

선형 탄성지반 위에 놓인 압축부재의 자유진동

Free Vibrations of Compressive Members Resting on Linear Elastic Foundation

이 병 구* · 李 光 范**
Lee, Byoung Koo · Li GuangFan
모 정 만*** · 신 성 철*
Mo, Jeong Man · Shin, Sung Chul

Abstract

The purpose of this study is to investigate both the fundamental and some higher natural frequencies and mode shapes of compressive members resting on the linear elastic foundation. The model of compressive member is based on the classical Bernoulli-Euler beam theory. The differential equation governing free vibrations of such members subjected to an axial load is derived and solved numerically for calculating the natural frequencies and mode shapes. The Improved Euler method is used to integrate the differential equation and the Determinant Search method combined with the Regula-Falsi method to determine the natural frequencies, respectively. In numerical examples, the hinged-hinged, hinged-clamped, clamped-hinged and clamped-clamped end constraints are considered. The convergence analysis is conducted for determining the available step size in the Improved Euler method. The validation of theories developed herein is also conducted by comparing the numerical results between this study and SAP 90. The non-dimensional frequency parameters are presented as the non-dimensional system parameters: section ratio, modulus parameter and load parameter. Also typical mode shapes are presented.

I. 서 론

압축부재는 기둥에서 보는 바와 같이 구조물에서 가장 기본이 되는 단위구조 중의 하나이며, 각종 주요 구조물에서 뼈대구조로 이용되고 있을 뿐

만 아니라 탄성지반 위에 부설되어 기초 구조물로서 많이 활용되고 있다. 기초 구조물이 동적 하중을 지지하는 경우에는 무엇보다도 기초 구조물의 자유진동 해석이 선행되어야 한다. 일반적으로 압축부재를 지지하고 있는 지반의 지반탄성계수는

* 원광대학교 토목환경공학과
** 中國 延邊大學校 土木建築學系
*** 남원 농업고등학교

키워드 : Determinant Search method, Improved Euler method, linear elastic foundation, mode shape, natural frequency, Regula-Falsi method, Winkler type foundation.

지반상황에 따라 등분포, 선형 분포, 포물선 분포, 정현 분포 등으로 변화하며¹⁾ 등분포 이외의 경우에는 지반탄성계수의 비균질성이 자유진동 해석에 필수적으로 고려되어야 한다.

지반과 구조물이 접하는 문제를 해결하기 위하여 Kerr²⁾는 지반의 물리적 거동을 일반적으로 표현할 수 있는 수학적 모형을 제안하였으며, Winkler, Hentern, Vlazov 모형 등은 그가 제안한 모형의 특별한 경우임을 보여 주고 있다. 그러나 일반적으로 공학에서 지반 위에 놓인 구조물을 해석할 때는 지반이 무한개의 스프링으로 구성되어 있다고 가정하는 Winkler모형으로 정의하여 지반-구조물 상호작용을 해석한다. 탄성지반 위에 놓인 부재의 동적 거동에 관한 연구는 많은 문헌들에서 찾아 볼 수 있으며 주요 문헌들을 간단히 고찰하면 다음과 같다.

Abbas와 Thomas³⁾는 탄성지반 위에 놓인 Timoshenko 보의 동적 안정성에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 전단변형효과를 고려한 보가 탄성지반 위에서 자유진동할 때에 지반과 보의 변수들이 보의 동적 안정영역에 미치는 영향에 관하여 고찰하였다. Pavlovic과 Wylie⁴⁾는 지반계수가 부재의 축을 따라서 변화하는 탄성지반 위에 놓인 기둥의 자유진동에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 하중이 재하되지 않은 무재하 기둥의 자유진동에 미치는 지반계수의 영향을 고찰하였다. Matsuda와 Sakiyama⁵⁾는 비균질 탄성지반 위에 놓인 보를 해석할 수 있는 근사해법을 제시하였다. 이 논문에서는 비균질 탄성지반을 계단길이 매우 짧은 연속적인 계단형 지반계수 (stepped foundation modulus)로 모형화하여 근사해법을 제시하였다. Kukla⁶⁾는 계단형 비균질 탄성지반 즉 지반계수가 서로 다른 여러 개의 지반층 위에 놓인 보의 자유진동에 대하여 연구하였다.

본 연구에서는 지반탄성계수의 비균질성을 선형으로 변화하는 지반탄성계수로 가정하여 자유진동을 지배하는 압축부재의 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 수치해석 적용예에서는 회전-회전, 회전-고

정, 고정-회전 및 고정-고정의 4가지 단부조건에 대하여 4개의 최저차 고유진동수(first four natural frequencies)를 산출하였다.

II. 수학적 모형

Fig. 1(a)는 비균질 탄성지반 위에 놓인 압축부재를 나타내고 있다. 이 그림에서 l 은 지간길이, P 는 압축을 "+"로 하는 축하중이고, K_x 는 축방향의 임의위치 x 에서 지반탄성계수를 나타내며 앞에서 설명한 바와 같이 비균질이다. 본 연구에서 탄성지반은 Winkler형 지반으로 가정하였다. Fig. 1(b)는 자유진동하는 압축부재의 전형적인 진동형을 나타내며 조화진동으로 가정하였다.

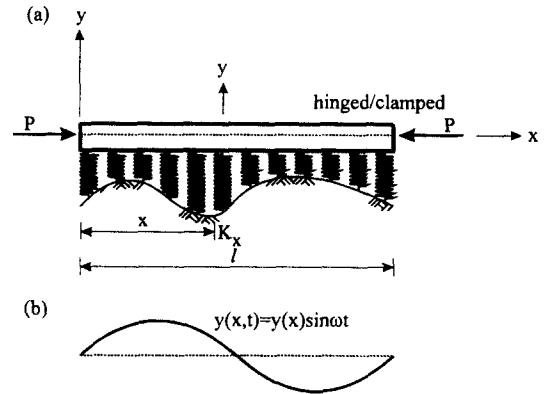


Fig. 1. (a) Compressive member on non-homogeneous foundation, (b) Typical mode shape

축하중을 받는 탄성지반 위에 놓인 압축부재의 조화진동을 Fig. 1(b)에 표시한 바와 같이 $y(x,t) = y(x)\sin\omega t$ 로 가정하면 식 (1)과 같이 Bernoulli-Euler 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이 유도되며⁷⁾, 이 조화진동식에서 $y(x,t)$ 는 동적 변위, $y(x)$ 는 진동형, ω 는 고유각진동수, t 는 시간이다.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} - m\omega^2 y + K_x y = 0 \dots\dots\dots (1)$$

식 (1)에서 EI는 휨 강성, P는 축하중, m은 압 축부재의 단위길이당 질량이고, K_x 는 지반탄성계수, $y=y(x)$ 이다.

Fig. 2는 본 연구에서 채택한 비균질 지반의 지반탄성계수의 분포를 나타내며, 이 연구에서는 식 (2)와 같은 선형 지반탄성계수식을 채택하였다.

$$K_x = K_a[(\alpha-1)\frac{x}{l} + 1] \dots\dots\dots(2)$$

여기서,

$$\alpha = \frac{K_b}{K_a} \dots\dots\dots(3)$$

식 (3)에서 K_a , K_b 는 각각 $x=0$, $x=l$ 에서 지반탄성계수이며 따라서 α 는 지반탄성계수의 비균질 정도를 나타내주는 무차원 상수이다.

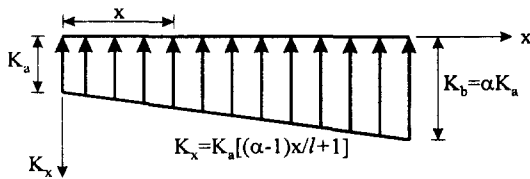


Fig. 2. Linear elastic foundation modulus

식 (1)에 식 (2)를 대입하면 선형 지반탄성계수를 갖는 지반 위에 놓인 축하중을 받는 압축부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 식 (4)와 같이 얻을 수 있다.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} - m\omega^2 y + K_a[(\alpha-1)\frac{x}{l} + 1]y = 0 \dots\dots\dots(4)$$

회전지점 ($x=0$ 또는 $x=l$)에서는 처짐 (y)과 휨 모멘트 ($EI d^2 y/dx^2$)가 발생하지 않으므로 다음의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$y = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

마찬가지 방법으로 고정지점 ($x=0$ 또는 $x=l$)에서 처짐 (y)과 회전각 (dy/dx)이 발생하지 않으므로 그 경계조건은 다음과 같이 표시된다.

$$y = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l} \dots\dots\dots(9)$$

$$\eta = \frac{y}{l} \dots\dots\dots(10)$$

$$u_a = \frac{K_a l^4}{\pi^4 EI} \dots\dots\dots(11)$$

$$p = \frac{P l^2}{\pi^2 EI} \dots\dots\dots(12)$$

무차원 변수들인 식 (9)-(12)를 식 (4)에 적용시키고 정리하면 선형 지반탄성계수를 갖는 비균질지반 위에 놓인 축하중을 받는 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식이 유도된다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -\pi^2 p \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + [c_i^2 - \pi^4 u_a \{(\alpha-1)\xi + 1\}] \eta \dots\dots\dots(13)$$

식 (13)에서 c_i 는 다음과 같이 정의되는 무차원 고유진동수이다

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{m/(EI)}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \dots\dots\dots(14)$$

식 (14)에서 i 는 모드번호(mode number)이다.

마찬가지로 무차원 변수들인 식 (9), (10)을 경계조건인 식 (5)~(8)에 적용시키면 다음과 같이 회전지점과 고정지점의 무차원 경계조건식들이 유도된다.

· 회전지점 ($\xi=0$ 또는 $\xi=1$)

$$\eta=0 \dots\dots\dots(15)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=0 \dots\dots\dots(16)$$

· 고정지점 ($\xi=0$ 또는 $\xi=1$)

$$\eta=0 \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{dz}{d\xi}=0 \dots\dots\dots(18)$$

III. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서 무차원 미분방정식 (13)에 무차원 경계조건식들인 식 (17)~(18)을 적용하면 무차원 고유진동수 c_i 와 진동형 $\eta=\eta(\xi)$ 를 산출할 수 있다. 미분방정식을 수치적분하기 위하여 Improved Euler 법⁸⁾을 이용하고, 미분방정식의 고유치인 c_i 값을 구하기 위하여 Regula-Falsi 법⁸⁾과 결합한 행렬값 탐사법⁹⁾을 이용하였다.

수치해석 예를 보이기 전에 먼저 식 (13)의 상미분방정식을 수치적분법인 Improved Euler 법에 적용하기 위하여 $u_a=10$, $\alpha=5$, $p=1$, 회전-회전인 압축부재에 대하여 수렴해석을 실시하였다. Fig. 3은 식 (13)의 상미분방정식을 수치적분에서 사용하는 단계길이(step size) $\Delta\xi$ 의 역수인 $n(=1/\Delta\xi)$ 값의 변화에 따라 무차원 고유진동수인 c_i 값이 수렴해 가는 과정을 나타낸 그림이다. 이 그림에서 보는 바와 같이 c_1 과 c_2 값은 n 값이 증가함에 따라서 증가하다가 정점을 보인 후에 다시 감소하기 시작하여 $n=16$ 에서부터 수렴축에 접근하는 안정성 감소에 들어가고, c_3 값은 n 값이

22일 때부터 안정성 감소에 들어가며, c_4 값은 n 값이 28일 때부터 안정성 감소에 들어가는 것을 알 수 있다.

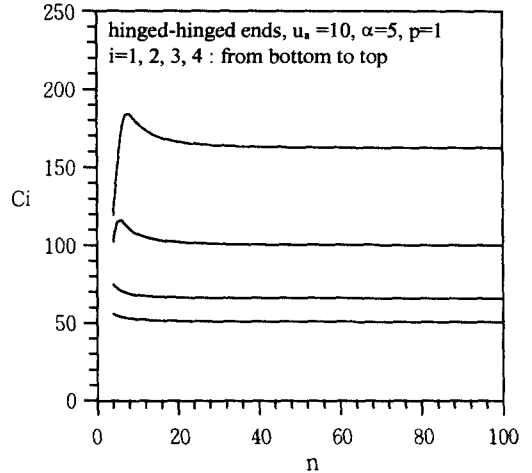


fig. 3. Convergence analysis

Fig. 3의 결과들에서 적합한 단계길이 $\Delta\xi$ 의 크기를 찾기 위하여 $n(=1/\Delta\xi)$ 값이 각각 10, 25, 50, 75, 100일 때의 c_i 값들을 Table 1에 나타내었다. 여기서 상대오차(%)는 $n=500$ 즉 $\Delta\xi=0.002$ 에 대한 상대오차이다. 이 표에서 보는 바와 같이 고차모드에서 보다 저차 모드에서 수렴속도가 빠르고 n 값이 75보다 클 때 상대오차는 0.1%미만으로 수렴값에 근접한다. 따라서 식 (13)의 상미분방정식을 Improved Euler method에 적용하기 위해서는 $\Delta\xi$ 를 0.0133($=1/75$)이하로 하는 것이 바람직

Table 1. Convergence analysis by step size $\Delta\xi$

n	$\Delta\xi$	frequency parameter, c_i							
		c_1	error (%)	c_2	error (%)	c_3	error (%)	c_4	error (%)
10	0.10	52.41	3.18	67.93	3.17	107.2	7.21	178.4	9.95
25	0.04	51.07	0.70	66.17	0.62	101.0	1.26	164.2	1.53
50	0.02	50.85	0.11	65.92	0.13	100.2	0.24	162.7	0.28
75	0.01	50.81	0.05	65.87	0.04	100.1	0.08	162.4	0.09
100	0.01	50.80	0.02	65.86	0.02	100.0	0.04	162.3	0.04
500	0.00	50.79	0.00	65.85	0.00	100.0	0.00	162.2	0.00

Table 2. Comparisons of c_i between this study and SAP 90

end constraints and u_a, α, p	data source	frequency parameter, c_i			
		i=1	i=2	i=3	i=4
hinged-hinged $u_a=10, \alpha=1, p=0$	this study	32.7	50.3	94.2	161.
	SAP 90	32.5	51.0	94.7	159.
hinged-clamped $u_a=10, \alpha=20, p=0$	this study	84.2	114.	147.	205.
	SAP 90	84.8	114.	150.	202.
clamped-clamped $u_a=10, \alpha=0, p=0$	this study	31.3	65.5	123.	201.
	SAP 90	30.4	67.7	125.	199.

합을 알 수 있다. 그러나 본 연구에서는 수치해석

해의 정도를 강화하기 위하여 $\Delta\xi = 0.01$ 즉 $n=100$ 으로 하여 수치해석하였다.

본 연구결과를 검증하기 위하여 이 연구의 결과와 유한요소해인 SAP 90의 결과를 Table 2에서 비교하였다. 이 표로부터 본 연구결과와 SAP 90의 결과가 아주 우수하게 근접함을 알 수 있다.

Fig. 4는 $u_a=10, p=1$ 인 경우에 무차원 고유진동수 c_i 와 단면비 α 사이의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림에 보인 바와 같이 α 값이 증가할수록 c_i 값은 모두 증가하고 있다. α 값이 약 3이하에서는 c_i 에 미치는 영향이 비교적 크지만 3보다

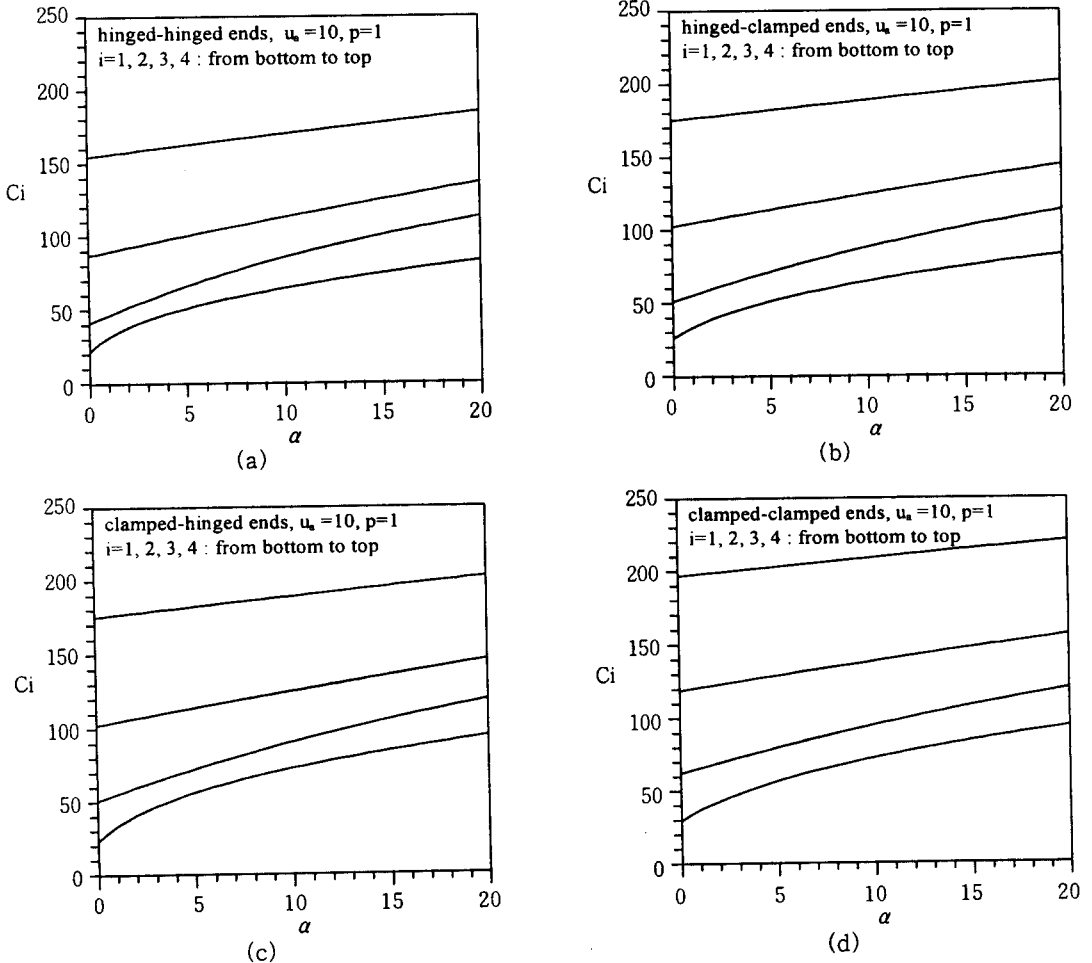


Fig. 4. c_i versus α curves

크게 되면 그 영향은 다소 감소하는 것을 알 수 있다. 또한 고차모드에서 보다 저차 모드에서 특히 제 1모드에서 α 값의 영향이 더 큰 것을 알 수 있으며 고차모드에서는 $c_i - \alpha$ 곡선은 거의 선형관계를 나타낸다.

Fig. 5는 $c_i - \alpha$ 곡선들의 단부조건들 사이의 관계를 고찰하기 위하여 Fig. 4.(a)-(d)에서 제 1모드만을 한 그림에 나타낸 것이다. 이 그림을 살펴보면 α 값이 커짐에 따라서 4개의 각기 다른 곡선들은 두 개의 곡선 군으로 수렴되는 것을 알 수 있다. 이는 c_i 값은 α 값이 커짐에 따라서 단부조건

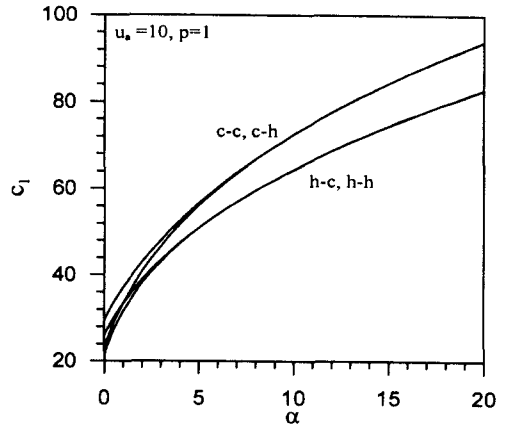


Fig. 5. c_1 versus α curves by end constraint

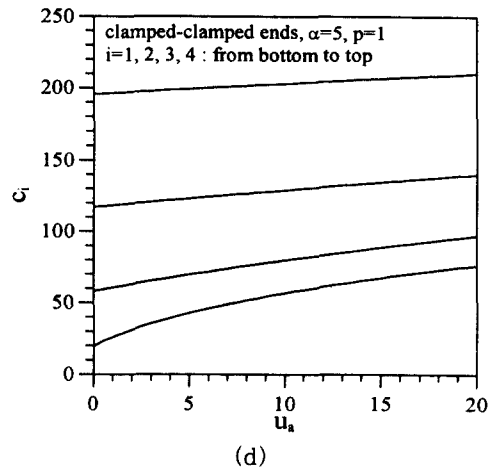
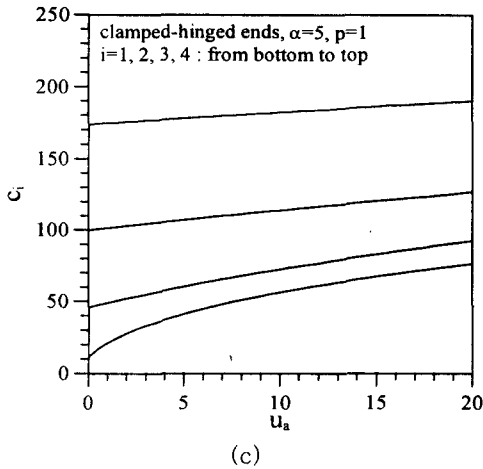
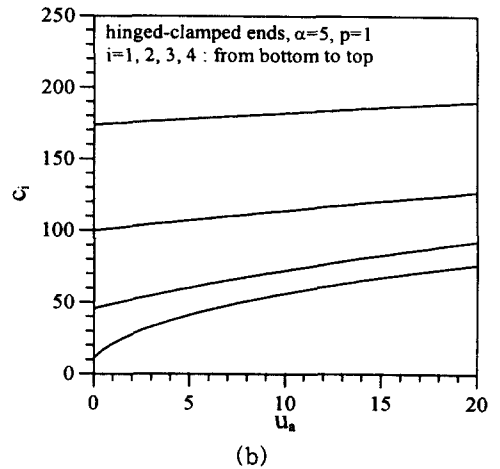
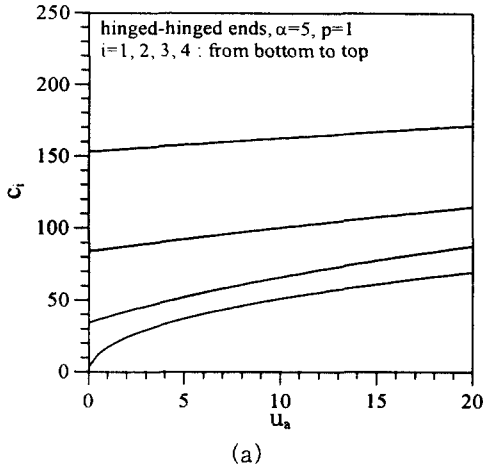


Fig. 6. c_i versus u_a curves

에 의해 지배되기보다는 α 값에 지배되어 회전단부와 고정단부를 갖는 두 개의 $c_i - \alpha$ 곡선군으로 나누어지는 것을 의미한다. 그러나 이 그림에는 나타나지 않았지만 제 3모드 이상에서는 이상과 같은 자유진동 특성은 나타나지 않고 있어서 α 값보다는 단부조건이 c_i 값을 지배하는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 5에서 단부조건이 회전-고정과 고정-회전일 때 두개의 $c_i - \alpha$ 곡선은 거의 일치하는 특성을 보이고 있으며 이는 $c_i - \alpha$ 곡선은 단부조건보다는 탄성지반의 영향이 더 큰 것을 의미한다.

Fig. 6은 $\alpha=5, p=1$ 인 경우에 c_i 와 u_a 사이의 관계를 그림에 나타낸 것이며 u_a 값이 증가할수록 c_i 값은 모두 증가하고 있다. 이 경우에서도 Fig. 4와 유사한 경향을 나타내어 u_a 값이 약 3이하에서는 c_i 에 미치는 영향이 비교적 크지만 3보다 크게 되면 그 영향은 다소 감소하는 것을 알 수 있다. 또한 고차모드에서 보다 저차 모드에서 특히 제 1모드에서 u_a 값의 영향이 더 큰 것을 알 수 있으며 고차모드에서는 $c_i - u_a$ 곡선은 거의 선형으로 나타난다.

Fig. 7은 $u_a=10, \alpha=0$ 인 경우에 c_i 와 p 사이의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림으로부터 p 가 증가할수록 c_i 값은 감소하는 것을 알 수 있다. 따라서 c_i 값이 0이 되는 부재 종방향축의 p 값

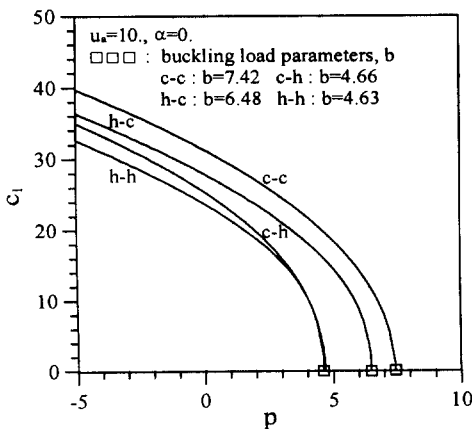


Fig. 7. c_1 versus p curves

이 무차원 좌굴하중 $b = B^2 / (\pi^2 EI)$ 가 된다. 여기서 B 는 좌굴하중이다. 이 무차원 좌굴하중 b 값을 Fig. 7의 상부에 단부조건별로 정리하여 놓았으며 단부조건이 고정-고정일 때 무차원 좌굴하중 b 값이 가장 크고 단부조건이 회전-회전일 때 제일 작다. 이 그림에 나타낸 바와 같이 다른 조건이 같을 때 c_i 값의 크기는 회전-회전, 고정-회전, 회전-고정, 고정-고정 순서로 큰 것을 알 수 있다.

Fig. 8(a)는 $u_a=10, p=0$ 에 대하여 $\alpha=0, 1, 10$ 의 세 가지 α 값에 대한 진동형을 나타낸 그림이다. 이 그림에서처럼 α 값이 진동형에 미치는 영향은 매우 커서 α 값에 따라 진동형의 최대진폭의 위치가 크게 변화하며, 즉 α 값이 1일 때 진동형 최대진폭의 위치는 경간의 중앙에 있고 α 값이 0일 때 진동형 최대진폭의 위치는 중앙에 가까운 오른쪽에 있으며 반면 α 값이 10일 때 진동형 최대진폭의 위치는 중앙에 멀리 떨어진 왼쪽에 있다는 사실을 알 수 있다. Fig. 8(b)는 $\alpha=10, p=0$ 에 대하여 $u_a=0, 5, 10$ 의 세 가지 u_a 값에 대한 진동형을 나타낸 그림이다. 마찬가지로 u_a 값이 진동형의 진동폭에 미치는 영향이 매우 커서 u_a 값에 따라 진동형의 최대진폭의 위치가 크게 변화하며, 즉 u_a 값이 0일 때 진동형 최대진폭의 위치는 경간의 중앙에 가까운 왼쪽에 있고 u_a 값이 0보다 클

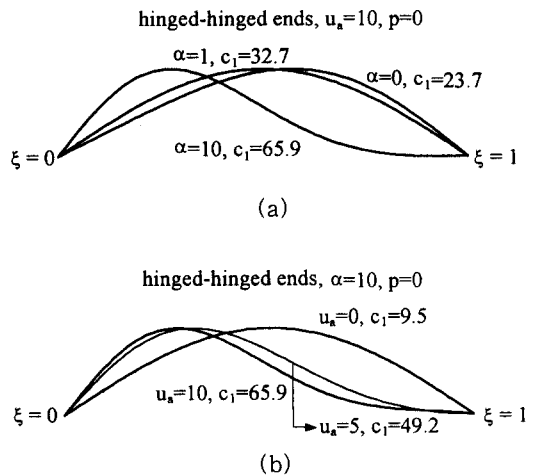


Fig. 8. Effects of α and u_a on mode shape

때 크면 클수록 진동형 최대진폭의 위치는 왼쪽 단부와 가깝다는 것을 알 수 있다.

IV. 결 론

본 논문은 비균질 탄성지반 위에 놓인 압축부재의 자유진동에 관한 연구이다. 지반탄성계수의 비균질성을 선형으로 채택하여 Bernoulli-Euler 부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 무차원 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 단계길이 Δx 의 크기가 수치해석 결과의 정밀도에 주는 영향을 분석하였고, 본 연구 결과와 SAP 90의 결과가 매우 잘 일치하여 이 연구의 타당성을 검증할 수 있었다. 실제 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정, 고정-회전, 고정-고정의 4가지 단부조건에 대하여 α , u_a , p 가 c_1 에 미치는 영향을 그림에 나타내었으며 α , u_a 값이 진동형에 미치는 영향을 분석하였다.

참 고 문 헌

1. Selvaduari, A.P.(1979), Elastic Analysis of Soil Foundation Interaction, Elsevier, pp. 13~42.
2. Kerr, A.D.(1964), Elastic Viscoelastic Foundation Model, Journal of Applied Mechanics, Vol. 31, pp. 491~498.
3. Abbas, B.A. and Thomas, J.(1978), Dynamic

- Stability of Timoshenko Beams resting on an Elastic Foundations, Journal of Sound and Vibration, Vol. 60, pp. 33~44.
4. Pavlovic, M.V. and Wylie, G.B.(1983), Vibration of Beams on Non-Homogeneous Elastic Foundation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 11, pp. 797~808.
5. Matsuda, H. and Sakiyama, T.(1987), Analysis of Beams on Non-Homogeneous Elastic Foundation, Computers & Structures, Vol. 25, pp. 941~946.
6. Kukla, S.(1991), Free Vibration of a Beam Supported on a Stepped Elastic Foundation. Journal of Sound and Vibration, Vol. 149, pp. 259~265.
7. Timoshenko, S.P., Young, D.H. and Weaver W. Jr.(1974), Vibration Problems in Engineering. John Wiley & Sons, pp. 453~459.
8. Al-Khafaji, A.W. and Tooley, J.R.(1986), Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Reinhart and Wiston.
9. Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W.(2000), Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Sections, International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp. 4871~4891.