

절점과 요소의 동시 생성을 위한 삼각 요소 알고리즘

천재홍*, 양현익**

Triangular Mesh Generation Algorithm for Generating Nodes and Triangular Elements Concurrently

Chon, J. H.* and Yang, H. I.**

ABSTRACT

For last 20 years, a number of researches and developments on finite element mesh generation has been carried out and most of them are composed of node generation part and mesh generation part. However these algorithms are inefficient in mesh generation process and difficult to control the shape of elements when comparing with the generation of nodes and elements concurrently. In this study, therefore, an algorithm is proposed to generate nodes and elements concurrently for various two-dimensional objects having multiple holes. Inner node generation is performed by choosing three consecutive boundary nodes and comparing them with other close boundary nodes. As soon as inner nodes are determined, element generation is conducted based on the comparison of the distances among the generated inner nodes, three consecutive boundary nodes and other close boundary nodes. the generated element nodes become new boundary nodes for further repeated process. The processes are repeated through out each region until three consecutive boundary nodes finally form a triangular element.

Key words : Three Consecutive Boundary Nodes, New Boundary Nodes

1. 서 론

기존의 유한 요소생성 알고리즘은 대부분 대상 영역에서 절점 생성이 완료된 다음에 요소가 생성되는 방법으로 구성되어 있다. 지금까지 널리 알려진 절점 생성 알고리즘으로는 물체의 경계 내에 균일한 간격의 절점을 생성시킨 후, 요소의 크기에 맞춘 사각 격자망을 대상영역에 씌워서 절점의 위치를 조정하는 Cavendish 절점 생성법^{1,2}과 요소의 크기와 같은 간격을 갖는 수평선들을 물체의 경계와 교차시킨 다음, 대상영역 내부의 각 선분을 다시 요소크기의 간격으로 절점을 생성시키는 Lo의 절점 생성법³, 다음으로 영역 내부에 인력과 척력이 작용하면서 점성을 가진 이상적인 비누 거품을 채워서 각 거품의 중심을 절점으로 취하는 Shimada 절점 생성법⁴ 등이

있다. 이들 방법들은 대부분 절점을 생성시킨 후, 요소생성을 수행하게 된다. 특히 삼각화 알고리즘의 대표적인 방법인 Delaunay 삼각화^{5,6}는 먼저 영역 내에 절점들을 생성시킨 다음에 최적의 삼각형 요소로 구성하게 하는 알고리즘이다. 하지만 이 알고리즘은 삼각화에 필요한 최소 절점들을 생성시킴과 동시에 삼각화를 수행하지 않기 때문에 이중적으로 계산이 될 뿐만 아니라, 만약 영역내의 절점수가 N개일 때 삼각 요소 하나를 생성하려면 미리 계산되어야 할 $N*(N-1)*(N-2)$ 개의 삼각요소들 중에서 택해야 하므로 계산 속도면에서 비효율적이다.

최근에 이민철 등⁷은 새로운 분할법에 의거한 삼각 요소망 자동 생성에 대하여 연구하였는데 삼각화는 기존의 회로법^{8,9,10}을 이용하였다. 이들은 경계분할의 경우 주어진 형상이 오목한 경우 볼록한 형상으로 분할한 후 각각의 형상에 대한 내부 형성각을 분할하는 방법을 제시하였다. 이러한 회로법의 장점은 절점과 요소를 나누어 생성하지 않고 바로 요소

*한양대학교 기계설계학과

**중신회원, 한양대학교 기계공학과

를 생성할 수 있다는 점이고 단점으로는 초기조건(요소 길이, 요소밀도 변화 등등)에 따라 후반부에 생성되는 요소의 질이 떨어질 수도 있다는 점이다.

따라서 본 연구에서는 상기한 문제점들을 보완하고자 다수의 홀을 포함하고 임의의 경계를 갖는 2차원 형상의 내부에 삼각요소를 생성시키기 위한 알고리즘으로 절점과 요소를 동시에 수행함으로써 효율을 향상시키고 요소 형상의 조절이 가능한 알고리즘을 개발하게 되었다. 본 연구에서 개발된 알고리즘은 임의의 영역에서 절점을 생성시킬 때, 영역의 최외각 경계선상에 이웃하는 세 절점을 기준점으로 정한 다음, 내부절점 생성에 영향을 미치는 기존 절점들을 최외각 경계상에서는 기준이 되는 세 절점을 제외한 나머지 기존 절점들과 만약 최외각경계와 연결이 안된 경계(예: 구멍 등)들이 있다면 이들 경계선 상의 기존 절점들 중에서 내부절점 생성에 영향을 미치는 기존 절점을 찾는다. 결과적으로 기준이 되는 세 절점과 내부절점 생성에 영향을 주는 기존 절점들만 가지고 서로의 거리와 각도를 계산해 내부절점을 생성함과 동시에 삼각요소 생성에 들어가고, 다시 기준이 되는 세 절점을 잡아서 위에서 설명했던 방법을 반복해서 삼각요소당 생성을 수행하게 된다. 또한, 요소생성시 경계가 전진하면서 요소를 생성하게 되는데 이 때 전진 경계가 서로 만나게 되는 경우 경계를 자동 분할한 후 위의 과정을 각 경계마다 반복 수행한다.

2. 입력된 경계선상에서의 절점생성

기본 형상의 입력은 외부 경계일 때는 반시계 방향으로, 내부 경계일 때는 시계방향으로 Fig. 1처럼 모서리를 정의해 주며 여기서 외부경계는 1번 경계가 되고 내부의 경계는 생긴 순서대로 2, 3, ... 경계로 정의를 한다.

절점을 생성할 때 경계선 상의 절점을 기준으로 하여 내부절점을 생성해 나가기 때문에 먼저 입력받은 형상의 경계선을 요소의 크기로 분할하여 절점을 생성시켜야 한다. 하지만 형상을 이루고 있는 경계선의 길이가 요소의 크기에 맞게 정수로 나누어지지 않으므로 식 (2)와 같이 각 경계선마다 분할크기를 구하고 여기서 구한 분할크기로 경계선의 길이를 나누어 경계선상에 절점을 생성시킨다.

$$m = \text{정수화}(l/d) \tag{1}$$

$$d = (l/m) \tag{2}$$

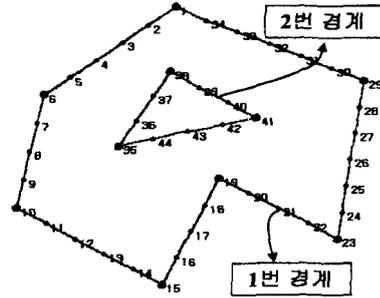


Fig. 1. Node generation on initial boundaries.

여기서, d : 각 경계선의 분할크기

d : 요소의 크기

l : 경계 선분의 길이

3. 영역내의 절점과 삼각요소의 생성

3.1 용어의 정의

내부에 절점을 생성시킬 때는 Fig. 2와 같이 Advancing Node Boundary에서 1번 경계에서 연달아 인접해 있는 세 절점 P_1, P_2, P_3 를 기준으로 삼아서 내부에 절점을 생성시킨다. 이 때, 내부절점 생성에 영향을 주는 기존절점들을 1번 경계선상에서는 P_2 절점 이후부터 P_3 절점 이전까지 찾은 다음, 1번 경계 내부에 또 다른 경계가 있는지 살핀다. (Fig. 2에서는 2번 경계가 된다.) 만약 다른 내부경계가 있다면 그 경계선상의 기존절점들에서도 내부절점 생성에 영향을 주는 절점들이 있는지 찾는다. 이렇게 해서 찾은 기존절점들과 세 절점 P_1, P_2, P_3 들 간의 거리와 각도의 상관관계를 따져 적절한 위치에 내부절점을 생성시킨다. 그런 다음 요소생성이 끝나칠 때까지 세 절점 P_1, P_2, P_3 를 다시 찾아서 위에서 했던 과정을 반복하게 된다.

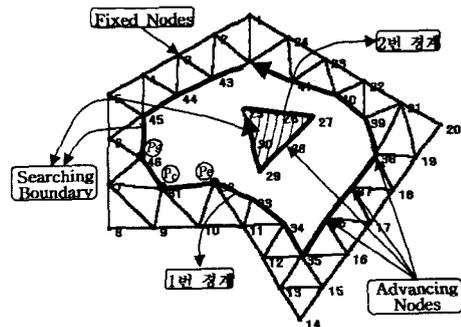


Fig. 2. Definition of terminologies.

다음은 요소생성 시 쓰이는 용어에 대한 정의를 요약한 것이다.

(1) 전진절점고리(Advancing Node Boundary): 초기 절점들로부터 영역내부로 절점이 점차 생성되면서 만들어지는 절점고리로서 다음 내부절점 생성에 관여하는 절점들로 이루어진 경계고리

(2) 전진절점(Advancing Node): 전진절점고리상에 있는 절점

(3) 고정절점(Fixed Node): 전진절점 이외의 절점으로서 위치가 고정된 절점

3.2 절점의 기본정보

각 절점은 다음과 같이 세 가지 정보를 가지고 있어야 한다.

(1) 삼각요소가 생성될 때 전진절점고리 상에서 인접한 다음 절점의 번호.

(2) 절점이 속해 있는 경계번호.

(3) 초기 경계선상에 절점이 생성될 때 꼭지점이 전에 생성된 절점인지 판단할 수 있는 표시.

여기서 (3)번은 입력된 형상의 꼭지점에서의 요소 생성 유무를 정하기 위해서이다. 만약 꼭지점의 각도 θ 가 95° 이내이면 꼭지점을 포함하는 요소가 생성되도록 정하였다. Fig. 3처럼 꼭지점이 P_{i+1} 와 꼭지점의 앞뒤로 요소길이 d 만큼 떨어진 절점 P_i, P_{i+2} 가 이루는 꼭지점 각도가 95° 일 때 삼각요소의 형상비가 약 0.67 이상이 됨을 알 수 있다. 일반적으로 형상비가 0.6 이상의 값을 가지면 어느 정도 균형적이라고 할 수 있으므로 95° 를 기준으로 삼아도 타당함을 알 수 있다.

형상비(Aspect Ratio): (삼각형의 단변길이/삼각형의 장변길이)

Fig. 4는 내부에 요소를 생성시키는 과정에서 먼저 꼭지점의 각도를 체크하여 요소를 생성하는 과정을 보여주고 있다.

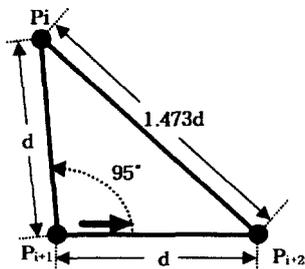


Fig. 3. Element generation at typical convex boundary node.

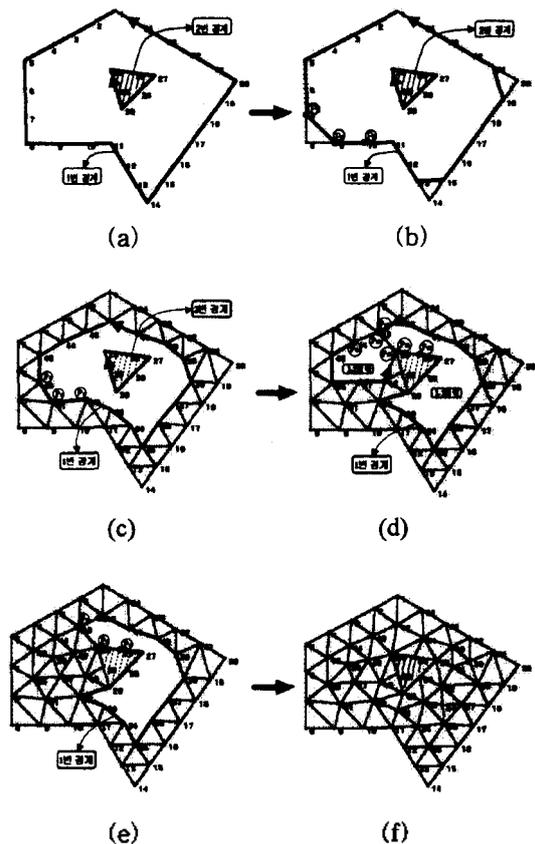


Fig. 4. Element generation at convex nodes of initial boundaries.

3.3 삼각요소 생성 조건의 분류

Fig. 5는 내부절점을 생성할 때 기준이 되는 세 절점 P_i, P_c, P_e 와 이 기준절점을 제외한 전진절점들 중 내부절점 생성에 영향을 미치는 절점 N_m 을 찾았을 때 이 절점들이 이루는 각도와 거리의 비교를 통하

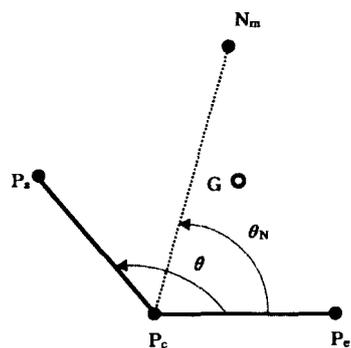


Fig. 5. Definition of the symbols.

여서 적절한 내부절점 위치를 찾기 위해 필요한 첨자들이다. 이 첨자들에 대한 정의는 다음과 같다.

P_s, P_c, P_e : 전진절점고리 경계선상에서 내부절점 생성 시 기준이 되는 3개의 절점들로 각각 시작, 중심, 끝 절점이라 정의한다.

θ : 기준절점 P_s, P_c, P_e 가 이루는 내부각도

d : 요소의 길이

N_m : 기준절점 3개를 제외한 전진절점고리 경계선상의 절점들 중에서 중심절점 P_c 로부터 거리가 요소

길이의 2배 보다 작고, 내부각도 안에 있는 절점들 중 가장 가까운 절점

내부생성 절점 수 = 정수화($\theta/(\pi/3)$)-1: 중심절점으로 부터 요소길이 만큼 떨어져 있으면서 내부각도를 정수화($\theta/(\pi/3)$) 값으로 등분한 위치에 생길 수 있는 절점 수

G: 내부에 새로이 생성될 수 있는 절점

Len1: 선분 $\overline{P_c N_m}$ 의 길이

Len2: 선분 $\overline{P_s N_e}$ 의 길이

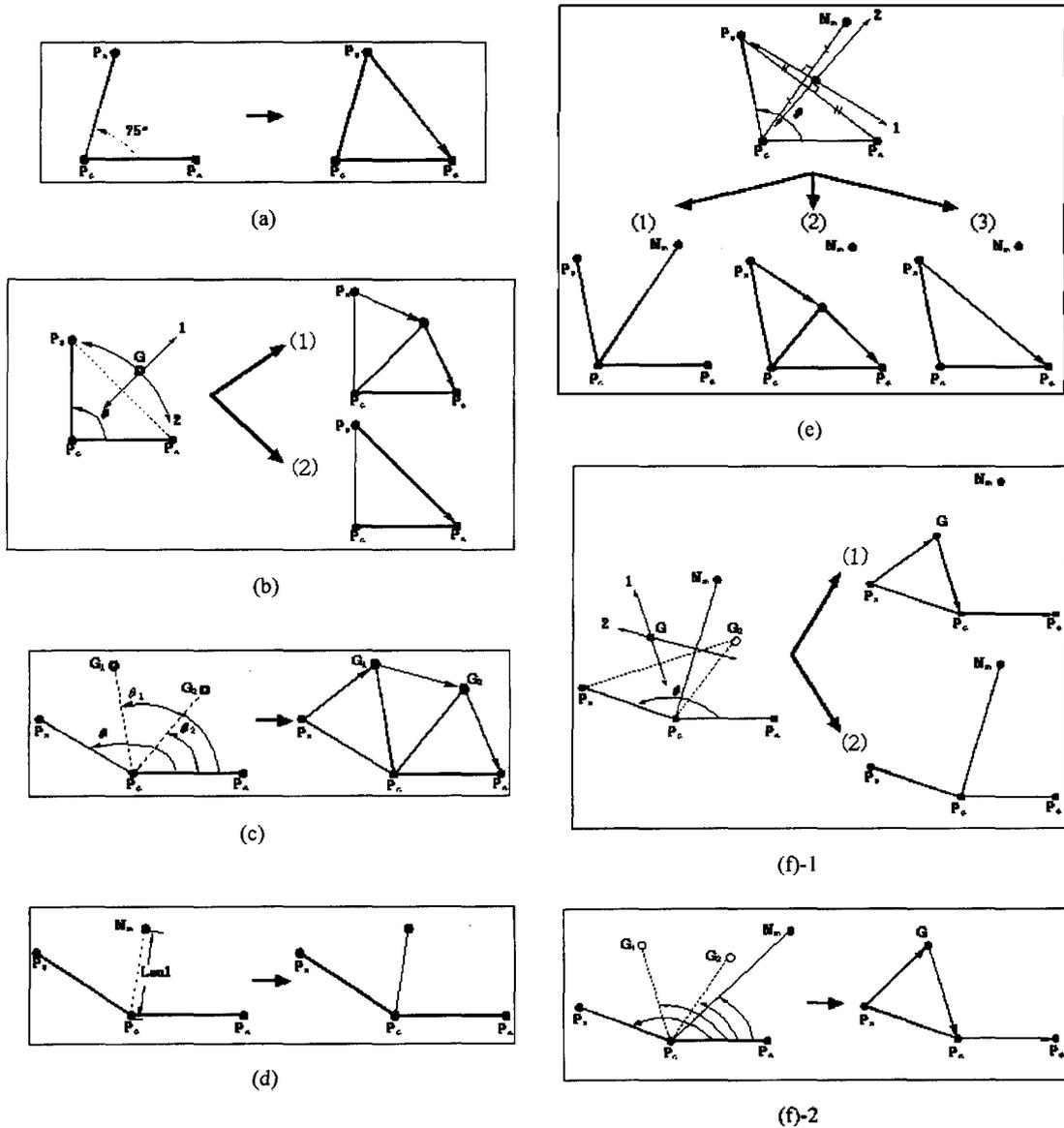


Fig. 6. Element generation of several cases.

Table 1. Condition for generation inner nodes

(a)	
$\theta \leq 75^\circ$	
$\theta > 75^\circ$	N_m 이 없을 때
	(b) 내부생성 절점수=0 or 1
(c) 내부생성 절점수 ≥ 2	
(d) $Len_l \leq (1.2*d)$	
N_m 이 1개 이상일 때	(d) 내부생성 절점수=0 or 1
	(f) 내부생성 절점수 ≥ 2

Table 1은 삼각요소의 생성 조건에 대해 6가지로 분류한 것이며, 이들 각 조건에 대한 삼각요소의 생성과정은 Fig. 6에 나타내고 있다. 다음은 Fig. 6의 각각에 대한 내부절점과 삼각요소 생성 과정에 대한 설명이다.

(a): 내부각도가 75° 이하가 되면 형상비가 0.7 이상이 되므로 바로 시작과 끝 절점을 이어서 요소를 생성시키면 전진절점고리 상에서 시작절점의 다음 절점은 화살표 방향인 끝절점이 된다.

(b): 선분 $\overline{P_i P_j}$ 의 수직 이등분선 1과 P_i 를 중심으로 반지름이 선분과 길이의 평균을 반경으로 갖는 원호 2를 그릴 때 1의 선과 만나는 점이 G가 내부절점이 된다. 이 때 요소의 생성은 (1)와 (2)중 좋은 형상비를 갖는 요소를 택하여 생성하게 된다.

(c): 내부각도 θ 를 (내부생성 절점수+1)로 등분한 각도를 분할 각도라 하면 $\theta_1=2*(\text{분할각도})$, $\theta_2=(\text{분할각도})$ 이다. 그리고 G_1 과 G_2 는 선분 $\overline{P_i P_j}$ 를 기준으로 하여 각도가 θ_1 , θ_2 이면서 거리는 요소길이 만큼 떨어진 곳에 위치한 절점들이다. 요소생성은 Fig. 6의 (c)의 오른쪽과 같다.

(d): Len_l 의 값이 요소길이의 1.2배 보다 작을 때 내부에 새로운 절점을 생성시켜 요소를 생성하면 형상비가 0.6이하로 좋지 못하므로 절점 P_i 와 N_m 을 연결시킨다. Fig. 7이 이 때의 경우를 나타내고 있다.

(e): 내부절점 G는 선분 $\overline{P_i P_j}$ 의 수직 이등분선 2과 선분 $\overline{P_i P_m}$ 의 수직 이등분선 1의 교점으로 구해지고, 이 때의 요소생성은 (1), (2), (3)중 형상비를 비교하여 적절한 것을 택한다. 여기서 (1)은 요소를 생성하지 않고 절점 P_i 와 N_m 을 연결시켜 전진절점고리가 변하기만 하는 경우이다.

(f): Fig. 8처럼 θ_N 이 θ_2 보다 클 때와 작을 때이 2가지로 나뉘는데 Fig. 8의 (a)인 (f)-1은 내부절점 G가 선분의 수직 이등분선 1과 선분 $\overline{P_i P_m}$ 의 수직 이

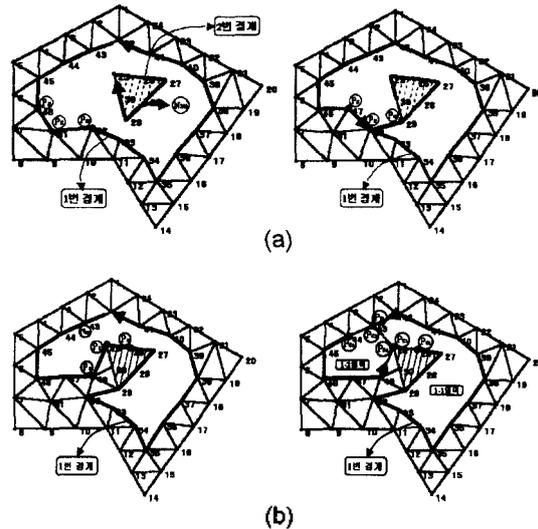


Fig. 7. Link of advancing node boundary.

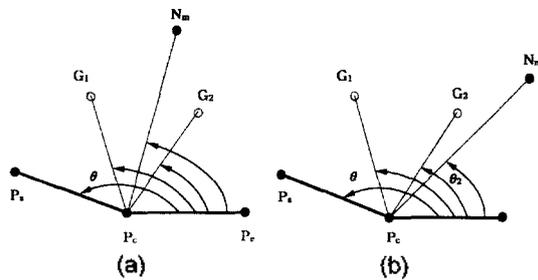


Fig. 8. Element generation of (6) case.

등분선 2의 교점으로 구해지며 요소생성은 위의 (e)와 같고, Fig. 8(b)인 (f)-2의 경우는 G_i 가 내부절점 G 가 되면서 요소생성은 Fig. 6의 (f)-2의 오른쪽과 같다.

3.4 예제로 보는 삼각요소의 생성 과정

Fig. 9는 절점과 삼각요소가 생성되는 전반적인 과정을 단계적으로 보여주고 있다. 여기서 굵은 화살표로 그려진 선은 전진절점고리의 방향을 나타내며 기준절점인 시작, 중심, 끝절점을 S, C, E로 표시하였으며, 특히 1번 경계선을 제외한 전진절점고리인 경계선들이 1번 경계와 연결이 되면서 모두 1번 경계로 변함을 알 수 있다. 그리고 영역이 분할될 때 마다 영역을 2개의 숫자로 나타냈는데 앞의 숫자는 지금까지 요소생성을 하면서 분할된 횟수를 뜻하며 뒤의 숫자는 분할선에 의해 영역이 나뉠 때 분할선의 오른쪽을 1번 왼쪽을 2번으로 정해서 명명한 것이다.

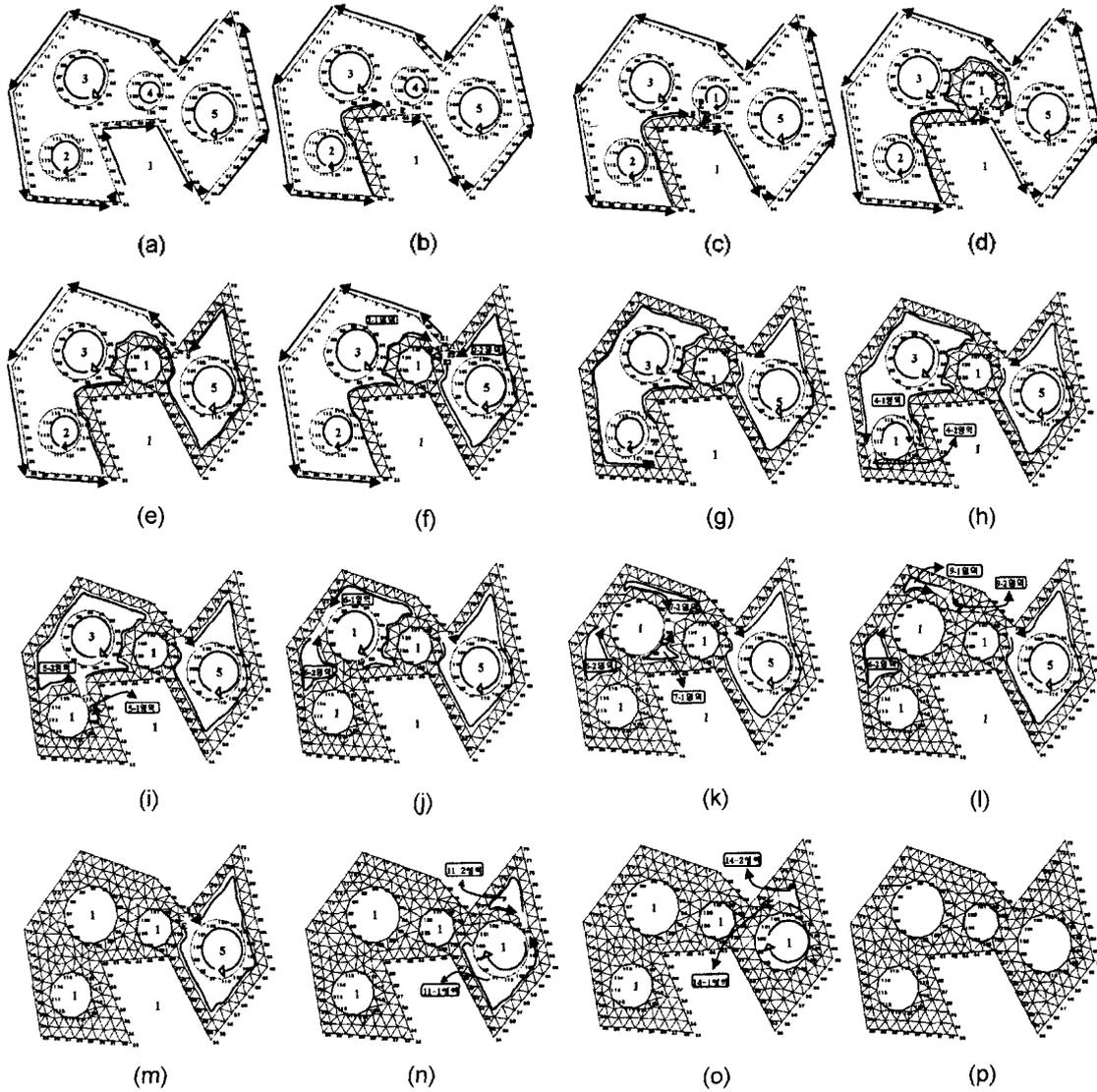


Fig. 9. Overall process of triangular element generation.

3.5 삼각요소 생성의 종결 조건

본래의 영역이 요소생성 진행 중 여러 개의 닫힌 영역으로 나뉘게 되어도 모든 닫힌 영역에 대해서 기준절점 P_1, P_2, P_3 들이 서로 인접할 때까지 삼각요소를 생성하게 되면 삼각요소 생성은 종결하게 된다.

4. 적용사례

Fig. 10은 본 연구에서 개발한 알고리즘을 이용하여 요소를 생성시킨 결과들의 예제들로 최 외각 형상과 내부 홀이 볼록 또는 오목인지의 여부에 따라서 6가지 예

로 나누어 보았다. 여기서 예제 1과 2는 내부에 홀이 없는 경우이며 나머지 예제들은 내부에 임의의 홀이 있는 경우이다. 그리하여 이러한 6가지 예제의 형상들에 대해 Visual Basic 5.0을 이용하여 본 연구에서 개발한 알고리즘을 구현하여 Pentium II에서 요소를 생성시켜 본 결과 각각의 예제들에 대한 소요시간, 절점수, 삼각요소수, 평균형상비는 다음 Table 2와 같이 나왔다.

5. 결 론

본 연구에서 개발한 알고리즘은 원과 직선으로 이

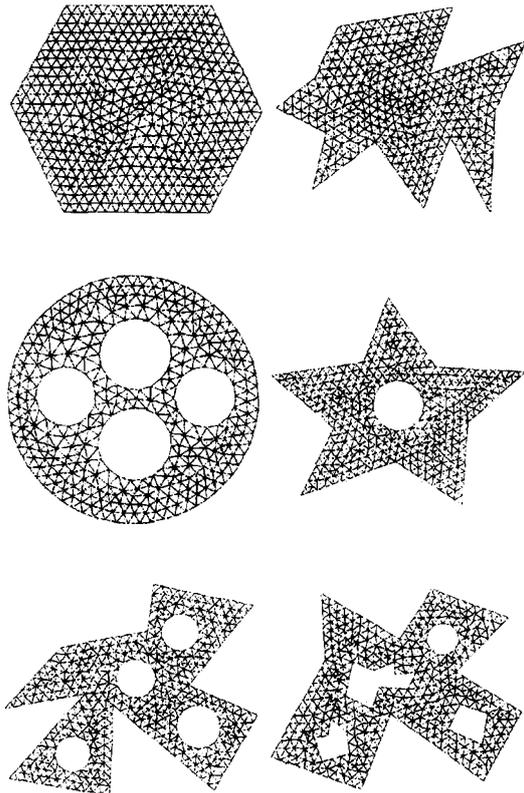


Fig. 10. Mesh generation examples.

Table 2. Comparison of the results of mesh generation examples

	소요시간	절점수	삼각요소수	평균형상비
Ex.1	0.776sec	483	891	0.928
Ex.2	0.870sec	396	683	0.887
Ex.3	0.710sec	366	602	0.829
Ex.4	0.771sec	403	688	0.888
Ex.5	0.990sec	446	715	0.846
Ex.6	0.929sec	439	715	0.848

루어진 요소생성 대상물의 초기 경계선상에 미리 생성되어 선택된 연속된 기준이 되는 새 절점과 이 절점들을 제외한 경계선상의 절점들 중 내부 절점에 영향을 미치는 경계절점들 간의 거리와 각도를 비교하여 적절한 위치에 내부절점을 생성시킨 뒤, 바로 이 내부절점과 경계선상에서 내부절점 생성에 영향을 미친 절점들만을 고려하여 생길 수 있는 요소들 중 가장 적절한 요소를 택하여 요소들이 생성되며, 방금 생성된 요소의 새로운 절점들은 다음 과정의 경계 절점들이 된다. 그리고 요소가 생성될 때는 현

재 진행되고 있는 영역의 경계선상의 절점들만 고려하도록 하였기 때문에 요소가 생성되면서 본래의 영역이 도중에 여러 영역으로 자동분할이 되는데, 이것은 고려해야할 경계선상의 절점수를 줄여주는 효과를 가져오게 한다. 그러므로 이러한 방법은 대상물의 내부영역에 전반적으로 절점을 생성시킨 뒤, 요소를 생성할 때는 다시 전체의 절점을 고려하는 방법보다는 속도면에서 효율적이어서 요소생성 시간을 줄일 수가 있었다. 또한 먼저 입력된 형상의 꼭지점에서는 요소가 생성될 때 되도록 꼭지점을 포함하도록 하여 해석 시 생길 수 에러를 줄이도록 하였다.

향후 본 알고리즘에 응력집중이 일어나는 곳과 대상 영역의 형상 조건에 따라 국부적으로 요소가 조밀하게 생성될 수 있도록 밀도 요소생성 방법을 추가시킨다면, 개발된 알고리즘은 2차원뿐만 아니라 3차원 곡면에서 요소생성 시 더 효율적으로 이용될 수 있으리라 판단이 된다

참고문헌

1. Cavendish, J., "Automatic Triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 679-696, 1974.
2. Cavendish, J. C., Field, D. A. and Frey, W. H., "An approach to automatic three-dimensional finite element mesh generation", *International Journal Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 329-347, 1985.
3. Lo, S. H., "Delaunay triangulation of non-convex planar domains", *Int. J. numer. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 2695-2707, 1989.
4. Shimada, K. and Gossard, D. C., "Computational methods for physically based FE mesh generation", *Human Aspects in Computer Integrated Manufacturing*, G. J. Olling, F. Kimura (ed.), North-Holland, 1992.
5. Weatherill, N. P., "The integrity of geometrical boundaries in the two-dimensional Delaunay triangulation", *Commun. Appl. Numer. Meth.*, Vol. 6, pp. 101-109, 1990.
6. Waston, D. F., "Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes", *Comput. J.*, Vol. 24, pp. 167-172, 1981.
7. 이민철, 전만수, 임우섭, "새로운 분할법에 의한 평면 및 곡면의 삼각형 요소망 자동 생성", CAD/CAM 학회논문집, 제4권 제2호, pp. 79-86, 1999.
8. Sluiter, M. C. L. and Hansen, D. L., "A General Purpose automatic Mesh Generator for Shell and Solid Finite Elements", *Proc. 2nd Int. Comp. Eng. Conf., San Diego, California, Aug. 15-19, ASME Comp. Eng. Div.*, pp. 29-34, 1982.
9. Talbert, J. A. and Parkinson, A. R., "Development of an

automatic, Two-Dimensional Finite Element Mesh Generator using Quadrilateral Elements and Bezier Curve Boundary Definition", *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol 29, pp. 1551-1567, 1990.

10. Joun, M. S. and Lee, M. C., "Quadrilateral Finite-Element Generation and Mesh Quality Control for Metal Forming Simulation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 4059-4075, 1997.



전재홍

1996년 한양대학교 기계공학과 학사
1999년 한양대학교 기계공학과 석사
2000년-현재 경진 System 설계팀 연구원
관심분야: Feature-based NC Machining,
Design Process Automation, CAD/
CAM



양현익

1984년 한양대학교 기계공학과 학사
1986년 Columbia University 공학 석사
1991년 Columbia University 공학 박사
1991년-1994년 현대전자산업주식회사 책임
연구원
1995년-현재 한양대학교 부교수
관심분야: 유한요소 생성법, CAD/CAM/
CAE, 기계설계 자동화, 환경기계
설계