
$$11^2 = 1\ 2\ 1$$
$$11^3 = 1\ 3\ 3\ 1$$

물음 : 파스칼의 삼각형과 같은 모양은 몇 제곱이 될 때까지 계속될까요? 또 그 까닭은 무엇일까요?

2) 6각형 미로

구슬 16개를 그림과 같은 6각형 미로에 넣으며 갈림길마다 구슬들은 정확히 절반씩 나뉘어서 흩어져 내려온다.

물음 : (가), (나), (다), (라), (마)지점에는 구슬이 각각 개가 있을까요? 또 미로 아래에 같은 형식으로 한 단계를 더 만들고, 구슬을 32개 굴린다면 어떻게 나뉘어 놓일까요?

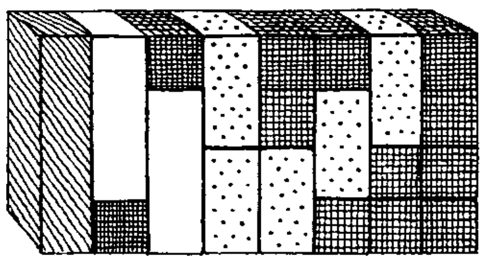


<그림 13>

3) 퀴즈네르 막대

퀴즈네르 막대는 어린이들에게 수 개념을 가르칠 때 쓰는 나무토막이다. 길이가 1, 2, 3, 4, 5, …인 여러 가지 막대로 이루어져 있다.

오른쪽 <그림 14>는 이 막대들을 사용하여 전체 길이가 4가 되도록 만드는 8가지 방법을 모두 나타내고 있다.



<그림 14>

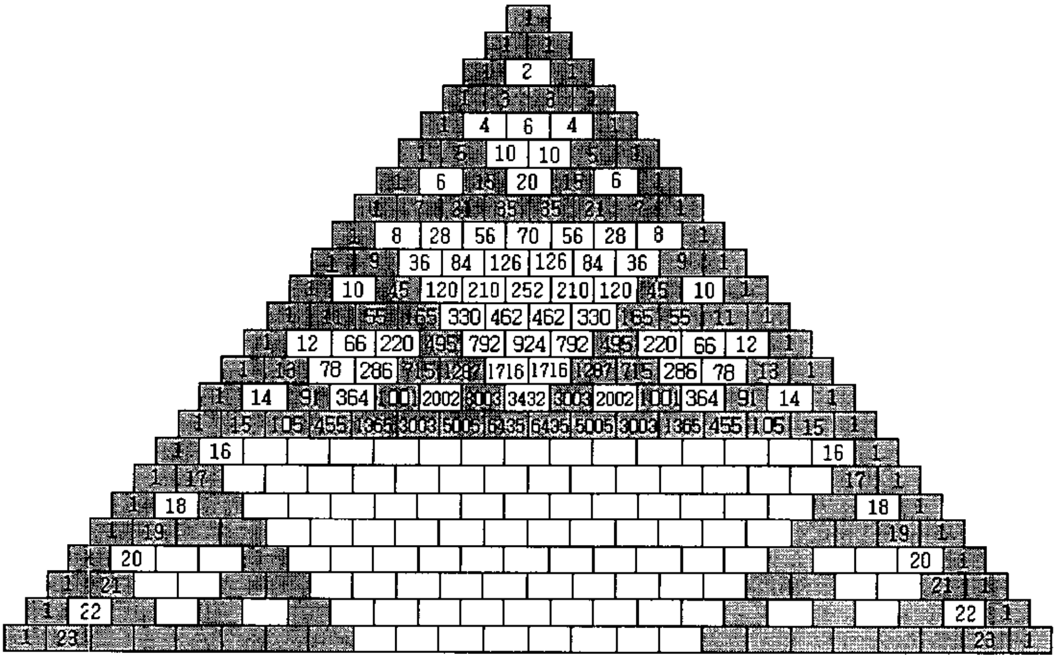
토막 1개 … 1가지	토막 2개 … 3가지
토막 3개 … 3가지	토막 4개 … 1가지

물음 : 위와 같은 식으로 전체 길이가 5가 되도록 만드는 방법을 구해봅시다.

IX. 산술 삼각형과 프랙탈 기하학

산술 삼각형을 이루는 각 수를 정삼각형모양으로 이루어져 있는 아래와 같은 각 칸에 써넣은 뒤 홀수가 있는 칸은 어둡게 칠하고 짝수인 칸은 그대로 놓아두면 프랙탈 기하학에서 다루는 가장 기본적인 시어핀스키 삼각형이 만들어진다. 시어핀스키 삼각형은 다음과 같이 만든다. 정삼각형에서 각 변의 중점을 이어 만든 네 개의 작은 삼각형에서 한가운데 있는

삼각형을 제외시킨다. 다음에 남아있는 세 개의 삼각형에 대하여 각 변의 중점을 이어 세 번째 크기의 삼각형을 만들고 나서 두 번째 크기의 삼각형의 한가운데 있는 삼각형을 제외시킨다. 그러면 모두 아홉 개의 삼각형이 남는데 그 각 삼각형에 대하여 앞의 과정을 되풀이하여 27개의 삼각형을 만든다. 이와 같은 일을 한없이 되풀이하였을 때 생기는 삼각형이 시어핀스키 삼각형이다.



<그림 15>

서어핀스키 삼각형에서 남아 있는 삼각형의 넓이의 합을 구하여 보자. 맨 처음의 삼각형의 넓이를 1이라고 할 때 남겨지는 삼각형들의 넓이를 차례로 쓰면 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{27}{64}$, … 로써 첫째 항이 1이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로 일반항은 $a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$이다. 따라서 시어핀스키 삼각형의 넓이는 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=0$이 된다.

그러면 이 삼각형에서 남게되는 변의 길이의 총합을 구하여 보자. 맨 처음의 삼각형의 한 변의 길이를 1이라 하여 각 단계마다 생기는 변의 길이를 차례로 나타내면 3, $3+3\cdot\frac{1}{2}$, $3+3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot3\cdot\frac{1}{4}$, $3+3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot3\cdot\frac{1}{4}+3\cdot9\cdot\frac{1}{8}$ …로 되어 시어핀스키 삼

각형의 모든 변의 길이의 합은 첫째 항을 빼고는 모든 항이 공비가 $\frac{3}{2}$인 무한 등비급수가 되어 발산, 곧 양의 무한대가 된다. 이를 통해서 넓이는 0이고 길이는 무한대인 도형을 볼 수 있게 된다.

앞의 그림은 앞서 말한 산술 삼각형에서 만든 시어핀스키 삼각형의 한 모델이다.

X. 산술 삼각형과 조화삼각형

조화삼각형이 산술(파스칼의) 삼각형이 여러 가지 점에서 비슷하다는 사실에서 라이프니쯔는 그런 비슷한 점들을 연구했다고 하는데 그 모습은 아래의 <그림 9>에 있다. 이는 산술 삼각형과 대비하여 생각해 볼 수 있는 것이라고 생각하여 소개한다.

산술 삼각형

$$
\begin{array}{lllllll}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\cdots & \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15\cdots & & \\
1 & 4 & 10 & 20\cdots & & & \\
1 & 5 & 15\cdots & & & & \\
1 & 6\cdots & & & & & \\
1\cdots & & & & & &
\end{array}
$$

조화삼각형

$$
\begin{array}{llllll}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6}\cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30}\cdots & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60}\cdots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60}\cdots & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30}\cdots & & & & \\
\frac{1}{6}\cdots & & & & &
\end{array}
$$

<그림 16>

산술 삼각형에서는 (첫째 열을 제외한) 각 값은 그 값 바로 아래 항과 그 아래항의 왼쪽의 항의 차로 되어 있다. 한편 조화삼각형에서는 (첫째 행을 제외한) 각 값은 그 값 바로 위 항과 그 위 항의 오른쪽의 항의 차로 되어 있다. 더구나 산술 삼각형에서 (첫째 행과 첫째 열을 제외한) 각 값은 그 바로 위 행의 항과 그 위 항의 왼쪽 항의 합이 되는 반면에, 조화삼각형에서는 각 값은 바로 아래 행의 항과 그 오른쪽 항의 합이 된다.

조화삼각형의 첫 번째 행의 급수는 발산하는 조화급수이고 그 밖의 다른 행의 급수는 수렴한다. 두 번째 행의 수는 각 삼각수의 역수의 $\frac{1}{2}$이고 라이프니쯔는 그 급수의 합이 1이 된다는 사실을 알고 있었다. 세 번째 행의 수는 각각 삼각뿔수(pyramidal numbers)

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

의 역수의 $\frac{1}{3}$이고 조화삼각형은 이 급수의 합이 $\frac{1}{2}$인 사실을 나타내고 있다. 네 번째 행의 수는 각 사면체에 대응하는 사차원 도형수의 역수의 $\frac{1}{4}$에 해당하고 이들 합은 $\frac{1}{3}$이 된다. 비는 그와 같이 계속된다. 게다가 조화삼각형의 n번째 대각선 위의 수는 그때 대응하는 산술 삼각형의 n번째의 대각선 위의 수의 역수를 n으로 나눈 것과 같다.

XI. 맺는말

지금까지 산술 삼각형의 구성원리에서 시작하여 그것이 쓰이는 여러 경우를 살펴보았다. 그런데 파스칼의 삼각형이라고 하지 않고 굳이 산술 삼각형이라고 한 까닭은 그와 대비되는 조화삼각형을 생각할 수 있기 때문이기도 하거니와 그것을 처음 발견하고 원리를 처음 이용한 것이 프랑스인이 아니라 중국이기도 하기 때문이다.

이 글에서 다룬 경우와 같은 소재인 산술 삼각형은 매우 쓰임새가 많은 것이다. 그것을 구성하는 원리가 많은 곳에 활용되기 때문이다. 이런 예와 같은 것들을 찾아 학교 현장에서 활용한다면 단원간 연계성이라든가, 원리에 입각한 교육이라든가, 내용별 유형화라든가 하는 것에 매우 도움이 될 것이라 생각한다.

참 고 문 헌

김용운, 김용국(1990). 수학사대전. 서울: 우성문화사.

오승재 (편역)(1997). 수학의 천재들. 서울: 경문사.

Bolt, B.(1997). *Mathematical activities*. Cambridge University Press.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (1994). *A history of mathematics*. New York: Wiley. 조윤동, 양영오(역) (2000). 수학의 역사. 서울: 경문사.

Eves, H.(1976). *An introduction to history of mathematics*. 이우영, 신항균(역) (1996). 수학사. 서울: 경문사.

錢寶琮 編.(1981). 中國數學史. 北京: 科學出版社. 川原秀城 옮김 (1990). 中國數學史. 東京: みすず書房.