

<논 문>

동적응답법을 이용한 다점 단순지지된 연속원통셀의 자유진동 해석

A Free Vibration Analysis of the Continuous Circular Cylindrical Shell with the Multiple Simple Supports Using the Receptance Method

이 영 신* · 한 창 환**

Young-Shin Lee and Chang-Hwan Han

(2000년 8월 4일 접수 : 2000년 10월 19일 심사완료)

Key Words: Receptance Method(동적 응답법), Energy Method(에너지법), Continuous Circular Cylindrical Shell (연속 원통셀), Modal Expansion Method(모드확장법)

ABSTRACT

The continuous circular cylindrical shells are widely used for the high performance structures of aircraft, spacecraft, missile, nuclear fuel rod shell etc.. In this paper, a method for the free vibration analysis of the continuous circular cylindrical shells with the multiple simple supports is developed by using the receptance method. With this method, the vibrational characteristics of the continuous system is analyzed by considering as a combined structure. The system receptance is also derived by the application of the equilibrium of forces and the continuity of displacements at the support points. The natural frequencies and mode shapes are calculated numerically and they are compared with the FEM results to improve the reliability of analytical solution. Numerical results on the 4-equal-span continuous circular cylindrical shell are presented in this paper.

1. 서 론

연속원통셀 구조물은 항공기, 우주비행체, 원자로, 미사일 또는 잠수함 등 고성능을 가진 구조물 뿐만 아니라 공장 또는 산업설비에 사용되는 대형 송유관, 가스관, 핵연료봉 또는 배관 등으로 많이 사용되고 있다. 이러한 구조물은 높은 하중을 받을 뿐만 아니라 진동에 노출되어 있어 설계시 구조적 안정성을 확보하기 위해 동특성에 대한 고찰이 필요하다. 즉, 공학적인 측면에서 공진으로 인한 구조물의 파괴를 방지하기

위한 진동해석이 요구된다. 원통셀에 대한 이론적 진동해석 및 실험에 대해 많은 연구가 수행되어 왔으며, 최근에는 판과 원통셀이 결합된 구조물의 진동해석도 수행되고 있다. 결합 셀구조물에 대한 연구를 살펴보면, Azimi⁽¹⁾ 등이 판이 결합된 다각형 덕트(duct)의 진동 특성을 동적 응답법(receptance method)을 이용해 해석하였고, Huang⁽²⁾ 등은 내부에 길이방향으로 판이 결합된 원통셀의 강제진동특성을 결합위치에 따라 해석하였다. 또한 Cheng⁽³⁾ 등은 내부에 판이 결합된 원통셀의 진동해석을 위해 변분원리를 이용하였다. Irie⁽⁴⁾ 등은 판이 외부에 결합된 원통셀의 진동해석을 위해 전달행렬법을 사용하였으며, 최근에 이영신⁽⁵⁾ 등이 강(steel) 또는 복합재료로 구조된 결합구조물의 자유진동특성을 해석하기 위해 이론과 진동실험을 병행하여 수행한 바가 있다. 한창환⁽⁶⁾ 등은 양단 단순지지를 갖는 원통셀의 외부에 길이방향으

* 정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계공학과

** 정회원, 한국항공우주연구소 항공사업부 소형기연구 그룹

로 사각판이 결합된 구조물에 대한 진동실험 및 FEM 해석을 통해 자유진동특성을 고찰하였다. 또한 Moskalenko⁽⁹⁾는 주기적 시스템의 진동특성을 해석하였으며, Azimi⁽¹⁰⁾ 등은 연속판에 대한 자유진동해석을 수행하였다. 그러나 지금까지 송유관, 가스관 또는 핵연료봉 등에 사용되는 다점지지된 연속원통셸의 진동해석에 대한 문헌은 찾을 수가 없었다.

따라서 본 연구에서는 다점 단순지지된 연속원통셸(continuous circular cylindrical shell)에 대한 동특성을 고찰하기 위해 진동해석을 수행하고자 하였다. 연속원통셸을 지지점에서 길이방향으로 연속적으로 결합된 원통셸의 결합구조물로 간주하고 이러한 구조물의 진동수 방정식(frequency equation)의 유도에 유용한 동적응답법을 적용하였으며, 변위 및 모멘트를 모드확장법(modal expansion method), 모드기여계수(modal participation factor) 및 Dirac Delta 함수로서 정의하였다. 특히 본 연속원통셸의 진동해석에 필요한 양단 단순지지된 원통셸의 진동수방정식을 에너지 및 Rayleigh-Ritz 법을 적용하여 유도하였다. Mathematica를 이용하여 수치해를 구하고 ANSYS 5.3을 이용해 FEM 해석을 수행하였으며 그 결과들을 상호 비교·검토하였다.

2. 수식화

2.1 원통셸의 진동수 방정식 유도

양단 단순지지 경계조건을 갖는 원통셸의 진동수 방정식을 Blevins⁽⁸⁾의 빔함수, 에너지법 및 Rayleigh-Ritz 법을 적용하여 유도한다. 진동수 방정식을 유도하기 위해 변형 에너지 U 를 식 (1)과 같이 쓸 수 있다.⁽⁷⁾

$$U = \int_{a_1} \int_{a_2} \int_{a_3} F dV \quad (1)$$

여기서 힘 F 는

$$F = \frac{1}{2} (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33} + \sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{13}\epsilon_{13} + \sigma_{23}\epsilon_{23}) \quad (2)$$

이 되고, a_1, a_2, a_3 는 곡면의 일반좌표를 나타내며, $dV = A_1 A_2 da_1 da_2 da_3$ 이다. 원통셸의 경우 $a_1 = x, a_2 = \theta, a_3 = z, A_1 = 1, A_2 = a$ 가 된다. 또한 두께가 얇기 때문에 평면응력의 상태로 가정할 수 있고, 이때 $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ 이다. σ, ϵ, τ 은 각각 수직응력, 변형률 그리고 전단응력을 말한다. 식 (1)에 변형률-변위 관계식을 대입하여 변위항으로 된 변형에너지식을 얻는다. 운동에너지 T 는 식 (3)과 같다.⁽⁷⁾

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_{a_1} \int_{a_2} [(\dot{u}_1)^2 + (\dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_3)^2] a da_1 da_2 \quad (3)$$

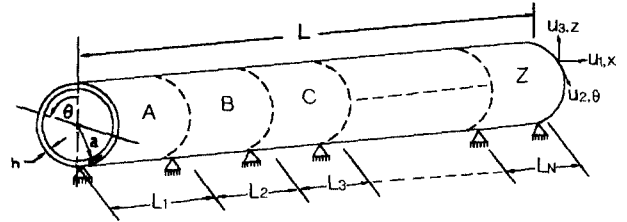


Fig. 1 Geometry and coordinate system of the continuous circular cylindrical shell simply supported at multi-positions in the axial direction.

여기서 (\cdot) 는 t 에 대한 1차미분, ρ 는 단위면적당 밀도이다. 축방향의 길이가 L 인 원통셸의 양단 단순지지 경계조건식은 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$u_2 = u_3 = M_x = N_x = 0, \text{ at } x=0, L_s \quad (4)$$

여기서 M_x 는 모멘트이다. 이 경계조건을 만족하는 빔함수 $\Phi(x)$ 를 도입하면 변위성분 u_1, u_2, u_3 은 식 (5)과 같다.

$$u_1(a_1, a_2, t) = A_s \Phi'(x) \cos n\theta \cos \omega t \quad (5-a)$$

$$u_2(a_1, a_2, t) = B_s \Phi(x) \sin n\theta \cos \omega t \quad (5-b)$$

$$u_3(a_1, a_2, t) = C_s \Phi(x) \cos n\theta \cos \omega t \quad (5-c)$$

여기서 (\cdot) 는 빔함수의 x 에 관한 1차미분, A_s, B_s, C_s 는 변위의 크기, ω 는 각고유진동수(rad/s)를 나타낸다.

식 (5)를 식 (1)과 식 (2)에 대입하면 미지수 A_s, B_s, C_s 의 항을 갖는 에너지식이 된다. 총 에너지를 변형에너지와 운동에너지의 합으로 표현할 수 있으며, Lagrange 함수 및 Rayleigh-Ritz 법을 적용하면 원통셸의 진동수 방정식을 얻을 수 있다.

$$L = U_{\max} - T_{\max} \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_s} = 0, \frac{\partial L}{\partial B_s} = 0, \frac{\partial L}{\partial C_s} = 0 \quad (7)$$

식 (6)과 식 (7)을 행렬형태로 나타내면 식 (8)과 같다.

$$\begin{bmatrix} (k_{11} - \omega^2 m_{11}) & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & (k_{22} - \omega^2 m_{22}) & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & (k_{33} - \omega^2 m_{33}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_s \\ B_s \\ C_s \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

식 (8)을 행렬형태의 일반식으로 쓰면 식 (9)와 같다.

$$[k_{mn} - \omega_{smn}^2 m_{mn}] \{X\} = 0 \quad (9)$$

여기서 k_{mn} 은 강성행렬, m_{mn} 은 질량행렬이고 $\{X\} =$

$\{A_s, B_s, C_s\}^T$ 이다. 또한 $\{X\} \neq 0$ 이므로 식 (9)가 무용해를 갖지 않기 위해서는 계수행렬식이 0이어야 한다. 즉

$$|k_{mn} - \omega_{smn}^2 m_{mn}| = 0 \quad (10)$$

이 된다. 식 (10)으로부터 원통셀의 각고유진동수 ω_s (rad/s)를 구할 수 있으며, $s=1, 2, 3$ 은 고유진동수의 식별번호(identity number)를 나타낸다. 식 (9)로부터 원통셀의 모드형상(mode shape)을 구할 수 있고, 진동 모드성분을 진폭비로 나타내면 식 (11)과 같다.

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = (A_s/C_s) \Phi'(x) \cos n\theta \quad (11-a)$$

$$U_2(\alpha_1, \alpha_2) = (B_s/C_s) \Phi(x) \sin n\theta \quad (11-b)$$

$$U_3(\alpha_1, \alpha_2) = \Phi(x) \cos n\theta \quad (11-c)$$

여기서 $U(\alpha_1, \alpha_2)$ 는 모드형상을 나타낸다.

2.2 동적응답의 일반식

연속원통셀의 진동수 방정식을 유도하기 위해 동적응답법(receptance method)을 적용하였다.⁽⁷⁾ 동적응답법은 각 독립계의 응답으로부터 결합구조물의 응답을 해석(예측)할 수 있는 방법으로서 구조물에 작용하는 하중(모멘트)에 대한 변위(기울기)의 비로 정의된다.

만약 $\{X_{Ai}\}$ 는 시스템 A, $\{X_{Bi}\}$ 는 시스템 B의 변위벡터이고, $\{F_{Ai}\}$ 는 시스템 A, $\{F_{Bi}\}$ 는 시스템 B에 작용하는 힘 벡터라고 하면 독립계 A, B 사이의 힘 및 변위는 식 (12)와 같이 된다.

$$\{X_{Ai}\} = \{\alpha_{ij}\}^T \{F_{Aj}\} \quad (12-a)$$

$$\{X_{Bi}\} = \{\beta_{ij}\}^T \{F_{Bj}\} \quad (12-b)$$

여기서 α_{ij}, β_{ij} 는 독립계 A, B 구조물의 동적응답이고, i 는 변위/기울기의 위치, j 는 하중/모멘트의 작용위치를 나타낸다. 결합부에 외력이 작용하지 않고 변위가 연속이라고 가정하면 힘 및 변위를 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{F_{Aj}\} = -\{F_{Bj}\} \quad (13-a)$$

$$\{X_{Aj}\} = \{X_{Bj}\} \quad (13-c)$$

따라서 식 (12), (13)으로부터 식 (14)를 얻을 수 있다.

$$[\alpha_{ij} + \beta_{ij}]\{F_{Aj}\} = 0 \quad (14)$$

식 (14)는 $\{F_{Aj}\} \neq 0$ 이므로 무용해를 갖지 않기 위해서는 계수행렬식이 0이어야 한다. 따라서 결합구조물의 진동수 방정식은 식 (15)와 같이 된다.

$$|\alpha_{ij} + \beta_{ij}| = 0 \quad (15)$$

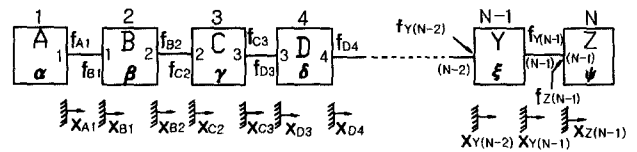


Fig. 2 Block diagram of forces and displacements of a N-span continuous circular cylindrical shell for system A, B, ..., Z, receptance $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \psi$, forces f , displacements x .

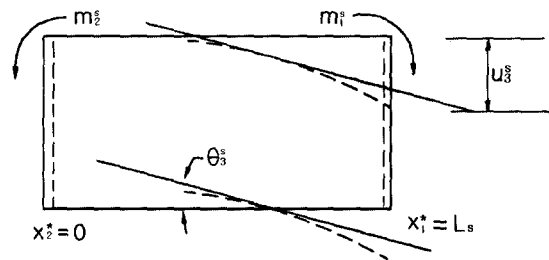


Fig. 3 Moments, displacements and slopes of the circular cylindrical shell simply supported at two end edges

2.3 연속원통셀의 진동수 방정식의 유도

Fig. 1은 전체길이가 L 이며 N 개의 동일 스패(span)를 갖는 다점 단순지지된 연속원통셀의 기하학적 형상과 좌표계 x, θ, z 를 보여 주고 있다. 여기서 L_1, L_2, \dots, L_N 은 각 스패길이, h 는 두께, a 는 평균반경, u_1, u_2, u_3 는 x, θ, z 방향의 변위를 나타낸다. 연속원통셀의 진동수 방정식은 N 개의 단일스패(single span) 사이의 힘의 평형과 변위의 연속조건으로부터 유도된다. 각 지지점에서의 경계조건은 식 (4)와 같이 적용된다.

Fig. 2에서 A, B, C, ..., Z는 각 시스템을 나타내고 $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \psi$ 는 각 시스템의 동적응답을 나타낸다. 여기서 $f_{A1}, f_{B1}, f_{B2}, f_{C1}, f_{C2}, f_{C3}, \dots, f_{Y(N-2)}, f_{Y(N-1)}, f_{Z(N-1)}$ 들은 각 시스템에 작용하는 힘들이고, $x_{A1}, x_{B1}, x_{B2}, x_{C2}, \dots, x_{Y(N-2)}, x_{Y(N-1)}, x_{Z(N-1)}$ 들은 변위를 나타낸다. 따라서 N 스패 사이에 작용하는 힘의 관계는 힘의 평형조건으로부터 식 (16)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{A1} &= -f_{B1} \\ f_{B2} &= -f_{C2} \\ f_{C3} &= -f_{D3} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_{Y(N-1)} &= -f_{Z(N-1)} \end{aligned} \quad (16)$$

그리고 연속조건으로부터 변위는 식 (17)과 같이 쓸 수 있

다.

$$\begin{aligned} x_{A1} &= x_{B1} \\ x_{B2} &= x_{C2} \\ x_{C3} &= x_{D3} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_{Y(N-1)} &= x_{Z(N-1)} \end{aligned}$$

따라서 조화응답(harmonic response)은 동적응답을 이용해 식 (18)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} X_{A1} &= \alpha_{11} F_{A1} \\ X_{B1} &= \beta_{11} F_{B1} + \beta_{12} F_{B2} \\ X_{B2} &= \beta_{21} F_{B1} + \beta_{22} F_{B2} \\ X_{C2} &= \gamma_{22} F_{C2} + \gamma_{23} F_{C3} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ X_{Y(N-1)} &= \xi_{(N-1)(N-2)} F_{Y(N-2)} + \xi_{(N-1)(N-1)} F_{Y(N-1)} \\ X_{Z(N-1)} &= \psi_{(N-1)(N-1)} F_{Z(N-1)} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 $F_{A1}, F_{B1}, F_{B2}, F_{C2}, \dots, F_{Y(N-2)}, F_{Y(N-1)}, F_{Z(N-1)}$ 는 조화 모멘트의 크기(harmonic moment magnitude), $X_{A1}, X_{B1}, X_{B2}, X_{C2}, \dots, X_{Y(N-2)}, X_{Y(N-1)}, X_{Z(N-1)}$ 는 조화응답의 크기(harmonic displacement magnitude)를 나타낸다. 따라서 식 (16), 식 (17) 및 식 (18)로부터 식 (19)와 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & -\beta_{12} & 0 & 0 & \dots \\ -\beta_{21} & \beta_{22} + \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 & \dots \\ 0 & -\gamma_{32} & \gamma_{33} + \delta_{33} & -\delta_{34} & \dots \\ 0 & 0 & -\delta_{43} & -\delta_{44} + \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \dots \dots -\xi_{(N-1)(N-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{A1} \\ F_{B2} \\ F_{C3} \\ F_{D4} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{X(N-2)} \\ F_{Y(N-1)} \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

여기서 식 (19)가 무용해를 갖지 않기 위해서는 계수 행렬식이 0이어야한다. 따라서 연속원통셀의 진동수 방정식은 식 (20)과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & -\beta_{12} & 0 & 0 & \dots \\ -\beta_{21} & \beta_{22} + \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 & \dots \\ 0 & -\gamma_{32} & \gamma_{33} + \delta_{33} & -\delta_{34} & \dots \\ 0 & 0 & -\delta_{43} & -\delta_{44} + \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \dots \dots -\xi_{(N-1)(N-2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\xi_{(N-2)(N-1)} \\ \xi_{(N-1)(N-1)} + \psi_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

2.4 연속원통셀의 동적응답

길이방향의 변위는 횡방향의 변위에 비해 매우 작으므로 무시될 수 있고, 모멘트에 의한 변위로서 진동계의 전체 횡변위를 모드확장법(modal expansion method)을 이용해 나타낼 수 있다. 임의 위치에서의 동적 변위를 얻기 위한 모드기여식(modal participation factor equation)은 식 (21)과 같이 쓸 수 있다.⁽⁷⁾

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k \eta_k = F_k^* e^{j\omega t} \quad (21)$$

여기서 η_k (modal participation factor)는 모드기여계수이고, ζ_k 는 모달감쇠계수로서 식 (22)와 같다.

$$\zeta_k = \frac{\lambda}{2\rho h \omega_k} \quad (22)$$

λ 는 감쇠계수(damping factor), ρh 는 단위면적당의 질량밀도(mass density), ω_k 는 k 번째 모드의 고유진동수이다. Fig. 3은 양단 단순지지된 원통셀에서 $x_1^* = L_s, x_2^* = 0$ 에 작용하는 모멘트 m_1^s, m_2^s 그리고 횡변위 u_3^s 및 기울기 θ_3^s 를 나타낸다. m_1^s, m_2^s 는 원주방향으로 분포된 선모멘트(line moment)이다. 이를 Dirac Delta함수로 나타내면 식 (23) 및 식 (24)와 같이 나타낼 수 있다.

$$m_1^s(a_1, a_2, t) = M_1^s(a_1, a_2) \delta(x - x_1^*) e^{j\omega t} = M_{01}^s \cos(p\theta) \delta(x - x_1^*) e^{j\omega t} \quad (23)$$

$$m_2^s(a_1, a_2, t) = M_2^s(a_1, a_2) \delta(x) e^{j\omega t} = M_{02}^s \cos(p\theta) \delta(x) e^{j\omega t} \quad (24)$$

여기서 M_{01}, M_{02} 는 단위길이당 모멘트이고, p 는 정수이다. x 방향의 굽힘모멘트(bending moment)는 $M_{xx}^s(x, \theta) = M_1^s(x, \theta) - M_2^s(x, \theta)$ 이다. 식 (21)의 F_k^* 는 식(25)와 같다.⁽²⁾

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{a_1} \int_{a_2} \left[q_1 U_{1k} + q_2 U_{2k} + q_3 U_{3k} + \frac{U_{1k}}{2A_2} \frac{\partial T_n}{\partial a_2} - \frac{U_{2k}}{2A_1} \frac{\partial T_n}{\partial a_1} + \frac{U_{3k}}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial a_1} + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial a_2} \right) \right] A_1 A_2 da_1 da_2 \quad (25)$$

여기서

$$N_k = \int_{a_1} \int_{a_2} \left[\sum_{i=1}^3 U_{ik}^2 \right] a da_1 da_2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (26)$$

이 되고, 모멘트만 작용하므로 하중은 $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ 이 된다. T_1, T_2, T_n 은 각각 a_1, a_2 및 수직방향의 분포 모멘트이고, U_{ik} 는 각 방향의 모드형상이다. 횡변위를 식 (27)과 같이 모달변위의 합으로 표현할 수 있다.

$$u_i^s(a_1, a_2, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(t) U_{ik}(a_1, a_2) e^{j\omega t}, \quad i=1,2,3 \quad (27)$$

여기서 모달감쇠를 무시하면 모드기여계수 $\eta_k(t)$ 는 식 (28)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta_k(t) = \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2)} e^{j\omega t} \quad (28)$$

또한 내평면 변위를 무시하면 U_{1k}, U_{2k} 는 0이 되므로 횡변위는 식 (29)와 같이 된다.

$$u_3^s(a_1, a_2, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2)} U_{3k}(a_1, a_2) e^{j\omega t} \quad (29)$$

여기서 ω_k 는 k 번째 모드에 대한 원통셀의 고유진동수이고, ω 는 연속원통셀의 고유진동수이다. 원통셀의 변위를 구하기 위해 F_k^* 를 식 (25)로부터 식 (30), 식 (31)과 같이 쓸 수 있다.

$$F_k^* |_{M_1} = -\frac{2M_{01}m}{\rho h L_s^2} \left[\cos\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \right]_{x=x_1^*} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos p\theta d\theta \quad (30)$$

$$F_k^* |_{M_2} = -\frac{2M_{02}m}{\rho h L_s^2} \left[\cos\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \right]_{x=x_2^*} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos p\theta d\theta \quad (31)$$

$F_k^* |_{M_1}$ 및 $F_k^* |_{M_2}$ 는 $n \neq p$ 일 때 0이므로 $n = p$ 일 때 식 (32) 및 식 (33)과 같이 쓸 수 있다.

$$F_k^* = F_k^* |_{M_1} - F_k^* |_{M_2} \quad (32)$$

$$F_k^* |_{M_i} = -\frac{2M_{0i}\pi m}{\rho h L_s^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right)_{x=x_i^*}, \quad i=1,2 \quad (33)$$

여기서 $F_k^* |_{M_1}$ 는 $x_1^* = L_s$, $F_k^* |_{M_2}$ 는 $x_2^* = 0$ 에서 값이다. 따라서 변위는 $u_3^s(x, \theta, t) = u_3^s(x, \theta, t) |_{M_1} - u_3^s(x, \theta, t) |_{M_2}$ 이 되며, 각각 식 (34), (35)와 같이 쓸 수 있다.

$$u_3^s(x, \theta, t) |_{M_1} = -\frac{2M_{01}}{\rho h L_s^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi m \cos(m\pi)}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)}$$

$$\sin\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \cos(n\theta) e^{j\omega t} \quad (34)$$

$$u_3^s(x, \theta, t) |_{M_2} = -\frac{2M_{02}}{\rho h L_s^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi m \cos^2(m\pi)}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \cos(n\theta) e^{j\omega t} \quad (35)$$

기울기는 식 (34), (35)를 x 에 관하여 미분하여 식 (36), 식 (37)과 같이 쓸 수 있다.

$$\theta_3^s(x, \theta, t) |_{M_1} = -\frac{2M_{01}}{\rho h L_s^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2 m^2 \cos(m\pi)}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \cos(n\theta) e^{j\omega t} \quad (36)$$

$$\theta_3^s(x, \theta, t) |_{M_2} = -\frac{2M_{02}}{\rho h L_s^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2 m^2 \cos^2(m\pi)}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \cos(n\theta) e^{j\omega t} \quad (37)$$

따라서 시스템 A의 동적응답(receptance) $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ 는 식 (38)과 같이 되며,

$$\alpha_{11} = \frac{\theta_3^s(x=L_s, \theta, t) |_{M_1}}{M_1^s(x, \theta, t)} \quad (38-a)$$

$$\alpha_{12} = \frac{\theta_3^s(x=L_s, \theta, t) |_{M_2}}{M_2^s(x, \theta, t)} \quad (38-b)$$

$$\alpha_{21} = \frac{\theta_3^s(x=0, \theta, t) |_{M_1}}{M_1^s(x, \theta, t)} \quad (38-c)$$

$$\alpha_{22} = \frac{\theta_3^s(x=0, \theta, t) |_{M_2}}{M_2^s(x, \theta, t)} \quad (38-d)$$

동적응답은 식 (39)와 같이 된다.

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = -\frac{2}{\rho h L_s^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2 m^2 \cos^2(m\pi)}{(\omega_{mp}^2 - \omega^2)}, \quad (39-a)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = -\frac{2}{\rho h L_s^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^2 m^2 \cos(m\pi)}{(\omega_{mp}^2 - \omega^2)} \quad (39-b)$$

여기서 $\Psi_c^* = -\frac{2\pi^2}{\rho h L_s^3}$, $Z = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \cos^2(m\pi)}{(\omega_{mp}^2 - \omega^2)}$, $Z^* =$

$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \cos(m\pi)}{(\omega_{mp}^2 - \omega^2)}$ 라고 놓으면, 동일한 스패 길이가 (span length)를 갖는 경우 동적응답은 식 (40)과 같이 간단하게 된다.

$$\alpha_{11} = \beta_{11} = \beta_{22} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = \dots = \xi_{N-2(N-2)} = \xi_{N-1(N-1)} = \phi_{N-1(N-1)} = \Psi_c^* Z \quad (40-a)$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \dots = \xi_{N-2(N-1)}$$

$$= \xi_{(N-1)(N-2)} = \Psi_c^* Z^* \quad (40-b)$$

따라서 연속원통셸의 진동수 방정식은 식 (20) 및 (40)으로부터 식 (41)과 같이 유도된다.

$$\begin{vmatrix} 2Z & -Z^* & 0 & 0 & & & & 0 \\ -Z^* & 2Z & -Z^* & 0 & & & & 0 \\ 0 & -Z^* & 2Z & -Z^* & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & -Z^* & 2Z & & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -Z^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 2Z \end{vmatrix} = 0 \quad (41)$$

3. 수치해 및 결과 고찰

양단 단순지지된 원통셸의 고유진동수는 식 (10) 및 식 (41)으로부터 Mathematica 3.0을 이용하여 수치적으로 구하였다. 해석모델의 형상은 Fig. 4에서 보는 바와 같이 시스템 A, B, C, D의 스펠길이($L_1=L_2=L_3=L_4$)가 0.25 m, 평균반경(a)이 0.075 m, 두께(h)는 0.0024 m 그리고 전체길이가 1.0 m인 다점 단순지지된 연속원통셸이다. 재료는 강(steel)이며, 재료의 물성치는 탄성계수(E)가 207 GPa, 전단탄성계수(G)가 80 GPa, 밀도(ρ)가 7850 kg/m³ 그리고 포아송비(ν)가 0.3이다.

원통셸의 진동수 방정식은 진동수 파라메타(ω_s^2)에 대한 3차식이므로 고유진동수는 방정식의 근 중에서 3개의 양의 값($s=1, 2, 3$)이 된다. 이중에서 $s=2, 3$ 값은 $s=1$ 인 값보다 상당히 큰 값을 가지므로 공학적으로 낮은 진동수에 관심이 있는 경우 고려하지 않을 수 있다. Fig. 5는 식 (10)으로부터 구한 양단 단순지지 원통셸의 고유진동수의 변화를 도시한 것이다. 여기서 m 은 길이방향의 반파수, n 은 원주방향의 파수를 나타낸다. $s=1, m=1, 2, 3$ 일 때 n 이 0~10으로 증가에 따라 고유진동수는 높은 진동수에서 최저 고유진동수에 이르고 다시 증가하는 경향을 보이고 있다. 원통셸

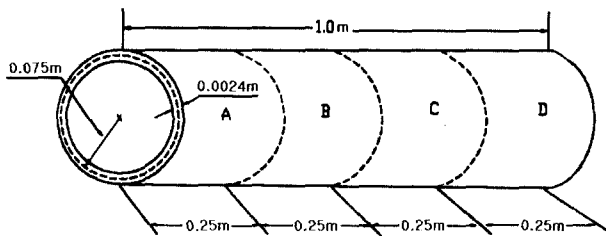


Fig. 4 Analytical model of the continuous circular cylindrical shell with 4-equal-span lengths, $L_1=L_2=L_3=L_4=0.25$ m, $a=0.075$ m, $h=0.0024$ m.

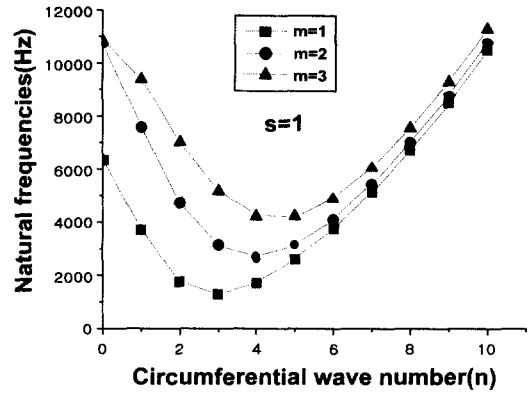


Fig. 5 Variations of natural frequencies of the simply supported circular cylindrical shell
 m : Axial half-wave number
 n : Circumferential wave number

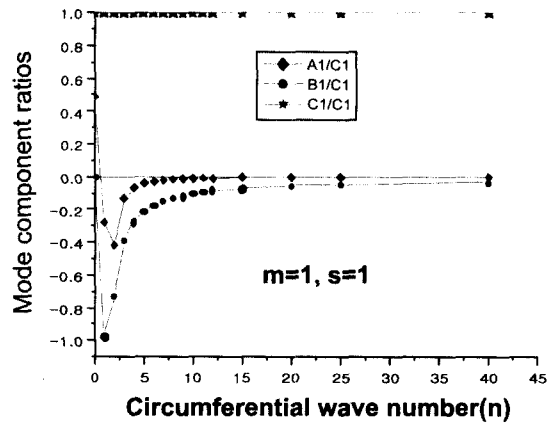


Fig. 6 Mode component ratios of the simply supported circular cylindrical shell to circumferential wave numbers for $m=1$

의 최저(기본) 진동수(fundamental frequency)는 모드(1, 3)에서 나타나며 1279.3 Hz이다. 그리고 m 의 증가에 따라 최저 고유진동수도 증가하고, 최저점도 우측으로 이동하고 있다. Fig. 6은 $m=1, s=1$ 일 때, 즉 ω_{11} 에서 n 값에 따른 모드 성분비의 변화를 보여주고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 C_1/C_1 은 1이고 $A_1/C_1, B_1/C_1$ 은 n 의 증가에 따라 0에 수렴하고 있다.

연속원통셸의 동적응답은 식 (39)로부터 구한 시스템 A의 동적응답(a_{ij})를 이용하여 구한다. 동일 스펠길이를 갖고 각 지지점에서 양단 단순지지의 경계조건을 가지므로 다른 스펠에서의 동적응답도 간단하게 구할 수 있었다. 연속원통셸의 고유진동수 및 모드를 Table 1에 제시하였고, 이론해와 비교 검토하기 위한 FEM 해석결과도 같이 병행하여 제시하였다. FEM 해석은 ANSYS 5.3 상용프로그램으로 수행하였고,

Table 1 Comparisons of the natural frequencies with analytical results and FEM results for the simply supported continuous circular cylindrical shell

No.	Analytical Results	FEM Results		Error (%)
	Freq.(Hz)	Freq.(Hz)	Mode(m,n)	
1st	1295.9	1259.6	(1, 3)	2.8
2nd	1528.0	1697.0	(1, 4)	11.0
3rd	1763.5	1754.9	(1, 2)	0.5
4th	2363.4	2575.0	(1, 5)	9.0
5th	2725.0	2663.0	(2, 4)	2.3
6th	2925.0	3095.0	(2, 5)	5.8
7th	3141.9	3108.4	(2, 3)	1.1
8th	3358.9	3664.6	(1, 1)	9.1
9th	3739.0	3713.3	(1, 6)	0.7
10th	3957.0	4061.5	(2, 6)	2.6
11th	4200.0	4160.9	(3, 5)	0.9
12th	4460.0	4227.6	(3, 4)	5.2
13th	4731.0	4653.7	(2, 2)	1.6

사각형 요소 4절점을 갖는 Shell 63 탄성요소를 사용하여 모델링하였다.

Table 1에서 고유진동수는 오름차순으로 나타냈고, 길이방향의 반파수 (m)는 3차까지 원주방향의 파수 (n)는 6차까지 모드를 고찰하였다. 이들의 모드형상은 Fig. 9에서 보여 주고 있다. 여기서 연속원통셸의 최저 고유진동수는 이론해가 1,295.9 Hz, FEM 해가 1,259.6 Hz로서 2.8%의 오차를 보이고 있으며, 이외의 고유진동수의 오차도 11%이내에 있으므로 비교적 서로 잘 일치된다고 볼 수 있다. Fig. 7은 연속원통셸이 모드 (1, 3)에서 나타나는 길이방향의 4개의 모드형상을 보여주고 있으며 (a) 및 (c)는 일정한 진폭의 굽힘 모드형상(bending mode shape)을 보이고 있고, Fig. 7(b) 및 (d)는 스펠사이의 진폭비가 다른 굽힘 모드형상이 나타나는데 이것은 단순지지된 원통셸에서는 나타나지 않는 구속영향에 의한 진동모드형상이다. Fig. 7(a)는 최저 고유진동수에서 나타나는 굽힘 모드형상이다.

Fig. 8은 연속원통셸이 스펠(span)수에 따라 변화하는 최저(기본)고유진동수의 경향을 고찰하기 위해 제시된 이론해 및 FEM 해석결과이다. 결론적으로 전체길이와 불변일 때 중간지지(intermediate support), 즉 다점지지로 인한 셸의 굽힘강성(bending stiffness)이 최저(기본)고유진동수에 영향을 주고 있다. 그래프에서 1개와 4개의 스펠을 갖는 경우에 대하여 이론해를 비교해 보면 두 경우 약 980 Hz의 차이를 보이고 있다. 모드형상의 경우는 스펠길이에 따라 길이방향 또는 원주방향으로 지배적인 모드가 변하므로 스펠의 길이도

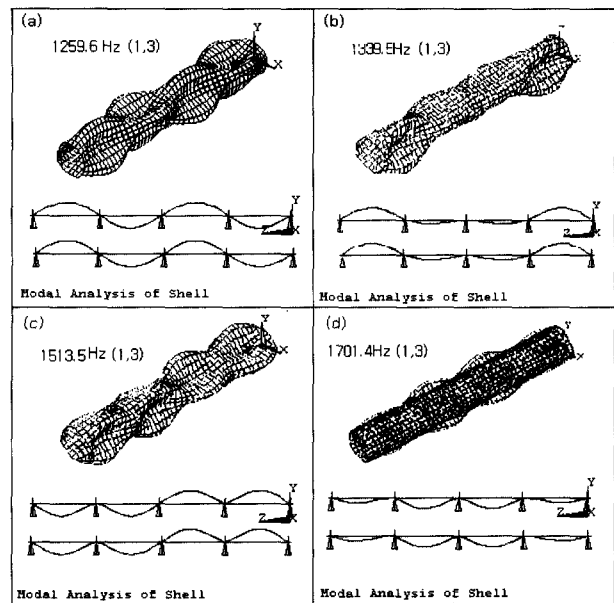


Fig. 7 Vibration mode shapes of the continuous circular cylindrical shell with 4-equal-span length at mode (1,3)

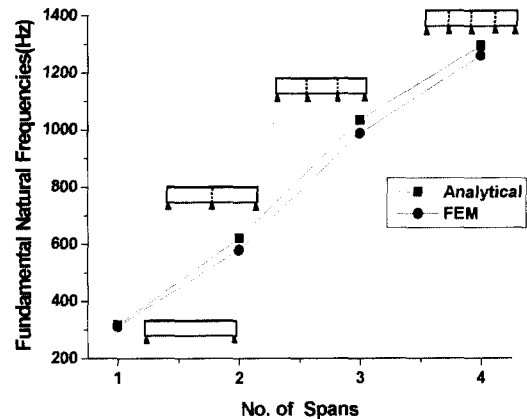


Fig. 8 Variations of fundamental natural frequencies of the continuous circular cylindrical shell with increasing the number of spans for analytical results and FEM results

고유진동수에 많은 영향을 줄 것으로 예측된다. 또한 Fig. 8에서 이론해의 결과가 FEM 해석결과보다 다소 높은 경향이 있고, 고유진동수의 경우 비교적 잘 일치하고 있다.

Fig. 9는 4개의 동일 스펠 길이를 갖는 다점 단순지지된 연속원통셸의 모드형상을 보여 주고 있다. 여기서 (a)는 3차원 모드형상, (b)는 길이방향의 모드형상, (c)는 원주방향의 모드형상을 나타낸다. 모드의 수는 어느 스펠에서나 동일하게 나타난다.

Fig. 9(i), (ii), (iii)은 $m=1, 2, n=3, 5$ 일 때 고유진동수 (f)에 대한 대칭모드형상(symmetric mode shape)을

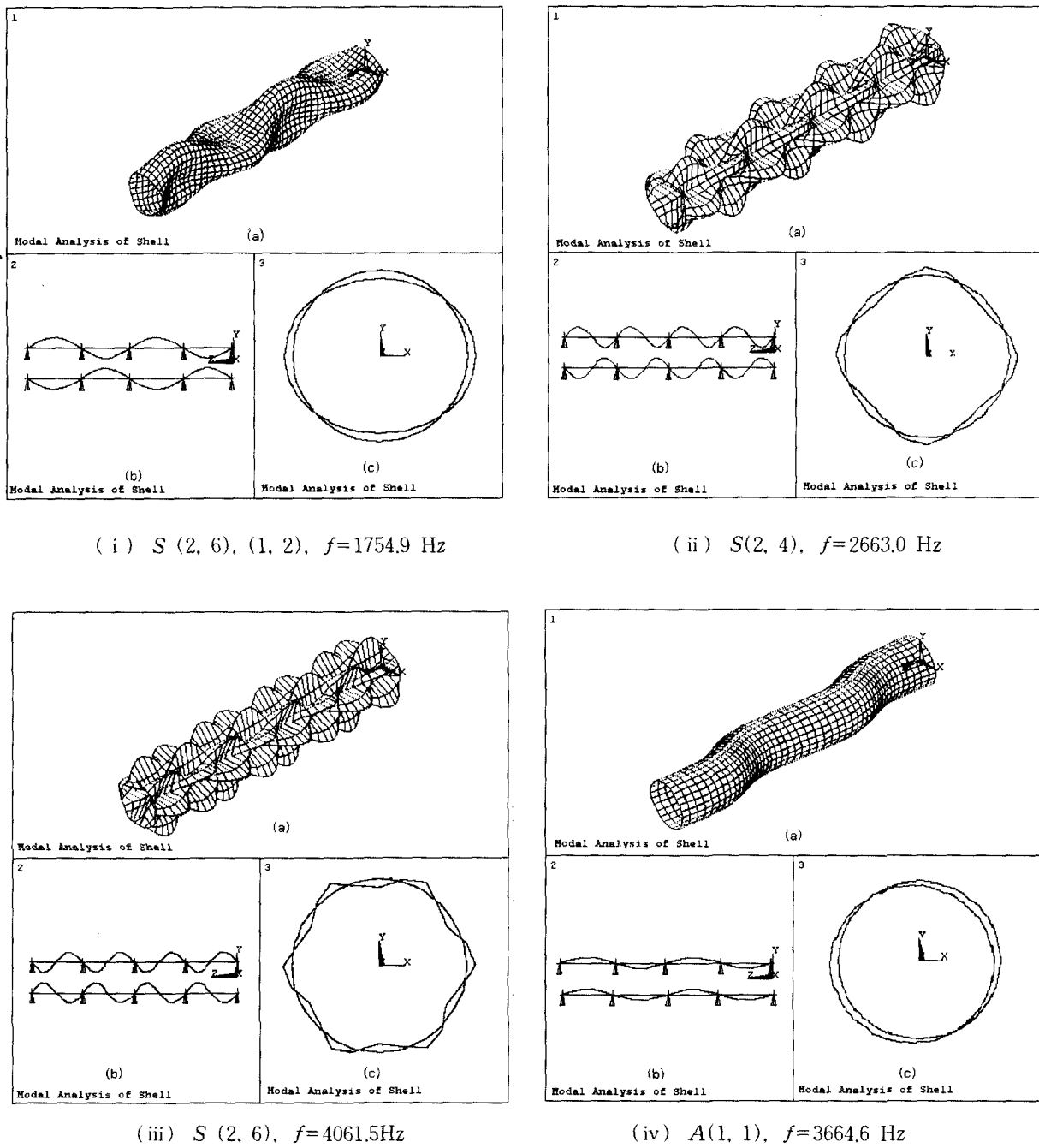
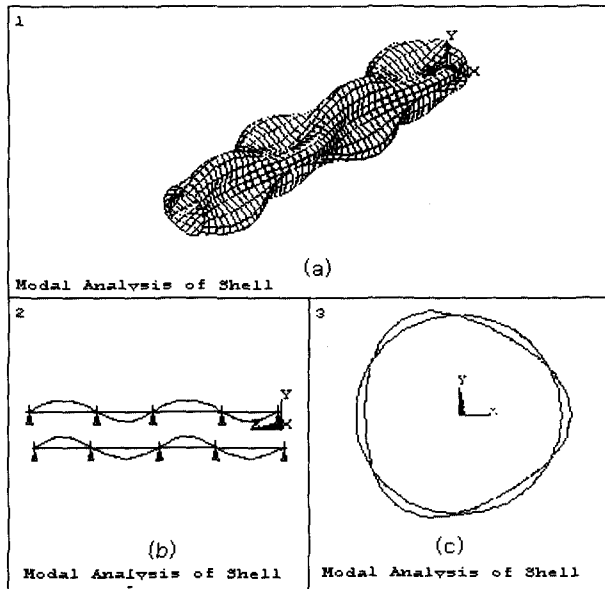


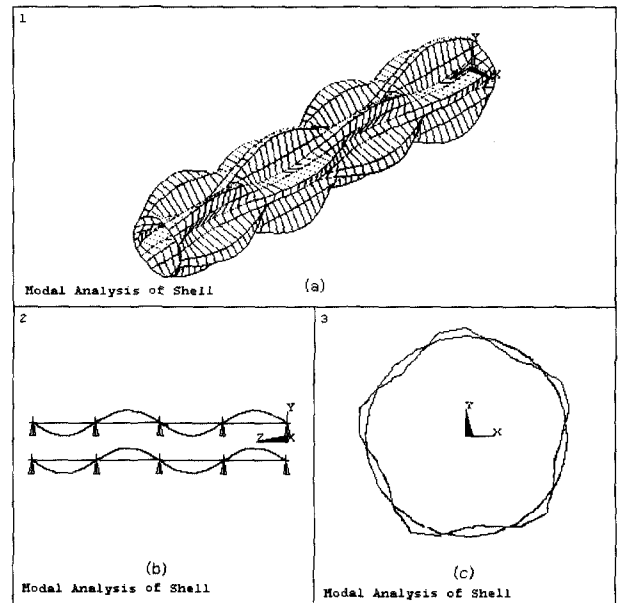
Fig. 9 Mode shapes of the continuous circular cylindrical shell from ANSYS, $m=1, 2$. $n=1\sim 5$, S : symmetric mode, A : Antisymmetric mode, f : natural frequency

보여주고 있으며, Fig. 9(iv), (v), (vi), (vii) 및 (viii)은 역대칭 모드형상(antisymmetric mode shape)으로 길이방향의 굽힘모드를 보이고 있다. 특히 Fig. 9(v)는 최저고유진동수 $f=1259.6$ Hz에서 나타나는 모드 (1, 3)인 역대칭 모드형상

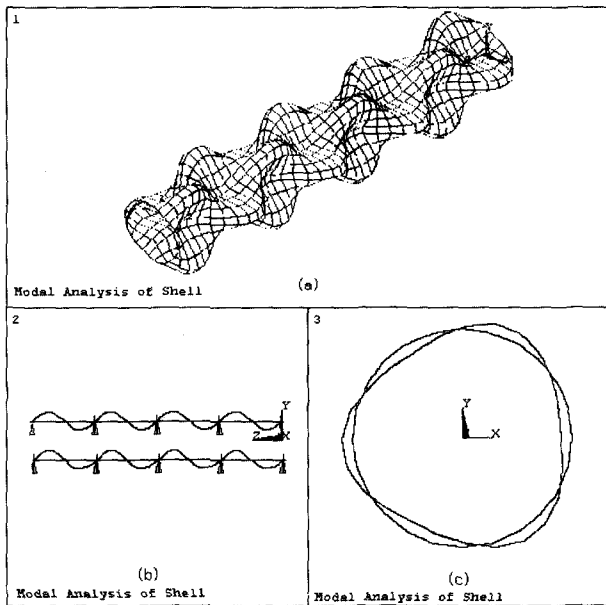
이다. 연속원통셸의 경우도 단순 원통셸과 같이 대칭(symmetric mode) 및 역대칭(Antisymmetric mode) 모드형상이 나타난다.



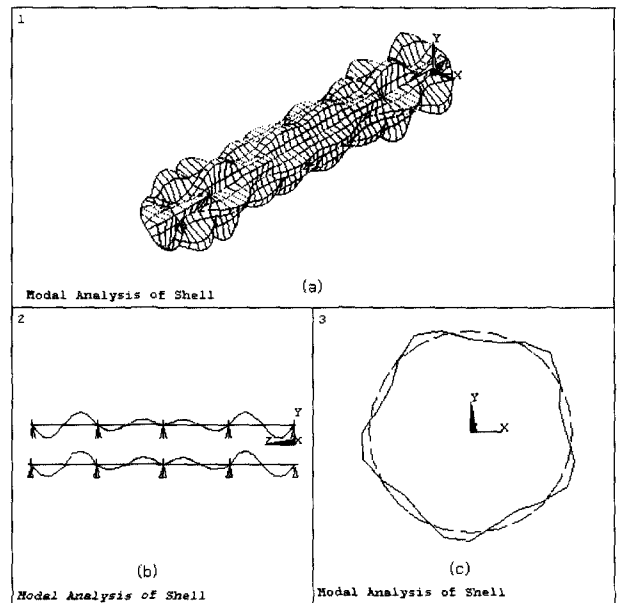
(v) $A(1, 3)$, $f=1259.6$ Hz



(vi) $A(1, 5)$, $f=2575$ Hz



(vii) $A(2, 3)$, $f=3108.4$ Hz



(viii) $A(2, 5)$, $f=3095$ Hz

Fig. 9 Mode shapes of the continuous circular cylindrical shell from ANSYS, $m=1\sim 2$, $n=1\sim 5$, S : symmetric mode, A : Antisymmetric mode, f : natural frequency

4. 결론

본 논문에서는 산업시설 또는 공장 등에서 많이 사용되는 송유관, 가스관, 핵연료봉 또는 항공기, 미사일 등의 동체와 같은 구조물의 진동특성을 연구하기 위해 다점 단순지지된 연속원통셸의 진동특성을 고찰하였다. 우선 연속원통셸의 고유진동수를 구하기 위해 에너지 법(energy method) 및 Rayleigh-Ritz 법을 적용하여 원통셸에 대한 진동수 방정식을 유도하고, 모드확장법에 의해 힘과 변위를 정의하고 동적응답법(receptance method)을 적용하여 연속원통셸의 진동수 방정식을 유도하였다. 본 연구의 해석결과는 다음과 같다.

(1) 이론해와 FEM 해석을 통해 연속원통셸의 고유진동수를 구하고 구조물의 동적거동을 알아보았다. 최저 진동수의 경우 모드(1, 3)에서 이론해가 1295.6 Hz이고, FEM이 1259.6 Hz로 각각 나타났으며, 오차는 2.8%를 보였다. 다른 고유진동수에서도 최고 11% 이내의 오차를 보이고 있다.

(2) 다점 단순지지된 연속원통셸은 지지점의 수(스팬의 수)에 따라 고유진동수에 많은 영향을 받는다. 이것은 지지점에서의 구속에 의한 굽힘강성의 영향으로 해석된다. 따라서 연속셸 구조물의 진동특성 고찰시 이러한 조건들이 고려되어야 할 것이다.

(3) 수치적 계산시 특성방정식의 행렬크기(size)가 증가하면 계산이 복잡하고 시간이 많이 소요되나 스펠수의 증가는 계산에 영향을 많이 주지 않는다.

(4) FEM 해석을 통하여 이론해와 비교·검토함으로써 이론해의 신뢰도를 높이고자 하였으며, 향후 보다 높은 신뢰도 확보를 위해 진동실험도 수행하고자 한다.

참고 문헌

(1) Azimi, S., Hamilton, J. F. and Soedel, W., 1986, "Natural Frequencies and Modes of Cylindrical Polygonal Ducts Using Receptance Methods," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 109, No. 1, pp. 79~88.

(2) Huang, D. T. and Soedel, W., 1993, "Study of the Forced Vibration of Shell-Plate Combinations Using the Receptance Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166, No. 2, pp. 341~369.

(3) Missaoui, J., Cheng, L. and Richard, M. J., 1995, "Free and Forced Vibration of a Cylindrical Shell with a Floor Partition," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 190, No. 1, pp. 21~40.

(4) Irie, T., Yamada, G. and Kobayashi, Y., 1985, "Natural Frequencies of Circular Cylindrical Shell with Longitudinal Exterior Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 101, No. 2, pp. 257~261.

(5) 이영신, 최명환, 1999, "내부판 구조물이 결합된 강 및 평직복합재료 원통셸의 구조진동 특성연구," *한국소음진동학회지*, Vol. 9, No. 1, pp. 149~162.

(6) 한창환, 이영신, 1999, "외부에 사각판이 결합된 원통셸의 자유진동해석," *한국소음진동공학회, 추계학술대회논문집*, pp. 402~407.

(7) Soedel, W., 1993, "Vibrations of Shells and Plates," Marcel Dekker, Inc., New York, Second Edition.

(8) Blevins, R. D., 1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape," Van Nostrand Reinhold Co., New York.

(9) Moskalenko, V. N., 1975, "Frequency Spectra and Mode of Free Vibrations of Doubly Periodic Systems," *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 39, pp. 503~510.

(10) Azimi, S., Hamilton, J. F. and Soedel, W., 1984, "The Receptance Method Applied to the Free Vibration of Continuous Rectangular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 93, No. 1, pp. 9~29.

(11) Huang, D. T. and Soedel, W., 1993, "Natural Frequencies and Mode Shapes of a Circular Plate Welded to a Circular Cylindrical Shell at Arbitrary Axial Positions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 163, No. 3, pp. 403~427.

(12) 이영신, 김영완, 1996, "복합재료 원통셸의 고유진동수 및 좌굴하중에 대한 직교보강 특성연구," *한국소음진동공학회지*, Vol. 6, No. 4, pp. 457~467.

(13) 김영완, 이영신, 1999, "사각개구부를 갖는 링보강원통셸의 진동해석," *대한기계학회논문집*, Vol. 23, No. 11, pp. 2040~2049.

(14) 이영신, 김영완, 1998, "회전운동을 고려한 Cutout이 있는 복합재료 원통셸의 진동해석 및 최적설계," *한국소음진동공학회지*, Vol. 8, No. 3, pp. 467~476.

(15) 이영신, 최명환, 신도섭, 1999, "단순지지된 Steel 및 GFRP 복합재료 원통셸의 자유진동특성," *한국소음진동학회지*, Vol. 9, No. 2, pp. 273~284.

(16) Yim, J. S., Sohn, D. S. and Lee, Y. S., 1998, "Free Vibration of Clamped-Free Circular Cylindrical Shell with a Plate Attached at an Arbitrary Axial Position," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 213, No. 1, pp. 75~88.

(17) Lee, Y. S. and Kim, Y. W., 1998, "Vibration

Analysis of the Rotating Composite Cylindrical Shell with Orthogonal Stiffness," *Computers and Structures*, Vol. 69, No. 2, pp. 271~281.

(18) Lee, Y. S. and Kim, Y. W., 1999, "Nonlinear Free Vibration Analysis of the Rotating Hybrid Cylindrical Shells," *Computers and Structures*, Vol. 70, No. 2, pp. 161~168.

(19) Lee, Y. S. and Kim, Y. W., 1999, "The Effect of Boundary Conditions on the Natural Frequencies for the Rotating Composite Cylindrical Shells with Orthogonal Stiffeners," *Advances in Engineering Software*, Vol. 30, No. 9~11, pp. 649~655.