韓國經營科學會誌
第25卷 第4號
2000年 12月

퇴화최적해에서 일반감도분석*

박찬규** · 김우제*** · 박순달****

Generalized Sensitivity Analysis at a Degenerate Optimal Solution*

Chan-Kyoo Park** · Woo-Je Kim*** · Soondal Park****

■ Abstract ■

The methods of sensitivity analysis for linear programming can be classified in two types: sensitivity analysis using an optimal solution, and sensitivity analysis using an approximate optimal solution. As the methods of sensitivity analysis using an optimal solution, there are three sensitivity analysis methods: sensitivity analysis using an optimal basis, positive sensitivity analysis, and optimal partition sensitivity analysis. Since they may provide different characteristic regions under degeneracy, it is not easy to understand and apply the results of the three methods.

In this paper, we propose a generalized sensitivity analysis that can integrate the three existing methods of sensitivity analysis. When a right-hand side or a cost coefficient is perturbed, the generalized sensitivity analysis gives different characteristic regions according to the controlling index set that denotes the set of variables allowed to have positive values in optimal solutions to the perturbed problem. We show that the three existing sensitivity analysis methods are special cases of the generalized sensitivity analysis, and present some properties of the generalized sensitivity analysis.

1. 서 론

선형계획법 문제에서 감도분석은 여러 가지 상황에서 의사 결정에 보다 풍부한 정보를 제공한다. 예를 들어 가용 자재량이 변하거나 생산 활동의 비용이 변하였을 경우 기존의 의사결정에 미치는 영

* 본 연구는 한국과학재단 특정기초연구사업(과제번호 98-0200-07-01-2)의 지원을 받음.
** 한국전산원 정보화평가분석단
*** 대전대학교 산업공학과
**** 서울대학교 산업공학과

향을 평가하고 변화된 환경에서 최적 의사결정을 쉽게 구하는 문제에 감도분석이 적용된다. 또한 새로운 제약 조건이 추가되거나 새로운 생산활동이 고려되는 상황에서 기존의 의사결정이 받는 영향을 분석하고 새로운 문제에서의 최적결정을 도출해 내기 위해 감도분석 방법이 사용된다[1].

선형계획법의 해법으로 단체법을 사용하는 경우 감도분석 방법에 관한 많은 연구가 있었다[6, 8]. 단체법은 이웃한 기저를 찾아가면서 최적기저에 도달하므로 단체법에서의 감도분석은 최적기저를 사용하여 이루어졌다. 최적기저를 이용한 감도분석은 나름대로 경제적인 의미가 있어서 많이 사용되어 왔고 대부분의 상용 패키지들도 이러한 방식의 감도분석 결과를 제공하고 있다. 그러나 최적기저를 사용한 감도분석은 최적해가 유일하지 않거나 퇴화가 일어나는 경우에는 어떤 최적기저를 사용하느냐에 따라 상이한 감도분석 범위를 제공하게 된다[7, 10]. 이는 최적기저를 이용한 감도분석 범위가 실제 최적성이 유지될 수 있는 데이터의 변화 범위의 일부분이 되기 때문인데, 현실적으로 대부분의 선형계획문제에서 퇴화가 일어난다는 사실을 감안하면 이러한 점은 단체법을 사용한 감도분석의 효용성을 저하시킨다. 그럼에도 불구하고 최적기저를 이용한 감도분석 방법은 적은 양의 부가적인 계산을 통해 감도분석을 수행할 수 있다는 장점이 있어 아직도 감도분석이라 함은 주로 최적기저를 이용한 감도분석을 생각할 정도로 많이 사용되고 있다[10].

한편, 선형계획법의 해법으로 내부점법을 사용하는 경우는 단체법의 경우와 상황이 달라진다. 단체법이 가능해 집합의 정점최적해를 구하는 것과는 다르게 내부점법은 가능해 집합의 내부를 이동해 가면서 최적해에 수렴한다. 내부점법에서 유지하는 해는 최적면의 내부해로 수렴하므로 내부점법을 통해 구한 해는 정점해가 아닌 비정점최적해로 수렴하는 해이다. 이는 단체법의 최적기저를 이용한 감도분석 방법이 내부점법에 그대로 적용될 수 없음을 의미한다.

내부점법에 의해 구한 비정점최적해에서의 감도분석은 양병학[4, 16]에 의해 처음 시작되었다. 이보다 앞서 성기석과 박순달[3]은 행렬게임에서의 감도분석을 다루면서 2 가지 감도분석 개념을 제안하였다. 양병학[4]은 이러한 개념을 선형계획법의 감도분석에 적용하여 전통적인 최적기저를 이용한 감도분석과 최적해에서 0인 변수는 0으로 비영인 변수는 비영으로 유지되는 감도분석인 양가감도분석을 정의하고 비정점최적해에 양가감도분석 개념을 적용하였다. 또 다른 내부점법에서의 감도분석은 Adler & Monteiro[5]가 최적분할을 이용한 다항시간 선형계획법 매개변수계획법(parametric programming)을 발표하면서 시작되었다. 최적분할은 최적해에서 그 값이 항상 0이 되는 변수와 그렇지 않은 변수로 변수 집합을 분할하는 것을 말한다. Monteiro & Mehrotra[13]와 Roos 등[15]은 최적분할을 이용한 감도분석 방법을 발전시켜 임의의 최적해가 주어진 경우 감도분석을 수행하는 방법을 제안하였다.

한편, 내부점법에서 사용될 수 있는 실용적인 감도분석 방법으로 ε-감도분석 방법이 Kim 등[11]에 의해 제안되었다. 내부점법은 현실적으로 정확한 최적해가 아닌 최적면에 매우 근접한 해를 찾는다. 따라서, 비정점최적해에서의 감도분석 방법이나 최적분할을 이용한 감도분석을 바로 적용할 수는 없고 정확한 최적해 또는 최적분할을 구하는 부가적인 과정이 필요하다. ε-감도분석은 이러한 관찰에 착안하여 ε-최적해라는 근사최적해 개념을 도입하고 주어진 ε-최적해에서 감도분석을 수행할 수 있도록 개발된 방법이다. ε-감도분석은 내부점법에서 적은 계산으로 감도분석을 수행할 수 있는 실용적인 감도분석 기법으로 비퇴화인 경우에는 최적기저를 이용한 감도분석에 수렴함이 규명된 바 있다[11].

이와 같이 감도분석 방법들은 최적해에서 수행되는 감도분석과 근사최적해에서 수행되는 감도분석으로 크게 2 가지 범주로 분류될 수 있다. 최적기저를 이용한 감도분석, 양가감도분석, 최적분할

을 이용한 감도분석은 최적해에서 수행되는 감도분석이고, ε-감도분석은 근사최적해에서 수행되는 감도분석이다. 최적해에서 수행되는 감도분석들은 비퇴화인 경우에는 서로 동일한 감도분석 결과를 제공하지만 퇴화가 발생하는 경우는 서로 다른 감도분석 범위를 제공한다. 따라서, 본 연구는 퇴화가 일어나는 일반적인 선형계획법에서 최적해를 이용한 감도분석 방법들의 상호 관계를 다루게 된다.

본 연구에서는 최적해에서 수행되는 감도분석들을 보다 일반적인 감도분석 개념으로 통합하고자 한다. 최적해에서 수행되는 세 가지 상이한 감도분석은 감도분석의 개념을 오히려 혼동스럽게 만드는 결과를 낳기도 하므로 감도분석에 대한 통합적 이해를 위한 일반화된 개념 도입이 필요하다. 본 연구는 이를 위해 일반감도분석을 제안하고 기존의 세 가지 감도분석 방법들은 일반감도분석의 특수한 경우임을 보임으로써, 선형계획법의 감도분석을 새로운 관점에서 볼 수 있게 한다. 또한, 일반감도분석의 몇 가지 특성을 제시하여 일반감도분석에 대한 이해를 돕고자 한다.

2. 여러 가지 감도분석 방법들

먼저 본 연구에서 다루게 될 여러 가지 감도분석 방법들의 정의를 분명히 하도록 하자. 본 연구에서는 다음과 같은 표준선형계획법 문제 (LP)를 다룬다. 논의의 편의를 위해 $rank(A) = m$이라 가정한다.

$$(P):\ \begin{array}{ll} Min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D):\ \begin{array}{ll} Max & b^T y \\ s.t. & A^T y + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

단, A는 $m \times n$차원 행렬이고 b는 m차원, c는 n차원 벡터이다.

(P)와 (D)는 모두 가능해(feasible solution)를 갖는다고 가정한다. 목적함수 계수에 대한 감도분석을 위해 목적함수 계수 c_k가 $c_k + \theta$로 바뀐 선형계획법 문제 (LP_θ)를 다음과 같이 나타내자.

$$(P_\theta):\ \begin{array}{ll} Min & (c + \theta e_k)^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$(D_\theta):\ \begin{array}{ll} Max & b^T y \\ s.t. & A^T y + s = c + \theta e_k \\ & s \geq 0 \end{array}$$

단, e_k는 n차원 벡터로 k번째 요소만 1이고 나머지 요소는 모두 0인 벡터이다.

우변상수 b_h가 변화하는 경우 변화된 선형계획법문제 (LP_γ)를 다음과 같이 나타내기로 하자.

$$(P_\gamma):\ \begin{array}{ll} Min & c^T x \\ s.t. & Ax = b + \gamma e_h \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$(D_\gamma):\ \begin{array}{ll} Max & (b + \gamma e_h)^T y \\ s.t. & A^T y + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

단, e_h는 m차원 열벡터로 h번째 요소만 1이고 나머지 요소는 모두 0인 벡터이다.

본 연구에서 다루게 될 감도분석 방법으로는 기본감도분석, 양가감도분석, 최적분할 감도분석이 있고 다음 절에서는 세 가지 감도분석을 통합한 일반감도분석의 개념을 다룬다. 각 감도분석의 정의를 보기 전에 사용할 기호들을 알아보자. 행렬 A의 (i,j)번째 요소는 a_{ij}로 표시하고, $A_{i\cdot}$는 A의 i번째 행을, $A_{\cdot j}$는 A의 j번째 열을 의미한다. 임의의 벡터 x에서 x_j는 x의 j번째 요소를 의미하고 행렬 H의 (i,j) 번째 요소는 H_{ij}로 표시하기로 하자. B를 임의의 변수 지수(index) 집합이라 할 때, x_B는 벡터 x에서 B에 있는 지수의 요소만 뽑아 낸 x의 부분벡터(subvector)를 나타내고 A_B는 행렬 A에서 B에 있는 지수의 열들만으로 구성되는 A의 부분행렬(submatrix)을 나타낸다고 하자.

기저변수의 지수집합을 B라 하고 비기저변수의 지수집합을 N이라 할 때, $(x_B^T, x_N^T)^T = ((A_B^{-1}b)^T, 0)^T$가 (P)의 최적해이면 A_B를 원최적기저(primal-optimal basis)라 한다. 또한, $y = A_B^{-T}c_B$, $(s_B^T, s_N^T)^T = (0, c_N^T - y^T A_N)^T$인 (y, s)가 (D)의 최적해이면 A_B을 쌍대최적기저(dual-optimal basis)라 한다. A_B가 원최적기저이고 쌍대최적기저이면 A_B을 최적기저(optimal basis)라 한다.

원최적기저 A_B와 쌍대최적기저 A_B에 대해 $Tc_k(A_B)$, $Tb_h(A_B)$를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} Tc_k(A_B) = \ & \{\theta | A_B^T y = c_B + \theta(e_k)_B, \\ & A_N^T y + s_N = c_N + \theta(e_k)_N, \\ & s_B = 0, s_N \geq 0\} \end{aligned}$$

$$Tb_h(A_B) = \{\gamma | x_B = A_B^{-1}(b + \gamma e_h) \geq 0, x_N = 0\}$$

즉, $Tc_k(A_B)$는 원최적기저 A_B가 (LP_θ)의 최적기저가 되는 θ의 변화 범위를 말한다. 마찬가지로 $Tb_h(A_B)$는 쌍대최적기저 A_B가 (LP_γ)의 최적기저가 되는 γ의 변화 범위를 의미한다. 최적기저를 이용한 감도분석(이후부터 기본감도분석이라 부르기로 한다)은 다음과 같이 정의된다.

[정의 2.1] 기본감도분석(Basic Sensitivity Analysis ; BSA)

B가 기저변수의 지수집합이고 A_B가 (LP)의 최적기저라 하자. 최적기저 A_B가 (LP_θ)의 최적기저로 유지되는 θ의 범위를 구하는 것을 목적함수 계수 c_k에 대한 기본감도분석이라 한다. 또한, 최적기저 A_B가 (LP_γ)의 최적기저로 유지되는 γ의 범위를 구하는 것을 우변상수 b_h에 대한 기본감도분석이라 한다. 이 때, θ의 범위는 $Tc_k(A_B)$로, γ의 범위는 $Tb_h(A_B)$로 표현된다.

기본감도분석은 단체법에서 최종적으로 구해진 최적기저를 이용하여 감도분석을 하는 전통적인 감도분석을 말한다. 기본감도분석을 수행하기 위해서는 반드시 최적기저가 주어져 있어야 한다. 이는 기본감도분석이 정점최적해에서만 수행될 수 있음을 의미한다.

양가감도분석의 정의를 위해 임의의 벡터 x에서 $\eta(x)$와 $\bar{\eta}(x)$을 각각 다음과 같이 정의하자. $\eta(x)$는 x에서 비영인 요소의 지수 집합이고 $\bar{\eta}(x)$는 0인 요소의 지수 집합이다.

$$\eta(x) = \{j : x_j > 0\}, \quad \bar{\eta}(x) = \{j : x_j = 0\}$$

[정의 2.2] 양가감도분석(Positive Sensitivity Analysis ; PSA)

(P)의 최적해 x^*에서 목적함수 계수 c_k에 대한 양가감도분석은 x^*에서 0인 변수는 0으로 비영인 변수는 비음으로 유지하는 (P_θ)의 최적해가 존재하게 하는 θ의 범위를 구하는 것이고 θ의 범위를 $Yc_k(x^*)$로 나타내기로 한다. (P)의 최적해 x^*에서 우변상수 b_h에 대한 양가감도분석은 x^*에서 0인 변수는 0으로 비영인 변수는 비음으로 유지하는 (P_γ)의 최적해가 존재하게 하는 γ의 범위를 구하는 것이고 γ의 범위를 $Yb_h(x^*)$로 나타내기로 한다.

양가감도분석은 임의의 최적해 x^*가 주어지면 수행할 수 있는데 개념적으로 $\eta(x^*)$와 $\bar{\eta}(x^*)$가 유지될 수 있는 θ나 γ의 범위를 구한다. 양가감도분석은 최적해 x^*가 정점최적해뿐만 아니라 비정점최적해인 경우에도 적용될 수 있는 감도분석이다. 양가감도분석이 최적해 x^*의 $\eta(x^*)$와 $\bar{\eta}(x^*)$를 유지하는 것은 매우 유용한 경우가 있다. 예를 들어, 제품의 최적 생산량을 결정하는 문제에서 기존에 생산하던 제품은 계속 생산하고 생산하지 않던 제품은 계속 생산하지 않도록 하는 생산비용의 변화량이나 가용자원의 변화량을 알아보고자 할 때 양가감도분석이 사용될 수 있다. 최적해 x^*에서 양가감도분석 범위는 각각 다음과 같이 계산된다.

$$Yc_k(x^*) = \{\theta \mid \begin{bmatrix} A_\sigma^T \\ A_{\bar{\sigma}}^T \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ s_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix} = c + \theta e_k, \quad s_\sigma = 0,\ s_{\bar{\sigma}} \geq 0\} \tag{2.1}$$

$$Yb_h(x^*) = \{\gamma \mid A_\sigma x_\sigma = b + \gamma e_h,\ x_\sigma \geq 0,\ x_{\bar{\sigma}} = 0\} \tag{2.2}$$

단, $\sigma = \eta(x^*)$, $\bar{\sigma} = \bar{\eta}(x^*)$이다.

한편, 최적분할 감도분석의 정의를 살펴보기 전에 최적분할(optimal partition)의 정의를 먼저 알아보자. (P)의 최적해 집합을 $\boldsymbol{P}^*$, (D)의 최적해 집합을 $\boldsymbol{D}^*$라 하면, 최적분할 $\pi = (B, N)$는 다음과 같이 정의된다.

$$B = \bigcup_{x \in P^*} \eta(x^*),\quad N = \bigcup_{(y,s) \in D^*} \eta(s^*)$$

기존의 연구결과에 의하면 $B \cap N = \emptyset$이고 $B \cup N = \{1, 2, \cdots, n\}$이므로 최적분할은 변수의 지수 집합을 2개로 분할(partition)한다[9]. 또한, (LP)의 최적해 (x^*, y^*, s^*)가 $x^* + s^* > 0$을 만족하면 (x^*, y^*, s^*)를 강상보최적해라 한다. (x^*, y^*, s^*)가 강상보최적해이면, $\eta(x^*) = B$이고 $\eta(s^*) = N$임이 알려져 있고, (LP)에는 반드시 강상보최적해가 하나 이상 존재함이 증명되어 있다[9]. 최적분할 감도분석의 정의는 다음과 같다.

[정의 2.3] 최적분할 감도분석(Optimal partition Sensitivity Analysis ; OSA)

$\pi = (B, N)$이 (LP)의 최적분할이라 할 때 (LP_θ)의 최적분할이 π로 유지되는 θ의 변화 범위를 구하는 것을 목적함수 계수 c_k에 대한 최적분할 감도분석이라 하고 θ의 범위를 $Oc_k(B, N)$으로 나타내기로 한다. 또한, (LP_γ)의 최적분할이 π로 유지되는 γ의 변화 범위를 구하는 것을 우변상수 b_h에 대한 최적분할 감도분석이라 하고 γ의 범위를 $Ob_h(B, N)$으로 나타내기로 한다.

최적분할 감도분석은 개념적으로 최적분할이 유지되는 목적함수 계수나 우변상수의 변화 범위를 구하는 것으로 볼 수 있다. 기하학적인 관점에서 최적분할은 최적면을 결정하고 역으로 최적면이 주어지면 최적분할이 결정되므로 목적함수 계수에 대한 최적분할 감도분석은 (P)의 최적면이 유지되는 θ나 γ의 변화 범위를 구하는 것이다. 최적분할 감도분석을 사용하기 위해서는 최적분할이 주어져야 하는데 일반적으로 최적분할은 최적해보다 구하는 것이 쉽지 않다. 또한, 최적분할 감도분석 범위를 구하는 것도 별개의 선형계획법 문제로 표현된다. 최적분할 감도분석에 의해 구해지는 θ의 범위 $Oc_k(B, N) = [\theta^-, \theta^+]$와 γ의 범위 $Ob_h(B, N) = [\gamma^-, \gamma^+]$는 다음과 같다[15].

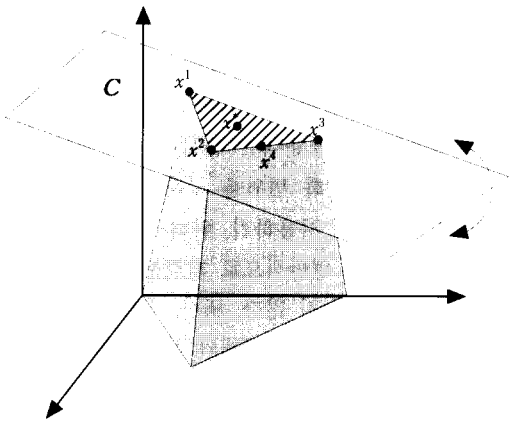
$$\theta^- = \min_{y,s} \{\theta \mid A_B^T y = c_B + \theta(e_k)_B,\ A_N^T y + s_N = c_N + \theta(e_k)_N,\ s_N \geq 0,\ s_B = 0\} \tag{2.3}$$

$$\theta^+ = \max_{y,s} \{\theta \mid A_B^T y = c_B + \theta(e_k)_B,\ A_N^T y + s_N = c_N + \theta(e_k)_N,\ s_N \geq 0,\ s_B = 0\} \tag{2.4}$$

$$\gamma^- = \min_x \{\gamma \mid A_B x_B = b + \gamma e_h,\ x_B \geq 0,\ x_N = 0\} \tag{2.5}$$

$$\gamma^+ = \max_x \{\gamma \mid A_B x_B = b + \gamma e_h,\ x_B \geq 0,\ x_N = 0\} \tag{2.6}$$

지금까지 정의한 세 가지 감도분석의 차이점은 [그림 1]을 통해 비교해 볼 수 있다. [그림 1]에서 음영으로 표시된 부분이 가능해(feasible solution) 영역이고 빗금 친 삼각형 영역이 최적해 집합이다. 기본감도분석은 정점최적해 x^1, x^2, x^3에 대응하는 최적기저를 이용하여 수행되는 감도분석이다. 양가감도분석은 정점최적해 x^1, x^2, x^3 뿐만 아니라 비정점최적해 x^4, x^* 등에서도 수행될 수 있는 감도분석이다. 반면 최적분할 감도분석은 기하학적으로 최적면(빗금 친 삼각형 영역)이 유지되는 변화 범위를 구하는 감도분석으로 x^*에서 양가감도분석을 수행한 것과 동일한 감도분석 범위를 갖는다[2].



[그림 1] 감도분석 방법들의 비교

3. 일반감도분석

지금까지 최적기저를 사용하는 기본감도분석, 양가감도분석, 최적분할 감도분석 등의 정의를 살펴보았다. 그러나, 세 가지 감도분석들간의 상호관계와 개념이 명확하지 않은 상태이다. 따라서, 이러한 세 개의 감도분석을 포괄하는 보다 일반적인 감도분석을 도입함으로써 기존 감도분석을 일관된 관점에서 설명할 필요가 있다.

목적함수 계수에 대한 양가감도분석은 (P)의 최적해 x^*가 최적해로 유지되는 θ의 범위를 구한다. 즉, 양가감도분석은 (P)의 최적해 x^*의 비영요소 위치를 그대로 유지하는 감도분석 범위를 구하는 것이다. 목적함수 계수에 대한 감도분석의 경우는 x^*가 최적해로 유지되는 것과 x^*의 비영요소 위치가 유지되는 것은 서로 동일한 감도분석 결과를 가져온다. 그러나, 우변상수가 변화하면 x^*는 더 이상 최적해가 되지 않으므로 x^*을 최적해로 유지하는 범위는 바로 $[0,0]$이다. 즉, 우변상수가 조금이라도 바뀌면 (P)의 최적해 x^*는 최적해가 되지 않는다. 양가감도분석은 이러한 점에 착안해 최적해 x^*의 비영요소 구조를 유지하는 범위를 구한다. 그렇지만, 퇴화의 경우 우변상수에 대한 양가감도분석은 일반적으로 최적분할 감도분석이나 기본감도분석보다 더 좁은 감도분석 범위를 제공한다.

먼저 일반감도분석의 정의를 제시하고, 예제를 통해 일반감도분석이 제공하는 범위를 알아본다. 이후 기존의 감도분석이 일반감도 분석의 특수한 경우임을 보인다. 아울러, 정점최적해에서 일반감도분석과 기본감도분석과의 관계, 일반감도분석과 양가감도분석과의 관계를 알아본다.

편의상 A의 임의의 열들로 이루어진 부분행렬을 E라 할 때 E에 속하는 열들의 지수 집합을 $\eta(E)$라고 하자. 또한 $\bar{\eta}(E)=\{1,2,\cdots,n\}-\eta(E)$라 하자. 일반감도분석의 정의는 다음과 같다.

[정의 3.1] 목적함수계수에 대한 일반감도분석 (Generalized Sensitivity Analysis ; GSA)

x^*가 (P)의 최적해라 하고 σ가 $\sigma\supset\eta(x^*)$인 변수 지수집합이라고 하자. 또한 $\bar{\sigma}=\{1,2,\cdots,n\}-\sigma$라 하자. Θ을 구하는 것을 목적함수 계수 c_k에 대한 일반감도분석이라 한다.

$$\Theta=\{\theta \mid \begin{bmatrix} A_\sigma^T \\ A_{\bar{\sigma}}^T \end{bmatrix} y+\begin{bmatrix} 0 \\ s_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_\sigma \\ c_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix}+\theta e_k,\ s_\sigma=0,\ s_{\bar{\sigma}}\geq 0\}$$

또, 다음과 같이 θ의 범위를 $Sc_k(x^*,\sigma)$로 나타내며 $Sc_k(x^*,\sigma)$를 일반감도분석의 특성구간이라 한다.

$$Sc_k(x^*,\sigma)=[\inf_{\theta\in\Theta}\theta,\ \sup_{\theta\in\Theta}\theta]$$

[정의 3.2] 우변상수에 대한 일반감도분석

(y^*,s^*)가 (D)의 최적해라 하고 $\sigma\subseteq\bar{\eta}(s^*)$를 임의의 변수 지수집합이라고 하자. 또한 $\bar{\sigma}=\{1,2,\cdots,n\}-\sigma$라 하자. Γ를 구하는 것을 우변상수 b_h에 대한 일반감도분석이라 한다.

$$\Gamma=\{\gamma \mid A_\sigma x_\sigma=b+\gamma e_h,\ x_\sigma\geq 0,\ x_{\bar{\sigma}}=0\}$$

또, 다음과 같이 Γ의 범위를 $Sb_h(s^*,\sigma)$로 나타

내고 $Sb_h(s^*, \sigma)$를 b_h에 대한 일반감도분석의 특성구간이라 한다.

$$Sb_h(s^*, \sigma) = [\inf_{\gamma \in \Gamma} \gamma,\ \sup_{\gamma \in \Gamma} \gamma]$$

위의 [정의 3.1]과 [정의 3.2]에서 σ을 제어지수집합이라 부르자. 목적함수 계수에 대한 일반감도분석에서 σ는 쌍대여유변수 중에 그 값이 0이 되는 변수지수집합을 나타낸다. 우변상수에 대한 일반감도분석에서 σ는 원변수 중에 그 값이 양이 될 수 있는 변수지수집합을 나타낸다. 즉, σ에 들어있지 않은 변수의 값은 항상 0이 되게 하고 σ에 속해 있는 변수의 값은 비음이 되도록 하면서 일반감도분석의 범위를 구한다. 동일한 원최적해 또는 쌍대최적해가 주어져 있는 경우라도 제어변수집합을 어떻게 설정하느냐에 따라 일반감도분석의 특성구간은 달라지게 된다. 일반감도분석의 제어지수집합이 달라짐에 따라 감도분석 범위가 달라지는 현상을 예제 (ELP_1)과 (ELP_2)를 통해 살펴보자.

먼저, 다음과 같은 선형계획법 예제 (ELP_1)를 고려해 보자.

$$(EP_1):\quad \begin{array}{lll} Min & 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = 1 \\ & x_1 \qquad + x_3 \qquad - x_5 & = 1 \\ & x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_6 & = 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6 & \end{array}$$

$$(ED_1):\quad \begin{array}{lll} Max & y_1 + y_2 + y_3 & \\ s.t. & y_1 + y_2 + y_3 + s_1 & = 0 \\ & y_1 \qquad + y_3 \ + s_2 & = 2 \\ & y_1 + y_2 \qquad\quad + s_3 & = 1 \\ & -y_1 \qquad\qquad + s_4 & = 1 \\ & -y_2 \qquad\qquad + s_5 & = 1 \\ & \qquad -y_3 \qquad + s_6 & = 1 \\ & s_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6 & \end{array}$$

(EP_1)의 최적해는 x^*로 유일하게 다음과 같다.

$$x^* = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

x^*에서 목적함수 계수 c_1에 대한 일반감도분석을 수행해 보자. σ을 다섯 가지 경우로 설정했을 때 각각의 일반감도분석 범위를 알아본다.

① $\sigma = \{1\}$로 설정할 때

$\sigma = \{1\}$일 때 일반감도분석 범위 $Sc_1(x^*, \sigma)$는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} Sc_1(x^*, \sigma) &= \{\theta \mid\ y_1 + y_2 + y_3 = \theta, y_1 + y_3 \leq 2, \\ &\qquad y_1 + y_2 \leq 1, y_1 \geq -1, y_2 \geq -1, \\ &\qquad y_3 \geq -1\} \\ &= [-3,\ 4] \end{aligned}$$

② $\sigma = \{1,2\}$로 설정할 때

$\sigma = \{1,2\}$일 때 일반감도분석 범위 $Sc_1(x^*, \sigma)$는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} Sc_1(x^*, \sigma) &= \{\theta \mid\ y_1 + y_2 + y_3 = \theta, y_1 + y_3 = 2, \\ &\qquad y_1 + y_2 \leq 1, y_1 \geq -1, y_2 \geq -1, \\ &\qquad y_3 \geq -1\} \\ &= [1,\ 4] \end{aligned}$$

③ $\sigma = \{1,2,3\}$로 설정할 때

$\sigma = \{1,2,3\}$일 때 일반감도분석 범위 $Sc_1(x^*, \sigma)$는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} Sc_1(x^*, \sigma) &= \{\theta \mid\ y_1 + y_2 + y_3 = \theta, y_1 + y_3 = 2, \\ &\qquad y_1 + y_2 = 1, y_1 \geq -1, y_2 \geq -1, \\ &\qquad y_3 \geq -1\} \\ &= [1,\ 4] \end{aligned}$$

④ $\sigma = \{1,4,5\}$로 설정할 때

$\sigma = \{1,4,5\}$일 때 일반감도분석 범위 $Sc_1(x^*, \sigma)$는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} Sc_1(x^*, \sigma) &= \{\theta \mid\ y_1 + y_2 + y_3 = \theta, y_1 + y_3 \leq 2, \\ &\qquad y_1 + y_2 \leq 1, y_1 = -1, \\ &\qquad y_2 = -1, y_3 \geq -1\} \\ &= [-3,\ 1] \end{aligned}$$

⑤ $\sigma = \{1,2,3,4\}$로 설정할 때

$\sigma = \{1,2,3,4\}$일 때 일반감도분석 범위 $Sc_1(x^*, \sigma)$는 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
Sc_1(x^*, \sigma) &= \{\theta \mid y_1 + y_2 + y_3 = \theta, y_1 + y_3 = 2, \\
&\qquad y_1 + y_2 = 1, y_1 = -1, y_2 \geq -1, \\
&\qquad y_3 \geq -1\} \\
&= [4,\ 4]
\end{aligned}
$$

위와 같이 일반감도분석의 제어지수집합 σ가 변하면 일반감도분석 범위도 바뀌게 된다. 이는 제어지수집합 σ가 일반감도분석 범위에 결정적인 영향을 미침을 의미한다. $\sigma = \{1\}$인 경우는 x^*에서 c_1에 대한 양가감도분석 범위와 같아지고, $\sigma = [1,4,5]$인 경우는 A_σ에서 기본감도분석 범위와 같아진다.

우변상수에 대한 일반감도분석의 예를 위해 다음 선형계획법 예제 (ELP_2)를 보자.

$$
(EP_2):\quad
\begin{array}{ll}
Max & x_1 + x_2 \\
s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
 & x_1 + x_4 = 1 \\
 & x_2 + x_5 = 1 \\
 & x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5
\end{array}
$$

$$
(ED_2):\quad
\begin{array}{ll}
Min & y_1 + y_2 + y_3 \\
s.t & y_1 + y_2 - s_1 = 1 \\
 & y_1 + y_3 - s_2 = 1 \\
 & y_1 - s_3 = 0 \\
 & y_2 - s_4 = 0 \\
 & y_3 - s_5 = 0 \\
 & s_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5
\end{array}
$$

(ED_2)의 최적해는 다음과 같이 유일하게 (y^*, s^*)이다.

$$
\begin{aligned}
y^* &= (1, 0, 0)^T \\
s^* &= (0, 0, 1, 0, 0)^T
\end{aligned}
$$

(y^*, s^*)에서 우변상수 b_1에 대한 일반감도분석을 수행해 보자. 제어지수집합으로 네 개의 경우를 고려할 때 각각의 일반감도분석 범위를 알아본다.

① $\sigma = \{1,2\}$로 설정할 때

$\sigma = \{1,2\}$일 경우 (y^*, s^*)에서 b_1에 대한 일반감도분석 범위 $Sb_1(s^*, \sigma)$는 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
Sb_1(s^*, \sigma) &= \{\gamma \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_i \geq 0,\ i = 1, 2\} \\
&= [1, 1]
\end{aligned}
$$

② $\sigma = \{1,5\}$로 설정할 때

$\sigma = \{1,5\}$일 경우 (y^*, s^*)에서 b_1에 대한 일반감도분석 범위 $Sb_1(s^*, \sigma)$는 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
Sb_1(s^*, \sigma) &= \{\gamma \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_i \geq 0,\ i = 1, 5\} \\
&= [0, 0]
\end{aligned}
$$

③ $\sigma = \{1,4,5\}$로 설정할 때

$\sigma = \{1,4,5\}$일 경우 (y^*, s^*)에서 b_1에 대한 일반감도분석 범위 $Sb_1(s^*, \sigma)$는 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
Sb_1(s^*, \sigma) &= \{\gamma \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_i \geq 0,\ i = 1, 4, 5\} \\
&= [-1, 0]
\end{aligned}
$$

④ $\sigma = \{1,2,4,5\}$로 설정할 때

$\sigma = \{1,2,4,5\}$일 경우 (y^*, s^*)에서 b_1에 대한 일반감도분석 범위 $Sb_1(s^*, \sigma)$는 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
Sb_1(s^*, \sigma) &= \{\gamma \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 4, 5\} \\
&= [-1, 1]
\end{aligned}
$$

한편, $(EP)_2$의 최적해 $x^*=(1,0,0,0,1)^T$에서 양가감도분석 범위는 $Yb_1(x^*)=[0,0]$로 제어변수 집합을 $\sigma=\{1,5\}$로 둔 경우와 같다. 또한, 지수집합을 $\sigma=\{1,4,5\}$라 할 때 최적기저 A_σ에서 b_1에 대한 기본감도분석 범위 $Tb_1(A_B)$는 $[-1,0]$이 된다.

일반감도분석으로부터 주어진 최적해 (x^*, y^*, s^*)와 σ의 설정에 따라 기존의 기본감도분석, 양가감도분석, 최적분할 감도분석 방법이 유도됨을 보이자. 즉, 기존의 감도분석 방법들은 일반감도분석에서 (x^*, y^*, s^*)와 σ에 특정한 조건을 준 경우로 볼 수 있다. 각 감도분석의 정의로부터 일반감도분석과 기본감도분석, 양가감도분석, 최적분할 감도분석들과의 관계는 다음과 같다.

[정리 3.1] 일반감도분석과 기본감도분석

B가 최적기저변수의 지수집합이라고 하고, 최적기저 A_B에 대응하는 정점최적해를 (x^*, y^*, s^*)라고 하면, $Sc_k(x^*, B)=Tc_k(A_B)$이고, $Sb_h(s^*, B)=Tb_h(A_B)$이다.

(증명) $Tc_k(A_B)$의 정의와 [정의 2.1], [정의 3.1]로부터 $Sc_k(x^*, B)=Tc_k(A_B)$이 바로 유도된다. 또한 $Tb_h(A_B)$의 정의와 [정의 2.1], [정의 3.2]로부터 $Sb_h(s^*, B)=Tb_h(A_B)$가 유도된다. □

[정리 3.2] 일반감도분석과 양가감도분석

(x^*, y^*, s^*)가 (LP)의 최적해이면, $Sc_k(x^*, \eta(x^*))=Yc_k(x^*)$이고 $Sb_h(s^*, \eta(x^*))=Yb_h(x^*)$이다.

(증명) x^*와 s^*가 최적해라는 조건으로부터 $\eta(x^*) \subseteq \bar{\eta}(s^*)$이고, 일반감도분석의 [정의 3.1]와 양가감도분석의 범위를 구하는 식 (2.3)으로부터 $Sc_k(x^*, \eta(x^*))=Yc_k(x^*)$이 유도된다. 또, [정의 3.2]와 우변상수에 대한 양가감도분석 범위를 구하는 식 (2.4)에 의해 $Sb_h(s^*, \eta(x^*))=Yb_h(x^*)$이 유도된다. □

[정리 3.3] 일반감도분석과 최적분할 감도분석

(x^*, y^*, s^*)가 (LP)의 강상보최적해이고 $\pi=(B,N)$이 (LP)의 최적분할이라 하면, $Sc_k(x^*, \eta(x^*))=Oc_k(B,N)$이 $Sb_h(s^*, \bar{\eta}(s^*))=Ob_h(B,N)$이다.

(증명) (x^*, y^*, s^*)가 (LP)의 강상보최적해이면, $(\eta(x^*), \eta(s^*))=(B,N)$이다. 따라서, 목적함수 계수에 대한 일반감도분석의 [정의 3.1]과 목적함수 계수에 대한 최적분할 감도분석의 범위를 계산하는 식 (2.5)로부터 $Sc_k(x^*, \eta(x^*))=Oc_k(B,N)$이 유도된다. 또, 우변상수에 대한 일반감도분석의 [정의 3.2]와 우변상수에 대한 최적분할 감도분석의 범위를 계산하는 식 (2.6)으로부터 $Sb_h(s^*, \bar{\eta}(s^*))=Ob_h(B,N)$이 유도된다. □

정점최적해에서 일반감도분석과 기본감도분석과의 또 다른 관계를 알아보자. x^*가 (P)의 정점최적해이고 x^*에 대응하는 원최적기저가 $B^1, B^2, \cdots, B^t$라고 하자. 물론 x^*가 비퇴화(nondegenerate) 정점최적해이면 원최적기저가 유일하지만, x^*가 퇴화 최적해이면 대응하는 원최적기저가 여러 개 있을 수 있다. 목적함수 계수에 대한 양가감도분석과 기본감도분석의 관계는 $Yc_k(x^*)=\bigcup_{1\le i\le t} Tc_k(A_{B^i})$인데[2], 이는 위의 [정리 3.2]로부터 $Sc_k(x^*, \eta(x^*))=\bigcup_{1\le i\le t} Tc_k(A_{B^i})$가 성립함을 의미한다. 우변상수에 대한 감도분석에서도 비슷한 관계가 성립됨을 다음 정리에서 보인다.

[정리 3.4] (y^*, s^*)가 (D)의 정점최적해이고 $\sigma=\bar{\eta}(s^*)$라 두자. (y^*, s^*)에 대응하는 쌍대최적기저의 지수집합을 $B^1, B^2, \ldots, B^t$라고 하면, $Sb_h(s^*, \sigma)=\bigcup_{1\le i\le t} Tb_h(A_{B^i})$이다.

(증명) 먼저 $\bigcup_{1\le i\le t} Tb_h(A_{B^i}) \subset Sb_h(s^*, \sigma)$임을 보

이자. 어떤 $1 \le p \le t$에 대해 $\hat{\gamma} \in Tb_h(A_{B^p})$이라 하자. $Tb_h(A_{B^p})$의 정의에 의해 다음 식을 만족하는 (x_{B^p}, x_{N^p})가 존재한다.

$$\begin{aligned} &A_{B^p} x_{B^p} = b + \hat{\gamma} e_h \\ &x_{B^p} \ge 0, x_{N^p} = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

단, $A = [A_{B^p}, A_{N^p}]$이다

또한 $Sb_h(s^*, \sigma)$의 정의에 의해 $\gamma \in Sb_h(s^*, \sigma)$이면 다음 식을 만족하는 $(x_\sigma, x_{\bar{\sigma}})$가 존재한다.

$$\begin{aligned} &A_\sigma x_\sigma = b + \gamma e_h \\ &x_\sigma \ge 0, \ x_{\bar{\sigma}} = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

B^p가 쌍대최적기저의 지수집합이고 (y^*, s^*)는 쌍대최적기저해이므로 $B^p \subset \sigma$이다. 즉, A_{B^p}는 A_σ의 일부 열들로 이루어진 부분행렬이므로 식 (3.1)을 만족하는 해 (x_{B^p}, x_{N^p})로부터 $\gamma = \hat{\gamma}$일 때 식 (3.2)을 만족하는 해 x을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x = \begin{bmatrix} x_\sigma \\ x_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{B^p} \\ x_{\sigma^2} \\ x_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{B^p} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

단, $\sigma^2 = \sigma - B^p$이다

따라서, $\hat{\gamma} \in Sb_h(s^*, \sigma)$이고 이는 $\bigcup_{1 \le i \le t} Tb_h(A_{B^i}) \subset Sb_h(s^*, \sigma)$이 성립함을 의미한다.

다음으로 $Sb_h(s^*, \sigma) \subset \bigcup_{1 \le i \le t} Tb_h(A_{B^i})$이 성립함을 보이자. $\hat{\gamma} \in Sb_h(s^*, \sigma)$라 하면 식 (3.2)에서 $\gamma = \hat{\gamma}$로 둘 때 식 (3.2)의 해가 존재하고, 반드시 식 (3.2)을 만족하는 기저가능해도 하나 이상 존재한다[14]. 즉, 다음을 만족하는 기저가능해 $(\hat{x}_{\sigma^3}{}^T, 0)^T$가 존재한다.

$$A_{\sigma^3} \hat{x}_{\sigma^3} = b + \hat{\gamma} e_h, \quad \hat{x}_{\sigma^3} \ge 0, \quad \hat{x}_{\bar{\sigma}^3} = 0$$

$$Rank(A_{\sigma^3}) = |\sigma^3|$$

단, $\sigma^3 = \eta(\hat{x})$이다

$\sigma^3 \subset \sigma = \eta(s^*)$이고 $\hat{x}^T s^* = 0$이므로 $(\hat{x}, y^*, s^*)$는 $(P_{\hat{\gamma}})$와 $(D_{\hat{\gamma}})$의 최적기저해이다. 그러면, 반드시 $\eta(\hat{x}) \bigcup \eta(s^*) \subset \eta(A_B)$을 만족하는 최적기저의 지수집합 B가 존재한다[12]. B는 쌍대최적기저의 지수집합이기도 하므로 $B^p = B$인 어떤 $p(1 \le p \le t)$가 존재한다. 이는 $\hat{\gamma} \in Tb_h(A_{B^p})$임을 의미하므로 $Sb_h(s^*, \sigma) \subset \bigcup_{1 \le i \le t} Tb_h(A_{B^i})$가 성립한다. □

다음으로 정점최적해에서 우변상수에 대한 양가감도분석과 일반감도분석과 또 다른 관계는 다음의 정리와 같다. 임의의 행렬 $E \in R^{m \times q}$에 대해 $Pos(E)$는 다음과 같이 정의된다.

$$Pos(E) = \{x \in R^m \mid x = \sum_{1 \le j \le q} \lambda_j E_{\cdot j}, \lambda_j \ge 0\}$$

[정리 3.5] x^*가 (P)의 임의의 최적해이고, (y^*, s^*)는 (D)의 최적해라고 하면 다음 식이 성립한다.

$$Yb_h(x^*) \subset Sb_h(s^*, \bar{\eta}(s^*))$$

(증명) 쌍대간격(duality gap)이 0이어야 하므로 $x_j^* s_j^* = 0 \ (j = 1, \cdots, n)$가 성립하므로 $\eta(x^*) \cap \eta(s^*) = \emptyset$이고 $\eta(x^*) \subset \bar{\eta}(s^*) = \{1, 2, \cdots, n\} - \eta(s^*)$이다. 따라서 $Pos(A_{\eta(x^*)}) \subset Pos(A_{\bar{\eta}(s^*)})$이다. 즉, 모든 $\gamma \in Yb_h(x^*)$에 대해 $\gamma \in Sb_h(s^*, \bar{\eta}(s^*))$가 성립된다. □

4. 정점 · 비정점최적해에서 일반감도분석

3장에서는 기존의 감도분석 방법들을 하나의 통합적 정의로 해석할 수 있는 일반감도분석을 도입

한 바 있다. 본 장에서는 정점최적해에서 일반감도분석과 비정점최적해에서 일반감도분석이 어떤 관계를 갖는지를 고찰해 보고자 한다. 목적함수 계수에 대한 감도분석의 경우, 정리 3.2에 나타난 양가감도분석과 일반감도분석과의 관계를 이용하면 정점최적해에서 일반감도분석과 비정점최적해에서 일반감도분석과의 관계를 얻을 수 있다. 그러나, 우변상수에 대한 감도분석의 경우, 양가감도분석에 성립하는 성질이 일반감도분석에는 성립되지 않는다. 따라서, 본 장에서는 주로 우변상수에 대한 감도분석에서, 정점최적해에서 일반감도분석과 비정점최적해에서 일반감도분석과의 관계를 알아본다.

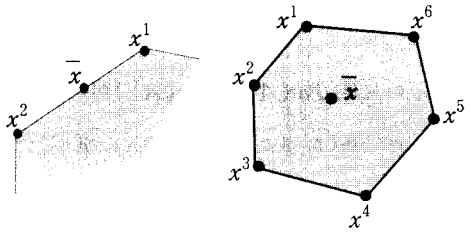
[정의 4.1] 생성 정점(generating extreme point) (P)의 비정점가능해(non-extreme feasible solution) $\bar{x}$에 대해 (P)의 정점가능해(extreme feasible solution) $x^1, x^2, \cdots, x^r$이 다음 조건을 만족하면 x^i을 비정점가능해 $\bar{x}$의 생성 정점이라 한다. 또한, $\{x^1, x^2, \cdots, x^r\}$을 $\bar{x}$의 생성 정점 집합이라 하고 $G_P(\bar{x})$로 나타낸다.

"$\bar{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^i$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, \cdots, r$을 만족하는 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$이 존재한다."

또한, (D)의 비정점가능해 $(\bar{y}, \bar{s})$에 대해 (D)의 정점가능해 $(y^1, s^1), \cdots, (y^r, s^r)$이 다음 조건을 만족하면 (y^i, s^i)을 $(\bar{y}, \bar{s})$의 생성 정점이라고 한다. 또한 $\{(y^1, s^1), \cdots, (y^r, s^r)\}$을 $(\bar{y}, \bar{s})$의 생성 정점 집합이라 하고 $G_D(\bar{y}, \bar{s})$로 나타내기로 한다.

"$\bar{s} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i s^i$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, \cdots, r$을 만족하는 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$이 존재한다."

다음 그림에서 음영으로 나타낸 부분이 원문제의 최적면이라고 하자. 왼쪽 그림의 경우에는 비정점최적해 $\bar{x}$의 생성 정점 집합이 $\{x^1, x^2\}$이고 오른쪽 그림에서 $\bar{x}$의 생성 정점 집합은 $\{x^1, x^2, \cdots, x^6\}$이 된다.



[그림 2] 비정점최적해의 생성 정점

$\bar{x}$가 (P)의 비정점최적해라고 하고 $G_P(\bar{x}) = \{x^1, x^2, \cdots, x^t\}$라 하면, 다음 식이 성립함이 알려져 있다[2].

$$\bigcap_{1 \le i \le t} Yc_k(x^i) = Yc_k(\bar{x})$$

따라서, 위의 식과 [정리 3.2]에 의해 $\bigcap_{1 \le i \le t} Sc_k(x^i, \eta(x^i)) = Sc_k(\bar{x}, \eta(\bar{x}))$이 성립함을 알 수 있다. 그러나, 우변상수의 경우 일반적으로 $\bigcap_{1 \le i \le t} Yb_h(x^i) \neq Yb_h(\bar{x})$이므로 일반감도분석의 성질을 바로 이끌어 낼 수 없는데, 다음의 [보조정리 4.1]과 [정리 4.2]에서 비정점최적해에서 일반감도분석과 정점최적해에서 일반감도분석과의 관계를 제시한다.

[보조정리 4.1] $(\check{y}, \check{s})$가 (D)의 정점최적해라 하고 $(\bar{y}, \bar{s})$는 (D)의 비정점최적해라고 하자. 만약 $(\check{y}, \check{s}) \in G_D(\bar{y}, \bar{s})$이면, $Sb_h(\bar{s}, \bar{\eta}(\bar{s})) \subset Sb_h(\check{s}, \bar{\eta}(\check{s}))$이다.

(증명) $Sb_h(\check{s}, \bar{\eta}(\check{s}))$는 다음 식을 만족하는 γ의 범위를 나타낸다.

$$A_{\sigma^1} x_{\sigma^1} = b + \gamma e_h, \quad x_{\sigma^1} \ge 0$$

단, $\sigma^1 = \bar{\eta}(\check{s})$이다.

$Sb_h(\bar{s}, \bar{\eta}(\bar{s}))$는 다음 식을 만족하는 γ의 범위를 나타낸다.

$$A_\sigma x_\sigma = b + \gamma e_h, \quad x_\sigma \geq 0$$
$$\text{단, } \sigma = \bar{\eta}(\bar{s})\text{이다}$$

$\sigma \subset \sigma^1$이므로 $Pos(A_\sigma) \subset Pos(A_{\sigma^1})$이다. 따라서, 임의의 $\gamma \in Sb_h(\bar{s}, \bar{\eta}(\bar{s}))$는 $\gamma \in Sb_h(\hat{s}, \bar{\eta}(\hat{s}))$을 만족한다. □

[정리 4.2] $(\bar{y}, \bar{s})$가 (D)의 비정점최적해라고 하고 $G_D(\bar{y}, \bar{s}) = \{(y^1, s^1), \cdots, (y^r, s^r)\}$라 하면, 다음 식이 성립한다.

$$\bigcap_{1 \leq i \leq r} Sb_h(s^i, \bar{\eta}(s^i)) = Sb_h(\bar{s}, \bar{\eta}(\bar{s}))$$

(증명) $\sigma = \bar{\eta}(\bar{s})$, $\sigma^i = \bar{\eta}(s^i)$라 하자. [보조정리 4.1]에 의해 $Sb_h(\bar{s}, \bar{\sigma}) \subset \bigcap_{1 \leq i \leq r} Sb_i(s^i, \bar{\sigma}^i)$임은 이미 증명되었다. 따라서, $\bigcap_{1 \leq i \leq r} Sb_i(s^i, \bar{\sigma}^i) \subset Sb_h(\bar{s}, \bar{\sigma})$가 성립함을 보이면 된다. $\sigma = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \sigma^i$이므로 $\bar{\gamma} \in \bigcap_{1 \leq i \leq r} Sb_i(s^i, \bar{\sigma}^i)$인 임의의 $\bar{\gamma}$는 다음 식을 만족한다.

$$A_\sigma x_\sigma = b + \gamma e_h, \quad x_\sigma \geq 0$$

이는 $\bar{\gamma} \in Sb_h(\bar{s}, \bar{\sigma})$임을 의미한다. 그러므로, $\bigcap_{1 \leq i \leq r} Sb_i(s^i, \bar{\eta}(s^i)) = Sb_h(\bar{s}, \bar{\eta}(\bar{s}))$이 성립한다. □

다음으로 정점최적해에서 일반감도분석과 최적분할 감도분석과의 관계를 알아본다. 목적함수 계수에 대한 감도분석의 경우, 최적분할 감도분석과 양가감도분석 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다[2]. 단, $x^1, x^2, \cdots, x^t$는 (P)의 모든 정점최적해이고, $\bar{x}$는 강상보최적해이다.

$$\bigcap_{1 \leq i \leq t} Yc_k(x^i) = Oc_k(\eta(\bar{x}), \bar{\eta}(\bar{x}))$$

따라서, [정리 3.2]에 의해 일반감도분석에서도 $\bigcap_{1 \leq i \leq t} Sc_k(x^i, \eta(x^i)) = Oc_k(\eta(\bar{x}), \bar{\eta}(\bar{x}))$가 성립함을 알 수 있다. 그러나, 우변상수에 대한 감도분석의 경우 양가감도분석과 최적분할 감도분석과의 관계로부터 최적분할 감도분석과 일반감도분석 간의 관계를 바로 알 수 없는데, 다음 정리 4.3에서 그 관계를 제시한다.

[정리 4.3] (D)의 모든 정점최적해를 $(y^1, s^1), \cdots, (y^r, s^r)$라 하고 (LP)의 최적분할을 $\pi = (B, N)$이라 하자. 각 정점에서 우변상수 b_h에 대한 일반감도분석과 최적분할 감도분석과의 관계는 다음과 같다.

$$\bigcap_{1 \leq i \leq r} Sb_h(s^i, \bar{\eta}(s^i)) = Ob_h(B, N)$$

(증명) $\hat{\gamma} \in \bigcap_{1 \leq i \leq r} Sb_h(s^i, \bar{\eta}(s^i))$라 하자. 그러면, $\hat{\gamma}$은 다음 식을 만족한다.

$$A_\sigma x_\sigma = b + \hat{\gamma} e_h, \quad x_\sigma \geq 0, \quad x_{\bar{\sigma}} = 0 \tag{4.1}$$
$$\text{단, } \sigma = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \bar{\eta}(s^i)\text{이다.}$$

여기서 다음 식이 성립한다.

$$\sigma = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \bar{\eta}(s^i) = \{1, 2, \cdots, n\} - \bigcup_{1 \leq i \leq r} \eta(s^i)$$
$$= \{1, 2, \cdots, n\} - N = B$$

따라서, 식 (2.5)와 식 (2.6)에 의해 $\hat{\gamma} \in Ob_h(B, N)$이다. 역으로 $\hat{\gamma} \in Ob_h(B, N)$이면 식 (4.1)이 성립하고 식 (4.1)의 해 $\hat{x}$는 어떤 정점최적해 (y^i, s^i)에서 b_h에 대한 일반감도분석을 나타내는 다음 식의 해가 된다.

$$A_{\sigma^i} x_{\sigma^i} = b + \hat{\gamma} e_h, \quad x_{\sigma^i} \geq 0, \quad x_{\bar{\sigma}^i} = 0$$
$$\text{단, } \sigma^i = \bar{\eta}(s^i)\text{이다}$$

따라서 $\hat{\gamma} \in \bigcap_{1 \leq i \leq r} Sb_h(s^i, \bar{\eta}(s^i))$이다. □

[종정리 4.4] (LP)의 최적분할을 $\pi=(B,N)$이라 하자. (D)의 모든 정점최적해를 (y^1,s^1), $\cdots$, (y^r,s^r)라 하면, (y^i,s^i)에 대응되는 쌍대최적기저를 B_1^i, $\cdots$, $B_{r_i}^i$라 하면 다음 관계식이 성립한다.

$$\bigcap_{1\le i\le r}\left(\bigcup_{1\le l\le r_i} Tb_h(A_{B_l^i})\right) = Sb_h(\bar{s},\bar{\eta}(\bar{s}))$$

(증명) [정리 3.4]에 의해 $Sb_h(s^i,\bar{\eta}(s^i)) = \bigcup_{1\le l\le r_i} Tb_h(A_{B_l^i})$이므로 이를 [정리 4.3]에 대입하면 바로 얻을 수 있다. □

5. 결론 및 추후 연구 과제

최적해에서 수행되는 감도분석 방법으로 최적기저를 사용하는 기본감도분석, 양가감도분석, 최적분할 감도분석이 있다. 본 연구에서는 일반화된 감도분석 방법인 일반감도분석을 제안하여 선형계획법에서의 감도분석을 통합적으로 이해할 수 있도록 하였다.

일반감도분석은 변수중에서 비영이 되는 것을 허용할 제어변수집합의 설정이 따라 감도분석범위가 달라진다는 점을 기반으로, 목적함수 계수에 대한 일반감도분석과 우변상수에 대한 일반감도분석 방법을 제안하였다.

목적함수 계수에 대한 일반감도분석에서는 쌍대여유변수 중에 비영이 되는 것을 허용할 제어변수집합을 설정하는 방법에 따라 상이한 감도분석 범위가 나오고, 기존의 세 가지 감도분석은 일반감도분석의 특수한 경우가 되는 것을 보였다. 마찬가지로 우변상수에 대한 일반감도분석에서는 원문제의 변수 중에 비영이 되는 것을 허용할 제어변수집합을 설정하는 방법에 따라 기존의 감도분석 방법들이 유도된다. 그러나, 일반감도분석의 특성영역 중 기존의 세 가지 감도분석 방법의 특성영역에는 포함되지 않는 감도분석 범위가 존재하므로, 일반감도분석은 기존의 감도분석 방법들을 포괄하는 보다 일반적인 감도분석이라 할 수 있다.

아울러 본 연구에서는 정점최적해에서 일반감도분석과 비정점최적해에서 일반감도분석 간의 관계를 규명하였다. 목적함수 계수와 우변상수에 대한 감도분석에서 비정점최적해에서 일반감도분석의 특성영역은 정점최적해에서 일반감도분석 특성영역의 교집합이 됨을 보였다.

추후 연구과제로, 일반감도분석이 이론적으로 기존의 감도분석을 설명할 수 있는 포괄적인 개념이기는 하지만 일반감도분석이 실용적으로 적용될 수 있는 문제나 분야를 제시하는 연구가 요구되며, 이러한 연구로 일반감도분석이 단순히 이론뿐만 아니라 실용적인 면에서 의미 있는 감도분석 방법이 될 수 있음을 보일 필요가 있다. 또한, 기존의 감도분석 방법과 일반감도분석의 범위가 의미하는 바를 설명하고 상황에 따라 적절한 감도분석 방법의 선택에 관한 연구, 매개변수계획법과 네트워크 최적화 문제 등의 분야에 일반감도분석의 활용 방법에 관한 연구도 추후 수행되어야할 과제일 것이다.

참 고 문 헌

[1] 박순달, 선형계획법, 민영사, 1993.

[2] 박찬규, "내부점법에서 감도분석에 관한 연구", 서울대학교 박사학위 논문, 2000.

[3] 성기석, 박순달, "행렬게임에서의 감도분석", 「한국경영과학회지」, 제13권 제1호(1988), pp. 1-9.

[4] 양병학, "선형계획법에서 비정점최적해의 민감도분석에 관한 연구", 서울대학교 박사학위 논문, 1990.

[5] Adler, I. and R.D.C. Monteiro, "A geometric view of parametric linear programming", *Algorithmica*, No.8(1992), pp.161-176.

[6] Dantzig, G.B., *Linear programming and extension*, Princeston University Press, 1963.

[7] Evans, J.R., N.R. Baker, "Degeneracy and the (mis)interpretation of sensitivity anal-

ysis in linear programming", *Decision Sciences*, No.13(1982), pp.348-354.

[8] Gal, T., *Postoptimal analysis, parametric programming, and related topics*, McGraw-Hill, 1979.

[9] Goldman, A. J. and A.W. Tucker, "Theory of linear programming", in : H. W. Kuhn and A.W. Tucker, eds., *Inequalities and Related Systems* (Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, No.38(1956), pp.53-97.

[10] Jansen, B., J.J. de Jong, C. Roos, T. Terlaky, "Sensitivity analysis in linear programming : just be careful", *European Journal of Operational Research*, No.101(1997), pp.15-28.

[11] Kim, W.J., C.K. Park, S.D. Park, "An ε-sensitivity analysis in the primal-dual interior point method", *European Journal of Operational Research*, No.116(1999), pp.169-179.

[12] Megiddo, N., "On finding primal- and dual-optimal bases", *ORSA Journal on Computing*, Vol.3, No.1(1991), pp.63-65.

[13] Monteiro, R.D., S. Mehrotra, "A general parametric analysis approach and its implications to sensitivity analysis in interior point methods", *Mathematical Programming* No.92(1996), pp.65-82.

[14] Murty, K. G., Linear Programming, John Wiley, New York, 1983.

[15] Roos, C., T. Terlaky, J.-Ph. Vial, *Theory and Algorithms for Linear Optimization*, John Wiley & Sons, 1997.

[16] Yang, B.H., Soondal Park, "Sensitivity analysis on the cost coefficients for the Karmarkar's algorithm in linear programming", Presented on *APORS '94(June 26-29)*, Osaka, Japan, 1994.