대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제1호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.1, 29~51, March 2000

교구이용에 대한 교수학적 논의

- 대수모델의 활용사례를 통한 교구의 효과 분석을 중심으로 -

김 남 희 (난곡중학교)

I. 머리말

수학수업에 교구를 이용하려는 교사들에게는 사용하고자 하는 교구에 대해 고려해 볼 몇 가지 문제가 제기된다. 그것은 교구 활용에 따른 학습의 긍정적 효과와 더불어 발생할 수 있는 학습의 부정적 결과가 있는가의 문제, 수학의 내용을 모델화 한 교구의 조작활동이 수학원형에 어느 정도로 충실한 것인가의 문제, 현재 다루는 교구의 조작에서 수학 원형을 완전히 모델화하지 못하는 한계점이 발견된다면 그것은 무엇인가를 밝히는 문제, 교구의 그러한 제한점을 인정하면서도 교구를 수학학습에 이용하길 원한다면 그것을 학습의 어느 정도의 범위 내에서 활용할 수 있겠는가에 대한 문제 등이다. 이러한 문제들은 수학교육에 대한 안목을 요구할 뿐 만 아니라 교구에 대한 교사의 깊이 있는 이해와 신중한 판단을 필요로 하는 중요한 문제들이다.

본 고에서는 위와 같은 문제에 대한 논의를 중심으로 하여 수학을 모델화 한 구체적 조작물을 수학학습에 이용하려는 교사들에게 교구 이용에 대한 명확한 이해를 위해서 교구의 조작활동에 대한 교수학적 분석의 예를 제공하고자 한다. 그것은 교구가 수학모델로서 어느 정도의 완전성을 가질 수 있는가에 대한 문제의식을 토대로 문헌연구 및 실험수업을 통해 교구의 사용과 조작활동이 수학의 내용 이해에 미치는 긍정적 효과와 부정적 효과를 분석한 것이다. 이러한 분석 작업은 교사가 교구를 수학의 어떤 내용에 어느 정도의 범위 내에서 활용하여야 할 것인가에 대한 판단의 기초를 제공해주는데 상당한 도움을 줄 수 있을 것이다.

II. 연구의 배경

연구자는 '학교수학'의 기획란을 통해 학교수학에서 활용될 수 있는 교구에 대한 원고를 준비해 오면서 몇 가지 교구의 소개와 그 활용방법을 다루어 온 바 있다(김남희, 1999a; 김남희, 1999b; 김남희, 2000). 또한 중학교 현장에서 수학을 지도해 오면서 수학수업에 교구를 이용하는 교사들의 지도활동을 관심있게 보아왔다. 동료 교사들 중에는 세계적으로 이미 널리 알려져 있으나 아직 우리나라에서 상품화되어있지 않은 교구들을 스스로 자체 제작하여 수업에 이용하는 열의를 보이는 교사들도 있다는 것을 경험으로 잘 알고 있다. 또한 전국의 초, 중등교사들 중에는 교구 이용경험 사례에 대한 논문을 발표하여 일선 교사들에게 교구의 효과적인 이용방법을 소개해 주고 있기도 하다(한국수학교육학회, 1999, pp.29-168; 수학사랑, 2000). 교구를 이용해 본 경험이 있는 교사들 중에는 교구가 학생들로 하여금 수학을 재미있고 쉽게 학습하게 하고 교사들에게는 지도과정을 수월하게 해 준다는 장점을 가지므로 그것을 수학수업에 적극 활용해야 한다는 교구 예찬론을 주장하는 사람도 있다.

외국이나 우리나라의 교구관련 논문들의 주요 내용은 그 대부분이 "아동이 쉽게 이해하지 못하는 수학적 개념을 지도하기 위해 적절히 활용될 수 있는 교구는 무엇인가?", "이 교구는 수학의 어떤 내용 지도에 유용한가?"혹은 "이 교구를 가지고 어떤 방법으로 지도하는 것이 가장 효과적인가", "교구이용을 통해 얻은 학습의 잇점은 무엇인가"등의 문제에 논의의 초점이 맞추어져 있는 것을 확인할 수 있다.

본 고는 기존의 선행연구와 같이 교구의 소개, 활용방법, 학습의 잇점 등에 초점을 두기보다는 교구가 수학모델로서 어느 정도의 완전성을 가질 수 있는가에 대한 의문을 갖고 교구의 사용과 조작활동이 수학의 내용 이해에 미치는 긍정적 효과는 무엇이며 이와 더불어 발생할 수 있는 학습의 부정적 효과 및 교구로서의 한계점은 과연 무엇인가를 명확히 밝히는 작업에 중점을 두고자 한다.

이를 위해서는 선행 연구를 통한 교구의 이해와 실험수업을 통한 교구 사용 경험이 필요하다는 판단아래 '대수타일' 교구(김남희, 2000)를 예로 하여 그것을 직접 수업에 활용하여 보고 지도경험에서 느낀 교구사용의 효과와 제한점을 분석해 보고자 한다. 다시 말하면 대수타일이라는 특정 교구를 선택하여 선행연구에서 제시된 지도방법에 따라 교구를 이용한 수학수업의 사례경험을 통해 교구활용의 이해에 필요한 교수학적 분석을 제시하는 것이다. 이는 현장교사들에게 수학수업에 교구를 활용하기 위해서는 먼저 선행연구에 대한 검토와 실험수업을 통한 교구의 철저한 분석이 필요하며 이를 바탕으로 교구를 어떤 내용에 어느 정도의 범위 내에서 이용하는 것이 바람직한가에 대한 나름대로의 안목을 키우는 것이 중요함을 설명하고자 한 것이다. 교사들은 교구의 장점만을 생각하고 그것을 수학수업에 필요 이상으로 활용하는 것이 경우에 따라서는 심각한 교수학적인 위험을 가져올 수도 있다는

사실을 염두에 두어야 한다.

본 고에서 다룬 교구 활용의 실험수업사례와 지도과정에서 얻은 연구자의 반성을 토대로 교구의 효과를 분석한 과정은 교구를 활용한 바람직한 수학수업을 꾀하는 교사의 교재 연구 방법의 한 예를 제공한다는 측면에서 그 의의가 있다고 생각한다.

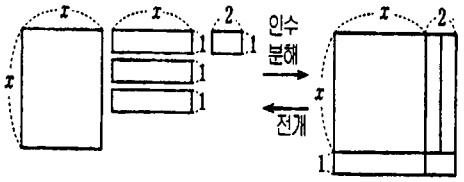
Ⅲ. 교구를 활용한 실험수업

연구자가 현재 지도하고 있는 중학교 1학년 학생들을 대상으로 실험수업 실시하기 위해서 선택한 교구는 '대수타일(algebra tiles)' 이다. 대수타일을 선택한 이유는 중학교 1학년 수학에서부터 본격적으로 다루어지기 시작하는 대수의 내용 지도에 그것이 효과적이라고 알려져 있다는 사실과 중학교 1학년 단계에서 대수타일을 가지고 지도해 볼만한 적절한 수학 내용[1]이 있었기 때문이다.

그리고 우리나라 중학교 수학 교과서에 대수타일을 이용한 문제가 제시되어 있어 이미 많은 교사들에게 그 교구가 알려져 있기에 그것의 올바른 활용을 위한 이론적 기초를 제공할 필요성을 느꼈기 때문이다.

아래에서는 대수타일을 자체 제작하여 수업에 활용한 전 과정을 간략하게 기술할 것이다.

문2 다음 그림을 참조로 하여 x^2+3x+2를 인수분해하여라.



<중학교 3학년 수학교과서의 예 >
(김연식, 김홍기, 1996, p.62)

1. 대수타일의 제작

아직 우리나라에는 상품화되어 있는 대수타일이 없기 때문에 대수타일을 제작하였다. 외국에서 소개되고 있는 대수타일의 구성요소들[2]을 살펴보고 대수타일 한 셋트에 포함될 조

1) 현재 제 6 차 수학과 교육과정에서 중학교 3학년 교과서에 제시되어 있는 인수분해의 내용을 중 1학년 수준의 학생들에게 구체물과의 조작활동을 통해 경험하게 할 수 있다. 인수분해나 인수의 용어사용 없이도 인수분해의 핵심 아이디어를 구체화된 경우에서 학습가능한 것이다.

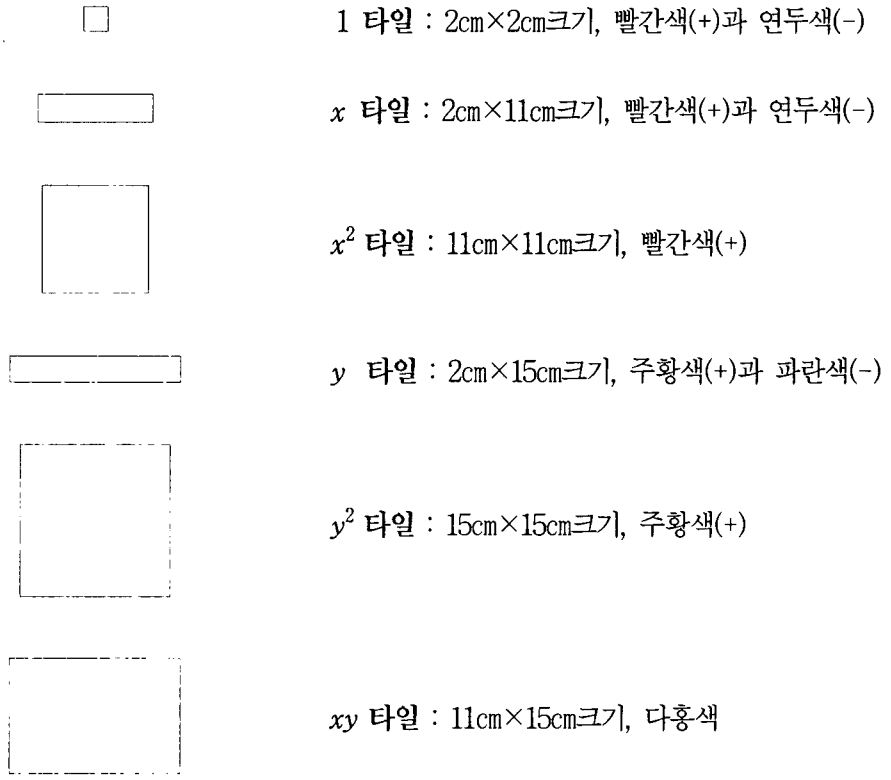
2) http://www.ucs.mun.ca/~mathed/t/rc/alg/tiles1.htm에서 참고

각들의 크기와 개수, 색상을 정하여 반투명 아크릴판(판 두께 5mm)으로 10 세트[3]를 주문 제작하였다. 반투명 아크릴 판으로 대수타일[4]을 제작한 이유는 교사가 수업에 이용할 때 얻을 수 있는 몇 가지 장점을 생각하였기 때문이다. 그것은 교사가 판서를 하지 않고 오버헤드프로젝트(OHP)위에 대수타일을 직접 올려놓고[5] 교구에 대한 기본설명이나 그것을 다루는 활동들을 설명하기에 편리하기 때문이다. 반투명한 아크릴 판을 OHP위에 놓으면 그 크기와 색상이 그대로 화면에 비쳐지기 때문에 한 번의 예시로 학생이 하여야 할 활동을 교사가 그대로 시연해 보이는 것이 가능하다. 실제로 수업에서는 다항식의 덧셈 뺄셈활동이나 인수분해 조작활동을 교사가 OHP상에서 직접 해 보이는 것이 상당히 효과적이었다. 이러한 장점 이외에도 특별한 지도 경우에는 반투명이기 때문에 조각들을 겹쳤을 때 겹쳐진 조각들이 눈에 확연히 드러난다는 장점이 이용될 수도 있다. 이것은 다항식의 인수분해과정에서 음수 계수를 다루게 될 때 조각들을 모두 펼쳐 직사각형으로 배열하는 학습 방법을 취하지 않고 조각을 겹쳐 놓아 뺄셈의 아이디어를 넓이의 축소로 지도하는 경우(수학사랑, 1999, pp.199-203)[6]에 겹쳐진 타일들이 무엇인지 시각적으로 확인 할 수 있게 한다는 잇점을 가져다 준다. 연구자가 반투명아크릴로 제작한 대수타일의 크기와 색은 아래의 <그림 1>에 제시된 바와 같다[7]. 반드시 잘 알려져 있듯이 색의 구분은 음수의 표현을, 타일의 크기와 관련된 변의 길이[8]는 인수분해의 문제해결에서 문제점이 나타나지 않도록 하기 위해 1, x, y 의 가로의 길이의 비가 정수비가 되지 않도록 하였다. 타일의 개수는 수업에 필요한 개수 이상으로 충분히 제작하였다.

$-x^2$, $-y^2$, $-xy$에 대한 타일은 제작을 하지 않았다. 그 이유는 자료 제작의 비용 문제, 타일의 종류와 개수가 너무 많이 있을 때 학생들이 가질 수 있는 혼란[9] 그리고 무

---

3) 이는 4인 1조로 조별수업을 진행하기 위해서였다.
4) 대수타일의 재질은 나무, 플라스틱, 종이 등의 어떤 소재로도 제작될 수 있다.
5) 아크릴의 투명성은 OHP스크린 상에 타일의 색을 그대로 나타내게 해 준다.
6) 그러나 연구자는 실험수업에서 이러한 지도방법은 사용하지 않았다. 그것은 음의 계수가 절대값이 큰 경우에까지 그 방법을 일반화 할 수 없었기 때문이다. 이에 대해서는 아래에서 보다 자세히 다룰 것이다.
7) 여기에 제시된 타일의 크기와 색은 연구자가 결정한 것으로 교사들은 자신이 원하는 크기와 색으로 바꾸어 제작할 수 있다.
8) 실험 수업에서 경험한 것은 수업 중 OHP위에 여러 개의 타일을 올려놓고 조작활동을 하기 위해서는 여기서 제작한 타일의 크기가 너무 크다는 것이었다. 교사용(OHP용) 대수타일은 그림 1에 제시된 크기의 50%~70% 정도의 크기가 적당하다고 생각된다.
9) 학생들이 너무 많은 판을 가지고 학습을 시작하면 오히려 학습에 혼란이 올 수 있다. 예를 들면 학생들이 기억해야 할 타일의 이름과 대수타일로 음수의 곱셈을 행할 때의 규칙적용에



<그림 1> 반투명아크릴 판으로 자체 제작한 대수막대의 크기 및 색상

엇보다도 대수타일의 적용 범위를 간단한 다항식의 예에서만 다룰 것이라는 연구자 나름대로의 계획이 있었기 때문이다.

2. 실험수업의 실시

(1) 대상

서울 문성중학교의 1학년 11반 학생 34명을 대상으로 하였다.

대한 부담이 커질 수 있어서 오히려 중요한 학습내용을 이해하기 어렵게 만들수도 있는 것이다.

(2) 실험수업시기[10)]

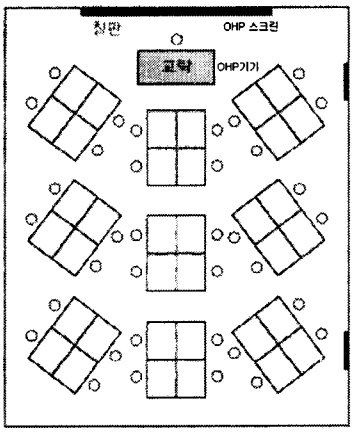
가. 1999년 12월 17일: 2시간 - 대수타일 1세트의 구성요소 확인, 대수타일 탐색

나. 1999년 12월 22일: 2시간 - 타일판을 이용한 대수타일의 조작활동

(3) 수업방법

가. 수학교실에서 수업 : 학교에서 운영되고 있는 열린 수학교실[11)]에서 조별 자리배치로 수업을 진행하였다.

나. 조별활동학습 : 이를 위해 4인 1조로 9개 조를 편성하였다(2개 조는 3인으로 구성). 남녀 구분 없이 자유의 사에 따라 조를 편성하도록 하였다[12)]. <그림 2>



<그림 2> 조별수업을 위한 교실 자리배치도

(4) 수업자료

각 조 학생들에게 제시된 자료는 다음과 같다.

- 대수타일(조별 1세트씩)
- 교차선이 그려져 있는 종이타일판[13)](B4 크기 1장)
- B4 크기의 활동지[14)](조별 1매)

(5) 대수타일을 이용한 학습-지도 내용

실험수업에서 대수타일의 조작활동과 함께 다룬 지도내용은 다음과 같다.

- 대수타일 교구에 대한 기본 설명
- 대수타일의 이름 정하기

---

10) 중학교 1학년 교육과정에 제시되어 있지 않은 내용(예를 들면, 인수분해)도 다루게 되므로 편의상 교과서의 진도를 모두 마친 후, 실험수업을 하였다.

11) 교실의 앞, 뒤에는 수학학습과 관련된 자료(입체도형 모형, 각종 퍼즐 세트, 수학의 여러 가지 내용을 주제로 한 자세한 설명문 등)가 비치되어 있어 수학 학습의 분위기가 잘 형성되고 OHP기기가 갖추어져 있어서 수학교사가 언제든지 수업의 도구로 쉽게 활용할 수 있게 되어 있다.

12) 이는 학생들의 적극적인 참여를 유발해 조별활동을 활발하게 하기 위함이다.

13) 교사는 OHP위에서 조작활동을 보이기 위해 TP용지에 선을 그려 넣은 타일판을 사용하였다.

14) 학습 내용과 관련된 몇 개의 문제를 기록하고 제시된 문제해결에 대한 학생들의 조작활동을 그림이나 식으로 표현할 수 있도록 여백을 주었다.

· 다항식의 덧셈과 뺄셈에 대한 조작 및 표현

· 교차선이 있는 타일판에서 직사각형을 구성하고 가로, 세로 길이 파악하기 (인수분해의 아이디어 지도)

· 다항식의 곱셈(전개)

(6) 수업의 진행

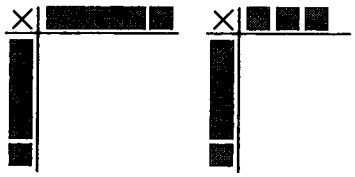
수업의 지도과정은 '대수타일을 이용한 수학학습(김남희, 2000)'에 소개되어 있는 일반적인 지도 순서와 그 지도방법에 따라 진행하였다.

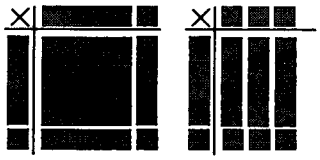
가. 1999년 12월 17일: 2시간 연속수업으로 진행하였다. 처음 1시간은 조 편성을 한 후, 조별로 자리에 앉아 각 조당 1 세트씩 받은 대수타일의 구성요소를 확인하고 대수타일을 가지고 자유로운 활동을 하게하여 대수타일을 탐색하는 기회를 주었다. 2시간 째에는 대수타일 교구에 대한 기본 설명과 대수타일의 이름 정하기 및 다항식의 간단한 합(또는 차)의 표현에 대한 지도를 하였다.

나. 1999년 12월 22일: 2시간 연속수업으로 진행하였다. 타일판을 이용한 대수타일의 조작활동을 본격적으로 다루었다. 교차선이 있는 타일판 위에서 직사각형을 구성해 보고 직사각형의 가로와 세로의 길이에 해당하는 타일들을 파악하는 과정과 이의 역 과정으로 두 길이를 주고 직사각형을 구성하는 활동과정을 지도하였다. 위 두 과정을 그림으로 그려보고 식으로 표현해 보는 연습을 통해 인수분해의 아이디어와 다항식의 전개의 의미를 구체적 조작활동과 연관지어 이해할 수 있도록 하였다.

(7) 학생들의 활동결과

다음은 각 지도내용에 대한 학생들의 활동이다. 학생들에게 제시된 문제와 각 조별 활동지에 나타난 학생들의 학습결과들 중의 일부를 제시해 보았다. <그림 3>은 다항식의 곱셈을 대수타일의 조작활동을 통한 직사각형 구성으로 해결하도록 제시한 문제이다. <그림 4>는 위의 문제해결에서 학생들에게 기대되는 조작행동을 나타낸 것이다.





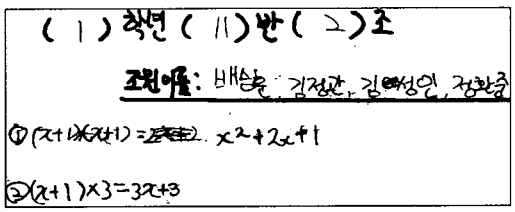
<그림3> 직사각형 구성 및 식의 표현 문제 ①, ② <그림4> 문제 ①, ② 에 대한 올바른 조작활동

<예 1>~<예 3>은 제시된 문제를 대수타일의 조작활동으로 해결한 후 그것을 식으로 표현한 학생들 답안의 예이다. <예 1>은 식의 표현이 가장 올바른 답안이고 <예 2>는 계수는 문자 앞에 쓰는 규칙을 사용하지 않았을 뿐 역시 올바른 결과의 답을 보여주고 있다.

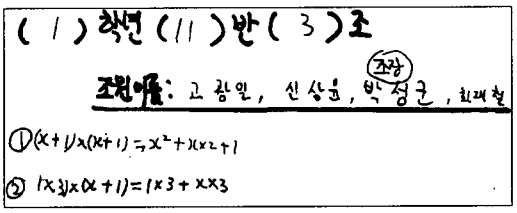
<예 3>은 대수타일의 조작규칙이나 대수타일의 이름 등에 대한 지식 부족으로 바르지 못한 답안을 낸 경우이다. 이 조는 수학성취도가 낮은 학생들로 구성된 조로서 다른 경우에서도 대수타일조작을 통한 문제해결에 어려움을 겪는 것으로 관찰되었다.

<예 4>, <예 5>는 <그림 5>와 같은 대수타일의 조작활동으로 다항식의 합과 차에 대한 결과를 식으로 나타낸 답안이다. <예 4>와 같은 올바른 답안이 여러 조에서 나왔다. <예 5>의 답안을 보인 조는 문제해결의 방법은 알고 있으나 문제에 답안을 굳이 써야한다는 의무감을 느끼지 못한 경우라고 생각된다. 이 실험수업이 학생들의 의견교환과 자유로운 활동을 강조한 수업 분위기였던 것이 영향으로 작용했던 것 같다.

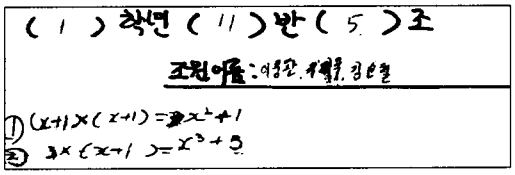
<예 6>~<예 9>는 대수타일로 구성된 직사각형을 주고 타일판 위에 직사각형의 가로의



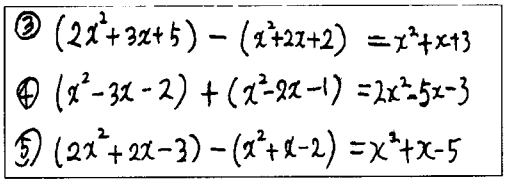
< 예 1 >



< 예 2 >

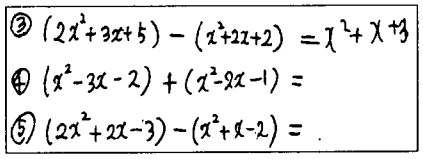


< 예 3 >

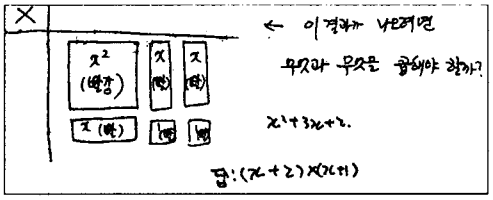


< 예 4 >

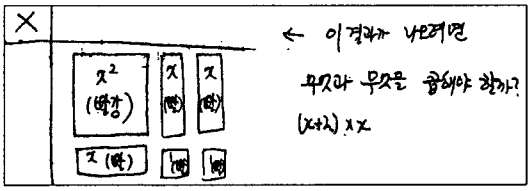
<그림 5> $(2x^2+3x+5)-(x^2+2x+2)$의 조작활동



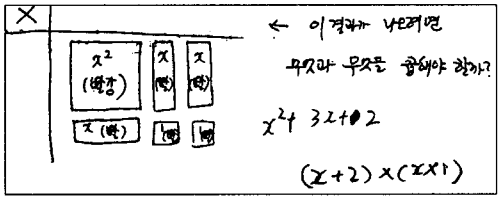
< 예 5 >



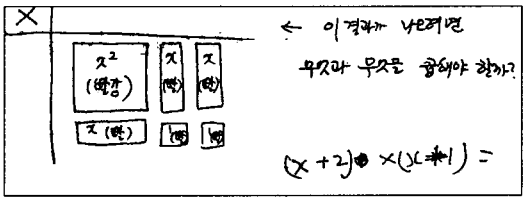
< 예 6 >



< 예 7 >



< 예 8 >



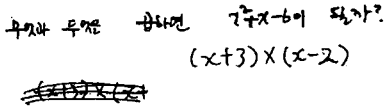
< 예 9 >

길이와 세로의 길이가 되는 대수타일을 놓아보도록 한 후 직사각형의 가로, 세로, 넓이와의 관계를 이용해 인수분해의 아이디어를 지도한 사례이다. 인수분해나 인수의 용어는 사용하지 않았지만 학생들의 답안이 대부분 올바르게 제시된 것으로 보아 교구의 조작활동을 통해 중 1학년 수준의 학생들에게도 인수분해의 아이디어가 잘 지도될 수 있음을 알 수 있다.(<예 6>~<예 9> 참조)

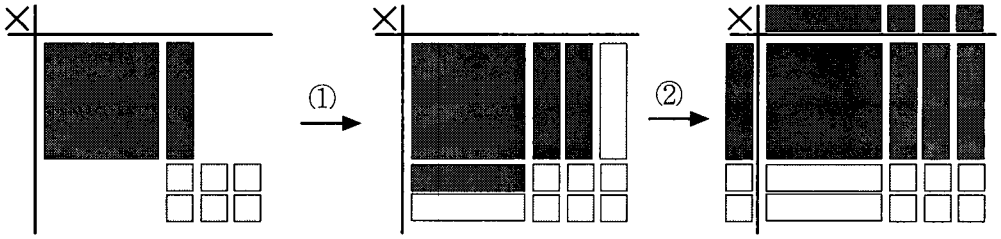
위와 같은 결과에 만족하면서 연구자는 대수타일로 음수가 있는 다항식의 인수분해 지도도 시도하여 보았다. 음수의 곱셈을 타일판 위에서 대수타일로 표현하는 방법에 대한 기본적인 설명은 '대수타일을 이용한 수학학습(김남희, 2000)'에 소개되어 있는 지도방법에 따랐다. <예 10>은 x^2+x-6을 나타내는 타일의 집합을 <그림 6>과 같이 만들고, 이를 타일판 위에서 직사각형으로 구성해 나가는 조작과정을 통해 x^2+x-6을 두 일차식의 곱으로 나타낸 답안의 예이다. <그림 7>은 학생의 활동으로 기대되는 올바른 조작활동을 보여주고 있다(①은 직사각형을 꽉 채우기 위해 0을 두 번 첨가하는 과정이고 ②는 같은 색의 타일끼리 배열하여 직사각형의 가로와 세로에 해당하는 타일을 찾는 과정이다.).

<예 11> 역시 학생들이 음수가 있는 다항식의 인수를 직사각형의 구성과정에서 찾은 결과를 보여준다. <예 12>는 인수의 곱을 식으로 나타내지는 않았지만 자신이 생각한 조작활동을 문제 위에 그림으로 그려서 보여주고 있다. 중 1학년 수준의 학생들이 인수분해를 명시적으로 학습하기 이전에 이미 인수분해의 아이디어를 발견적으로 학습하였음이 잘 드러나 있다.

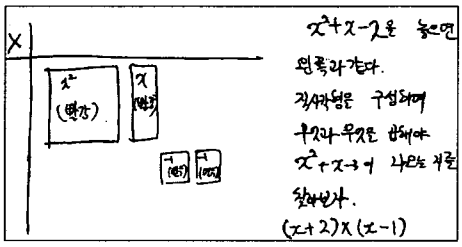
<그림 6> x^2+x-6 표현



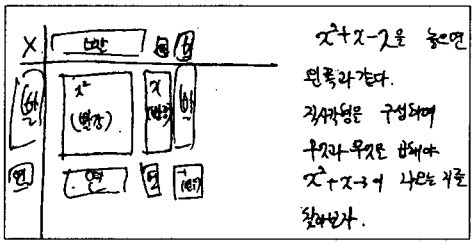
< 예 10 >



<그림 7> 음수가 있는 다항식 x^2+x-6의 두 인수를 찾는 과정



< 예 11 >



< 예 12 >

IV. 교구활용을 통한 수업의 효과

교구를 이용한 실험수업에서 연구자가 학생의 활동을 관찰하며 느낀 것은 무엇보다도 수업 분위기가 상당히 활기차고 기존의 수업보다 학생들의 참여도가 높았다는 것이다. 이러한 현상은 기존의 설명식 수업에 젖어있는 학생들에게 수학의 내용을 구체적 조작물을 이용하여 실제적인 활동으로 경험하게 한 것의 영향이 아닌가 생각한다.

대수타일을 이용한 실험수업의 경험을 토대로 교구를 이용한 수업활용에서 얻은 학습효과를 정리해 보면 다음과 같다.

첫째, 학생들의 능동적인 참여수업이 가능했다는 것이다. 학생들은 손으로 만지고 다루면서 수학을 배워나가는 것에 상당히 흥미로와 했다. 수업시간에 교사의 설명을 아주 재미있게 듣는 학생들이 많았고 실험수업이 끝난 후에도 다음시간에도 이러한 수업계획이 있는가

를 물어보며 몇시간 더 하고 싶다는 의사를 보인 학생들도 있었다.

둘째, 구체적 조작물을 이용한 수업은 수학에 대해 이야기하는 것을 향상시켜 협동학습을 가능케 한다. 교구의 이용은 학생들에게 활동을 위해 생각해 볼 문제와 서로 토론할 소재를 제공해 주기 때문에 협동학습을 원할하게 해 준다. 수업시간에 수학에 대해 서로 이야기하는 능력의 향상은 학습과정에서 자신의 이해상태에 대한 반성(재고)과 조정의 문맥을 제공받을 수 있는 중요한 토대라고 생각한다.

셋째, 구체적 조작물인 교구의 사용은 새로운 수학의 내용을 도입하는 단계에서 중요한 역할을 할 수 있다. 교구가 수학을 아주 쉬운 내용으로 바꿀 수는 없다 할 지라도 학생들에게는 개념적으로 추상적이고 형식적인 수학의 내용을 조작활동 속에서 실제적인 의미를 갖을 수 있도록 도와줄 수 있는 것이다. 연구자가 실험수업에서 다룬 대수타일은 학생들이 산술에서 대수로 이해해 나아가야 하는 단계에서 변수(문자)와의 조작을 구체적인 대상 즉, 타일을 통해 다루게 함으로써 그들이 하는 수학이 실제적인 조작활동 속에서 의미를 갖을 수 있도록 해 주었다[15].

넷째, 학생들로 하여금 수학에 대한 풍부한 해석의 기회를 제공할 수 있다. 예를 들면, 대수타일은 대수의 내용을 기하학적으로 해석할 수 있게 해 준다. 기호조작에 대한 이러한 기하학적인 해석의 제공은 학생들의 이해를 풍부하게 해주고 대수를 수학의 다른 내용과도 연관지을 수 있게 하는 기회를 제공한다.

다섯째, 학생들이 수학의 학습을 통해서 갖게 되는 좌절감이나 불안을 어느 정도 해소해 줄 수 있다. 교구를 다루는 일련의 활동은 대부분의 학생들에게 놀이와 같은 차원에서 재미와 흥미, 탐구의욕을 갖게 해준다. 수 개념이 약해 대수과정에 이미 움츠러들어 있는 학생들에게 대수타일은 타일을 이용한 기호조작의 접근을 제공하여 학생들이 학습에서 느끼는 어려움이나 좌절감 없이 다항식의 전개와 인수분해활동을 해 나갈 수 있게 도와 줄 것이다.

여섯째, 교구의 사용은 때로 교사에게 힘겨운 지도과정을 새로우면서도 수월한 방법으로 진행할 수 있도록 도움을 준다. 실험수업에서 경험한 바와 같이 변수가 포함된 다항식의 연산에서 동류항의 의미를 설명하는 것이나, 다항식의 전개에서 곱셈의 분배법칙을 설명하는 것, 인수분해의 과정에서 다항식을 인수의 곱으로 나타내는 것에 대한 설명을 기존의 형식적으로 지도방법에 따르지 않고 색과 크기가 같은 타일끼리의 합, 직사각형의 넓이와 가로, 세로길이와의 관계로 간단하게 보여줌으로써 학생들이 보다 쉽게 수학의 내용에 접근해 갈 수 있도록 할 수 있다.

---

15) 연구자가 중점을 두고 지도한 다항식의 전개와 인수분해의 학습은 학생들로 하여금 추상적인 변수의 개념을 직접적인 조작활동을 통해 구체적인 상황에서 다룰 수 있게 한 것이다.

V. 교구활용에서 고려할 교수학적인 문제

수학을 모델화 한 구체적 조작물을 수학학습에 이용하려는 교사들에게는 교구 이용에 대한 명확한 이해가 있어야 한다. 이러한 이해에는 교구의 사용과 조작활동이 수학의 내용 이해에 어떤 긍정적 효과를 가져다 주는가에 대한 이해와 더불어 앞으로 수학학습에 부정적인 영향을 줄 수 있는 여지는 없는가에 대한 이해가 포함될 수 있다. 이러한 이해를 토대로 교사는 교구를 수학의 어떤 내용에 어느 정도의 범위 내에서 활용하여야 할 것인가를 계획하는 것이 바람직하다.

아래의 분석은 연구자가 실험수업에서 사용한 대수타일의 활용에 대해 제기될 수 있는 문제들을 논의한 것이다. 그것은 대수타일이라는 특정한 교구를 대상으로 한 내용이지만 수학수업에 다루어지는 어떠한 교구에 대해서도 이와 유사한 분석과정이 가능할 것이라고 생각한다. 또한 여기에 제시되지 않은 다른 관점의 교수학적 문제제기도 가능하다.

1. 수학모델로서 완전성을 가지는가의 문제

일반적으로, 모델은 우리가 다루고자 하는 원래의 상황보다 인간사고의 본성에 보다 적합하게 만들어진 원형의 대체물이라고 할 수 있다. 우리는 추상적이고 형식적인 것보다는 실제로 조작할 수 있는 것, 행동적으로 조종가능한 것에 더 익숙하다. 모델은 우리에게 원래의 자료(성질, 관계, 과정)를 직관적으로 수용가능한 요소로 바꾸어 해석할 수 있는 길을 제공한다.

모델은 원형 및 인간의 인지적 특성에 충실해야한다. 좋은 모델이란 원래의 상황과 해결자의 지적활동 사이에서 신용할 수 있는 중개자의 역할을 해야 하는 것이다. 따라서 좋은 모델의 조건은 그것이 구조적인 동형을 바탕으로 원형에 충실해야 한다는 것이다.

모델을 통해서 학습자가 원형에 대해 부정확하고 불완전한 해석을 하게 된다면 모델은 원형과 해결자 사이의 불완전한 중개자가 될 수 있다. 모델을 사용하는 것은 모델을 사용하여 생산적인 사고를 하기 위함인데, 수학의 경우에 문제해결자가 원형과 동형이 될 수 없는 모델에 너무 사로잡히게 되면 모델의 성질로부터 원형에 적절하지 않은 결론을 끌어낼 위험성이 증가한다. 모델의 성질이 수학의 추론활동에 적절하지 않게 개재될 때 그 위험성은 더욱 커진다. 원형과 맞지 않은 모델의 성질이 주체의 사고에 작용하게되면 학습자는 원형의 개념을 다룰 때, 그러한 성질의 암묵적인 개재를 알지 못한 채, 개념의 해석을 왜곡시킬

수 있는 것이다.

이러한 논의는 일종의 수학모델로서 제작된 교구를 수업에 활용하려는 교사에게 시사하는 바가 있다. 즉, 교구를 이용하기 이전에 교사는 교구의 사용으로 학생들이 수학에 대해 오개념을 갖게되는 경우는 없는가의 문제를 반드시 생각해보고 그러한 문제가 발생될 수 있다면 그것을 어떤 방법으로 예방할 수 있는가를 고려해야 한다는 것이다.

연구자가 실험수업에서 사용한 대수타일도 대수를 구현한 일종의 수학모델이라고 할 수 있는데, 연구자도 대수타일의 활용을 위한 이론적 준비와 수업계획과정에서 원형의 충실성 및 오개념 유발가능성에 대한 문제제기가 일어날 수 있음을 확인하였다.

대수타일이 수학모델로서 완전성을 가지는가의 문제와 관련하여 그의 사용으로 인해 수학학습에서 유발될 수 있는 교수학적인 문제점들을 지적해 보자.

2. 대수타일 활용에서 발생될 수 있는 학습의 오류

(1) x는 양수이고 $-x$는 음수라고 생각하는 오개념

음수의 표현은 다항식의 조작모델에서 가장 논쟁의 여지가 많은 부분이다. 대수타일은 음수와 양수를 타일의 색으로 구분하여 다루고 있다. 음수에 대한 대수타일모델은 색깔에 기초를 두고 있는 것이다. 어떤 타일의 A색이 양수를 나타내면 같은 크기의 타일이 다른색 B를 가지는 것은 음수를 나타낸다[16]. 이러한 사실은 변수로 일반화된다. A색 x는 양수를 B색 x는 $-x$를 나타내는 것이다. 이러한 음수의 처리는 이 모델을 아주 간단한 조작으로 다루도록 하는데 효과적이지만 대수타일을 사용하는 학생들이 색에 의해서 양과 음을 구분함으로써 x는 양수이고 $-x$는 음수라는 생각을 가지게 되기 쉽다는 문제를 낳는다. x는 수학에서 무언가를 대신할 수 있는 변수로서 특히, 다항식에서 x는 양수나 음수를 대신하는 기호로 사용될 수 있다. 학생들이 x는 항상 양수만을 $-x$는 항상 음수만을 대신하는 것이라고 생각하게 되면 그것은 변수에 대한 잘못된 해석을 하는 것이며 특히 방정식의 해를 구하는 문제해결과정에서 x가 음수가 될 때(혹은 $-x$가 양수가 될 때) 인지적 갈등을 경험하게 된다.

이러한 문제점을 인식한 연구자는 타일의 색을 고정시켜 항상 정해진 색의 규칙에 따라

---

16) 예를 들어 연구자의 실험수업에서는 x 타일을 빨간색으로 하고 $-x$ 타일은 연두색으로 다루었다. 마찬가지로 1은 빨간색 타일로 -1은 연두색 타일로 다루어졌다.

양과 음을 다루는 대수타일의 사용방법에 그 개선이 요구된다는 생각을 하게 되었다. A색깔의 타일은 양수를, B색깔의 타일은 음수로 하여 계속학습을 진행하기 보다는 학생들이 타일 조작에 익숙해 진 적절한 단계에서 이르러서는 양과 음에 대한 타일의 색을 서로 바꾸어 즉, B색깔의 타일을 양수로 하고 A색깔의 타일을 음수로 바꾸어 기존에 했던 동일한 조작을 반복해보는 경험을 하는 것이 도움이 될 것이라는 생각을 하였다. 이러한 학습은 수학은 일종의 규약에서 출발한다는 사실을 인식하고 새롭게 정해진 규약에 따라 이전의 학습을 다시 연습하는 기회가 될 뿐 만 아니라 변수개념에 대한 깊은 이해가 이루어질 수 있는 토대가 될 것이다.

(2) 곱셈에 대한 넓이모델의 불완전성

대수타일에서 곱셈의 조작은 주어진 두 길이를 가로와 세로로 하는 직사각형의 구성이다. 다항식의 전개는 직사각형의 가로길이와 세로길이의 곱이 그 넓이와 같다는 사실에 따른 식의 표현으로 완성된다. 곱셈에 대한 대수타일의 넓이모델은 대수를 기하학적인 아이디어로 해석하여 직관적이고 시각적인 이해의 효과를 꾀하고 있다.

연구자도 실험수업에서 대수타일의 넓이모델을 이용하여 다항식의 전개와 인수분해의 아이디어를 지도한 바 있다. 그러나 학습내용이 확장될수록 대수타일의 넓이모델을 적용하는데 심각한 문제점이 있음을 발견하게 되었다.

그것은 주어진 식에 마이너스가 포함될 경우 그 모델이 기하학적으로 바르지 않다는 사실이다. 이에 대한 자세한 설명을 위해 여러 다항식의 전개를 예로 들어본다.

학생들에게 대수타일로 $(x+3)(x-2)$, $(x+3)(x+2)$, $(x-3)(x+2)$, $(x-3)(x-2)$의 곱셈을 실행해 보도록 한다고 생각해 보자. 아마도 학생들은 $(x+3)(x-2)$에 대한 곱셈을 할 때, $(x+3)(x+2)$를 곱할 때 대수타일로 했던 조작활동과 똑같은 작업을 할 것이다. 다만, 식에 있는 -2와 곱셈의 결과에서 나오는 $-2x, -6$에 대해서 '음수'에 해당하는 색을 가진 타일을 사용하는 것만이 다르다. $(x-3)(x-2)$에 대해서도 마찬가지로 학생들은 $(x+3)(x+2)$를 곱할 때 했던 조작활동과 똑같은 작업을 할 것이다. 다만, 식에 있는 -2와 곱셈의 결과에서 나오는 $-2x$, $-3x$에 대해서 '음수'에 해당하는 색을 가진 타일을 사용하는 것만이 다르다. $(x-3)(x+2)$의 곱셈에 대해서도 마찬가지이다.

우리가 여기서 생각해 보아야 할 중요한 문제는 대수타일의 넓이모델에서 $(x+3)(x-2)$, $(x+3)(x+2)$, $(x-3)(x+2)$, $(x-3)(x-2)$에 해당하는 직사각형의 넓이가 모두 똑같다는 사실이다. 이 사실에 주목해보면 대수의 기하학적 해석을 꾀하는 이 모

델이 기하학적으로 바르지 않은 경우를 보여주는 중대한 결함이 있음을 쉽게 짐작할 수 있다. 왜냐하면 $x+3$은 분명히 $x-3$보다는 더 길어야 하고, $x+2$도 $x-2$보다는 더 길어야 하기 때문이다.

교사가 수업시간에 직사각형의 두 변의 길이와 넓이와의 관계에만 주목하여 구성된 직사각형의 실제적인 크기 비교의 문제를 간과할 수도 있겠으나, 그러한 간과가 학생들의 기하개념, 또는 대수식의 기하적 표현의 올바른 이해과정에 별 영향을 주지는 않을 것이라고 단언할 수도 없는 상황으로 보여진다.

위와 같이 마이너스를 포함하는 다항식의 곱셈결과에서 나타나는 넓이의 상대적 크기 문제를 고려하여 대수타일의 조작활동을 일부 수정하여 지도하는 사례도 있다. 그 예는 다항식의 인수분해과정에서 음수 계수를 다루게 될 때 조각들을 모두 펼쳐 직사각형으로 배열하는 학습 방법을 취하지 않고 조각을 겹쳐 놓아 뺄셈 또는 음수의 아이디어를 넓이의 축소로 지도하는 경우이다. <그림 8> ~ <그림 10>에 제시된 자료가 그러한 경우의 예이다. <그림 8>은 중학교 3학년을 대상으로 개발된 수행평가(프로젝트형)문항[17]에 대한 예시답안의 일부이고 <그림 9>, <그림 10>은 수학교사들을 위한 수업활동 자료집에 실린 대수타일 활동자료의 일부이다.

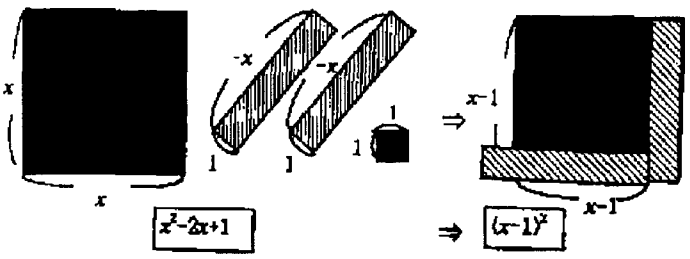
<그림 8> ~ <그림 10>에 제시된 음수의 조작방법은 넓이모델에서 발생하는 문제점을 해결해 준 방법이라고 생각된다. 그러나 연구자는 이러한 조작방법에도 그 일반성에 한계가 있다는 결함을 지적하지 않을 수 없다. 그것은 x^2-2x-1과 같이 음수의 절대값이 작은 경우에는 문제가 없지만 $x^2-18x+81$와 같이 음수의 절대값이 큰 계수가 포함된 다항식의 곱셈에서는 x^2타일 위에 $-x$타일을 모두 놓아 넓이를 축소한 다는 것이 사실상 불가능해지기 때문이다(시각적으로 확인되는 넓이가 0보다 작아지게 되므로). 대수타일의 곱셈에 대한 넓이모델이 위와 같은 불완전성을 가지고 있다는 사실을 교사가 인식하는 것은 상당히 중요하다. 그러한 인식은 교사가 학습의 어느정도의 범위 내에서 이 교구를 활용하여야 할 것인가를 결정할 때 그 판단의 기준으로서 작용되어야 할 중요한 문제인 것이다.

---

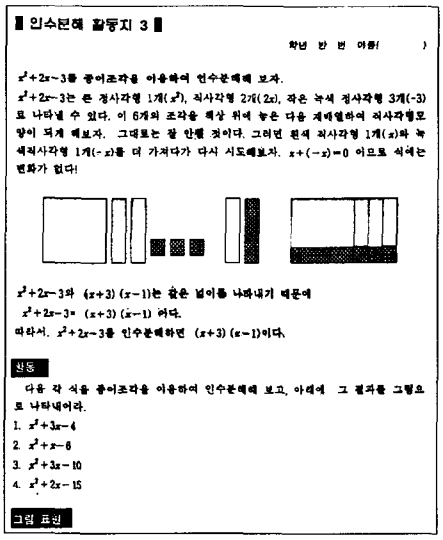
17) 제시된 문제에 설정된 성취기준은 "인수분해를 기계적인 식의 조작으로 이해하기 보다는 구체물을 사용하여 직접 조작하고 그 과정과 결과를 시각적으로 봄으로서 인수분해의 뜻을 좀 더 명확히 한다"이다.

◇ 이차식 x^2-2x+1의 인수분해

넓이가 x^2인 정사각형 1개, 넓이가 $-x$인 사각형 2개, 넓이가 1인 정사각형 1개를 가져온다. 넓이 x^2과 1을 더한 넓이에서 $2x$만큼 빼야 한다. 다른 대수막대 위에 얹어 놓으면 얹어 놓은 만큼의 넓이는 0이 되므로 그만큼의 넓이가 줄어들게 된다. 아래 그림과 같이 넓이가 x^2인 정사각형 위에 넓이가 $-x$인 직사각형을 엇갈리게 얹고 $-x$가 밖으로 나간 부분에 1을 얹으면 겹친 부분의 넓이는 0이 되어 없어지고 남은 부분은 넓이가 x^2-2x+1인 직사각형이 된다. 따라서 $x^2-2x+1=(x-1)^2$이다.



<그림 8> 음수를 넓이의 축소개념으로 다룬 예(한국교육과정평가원, 2000, p.172)



▌인수분해 활동지 3▐

학년 반 번 이름( )

x^2+2x-3를 종이조각을 이용하여 인수분해해 보자.

x^2+2x-3는 큰 정사각형 1개(x^2), 직사각형 2개($2x$), 작은 녹색 정사각형 3개(-3)로 나타낼 수 있다. 이 6개의 조각을 책상 위에 놓은 다음 재배열하여 직사각형모양이 되게 해보자. 그대로는 잘 안될 것이다. 그러면 흰색 직사각형 1개(x)와 녹색직사각형 1개($-x$)를 더 가져다가 다시 시도해보자. $x+(-x)=0$ 이므로 식에는 변화가 없다!

x^2+2x-3과 $(x+3)(x-1)$는 같은 넓이를 나타내기 때문에

$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ 이다.

따라서, x^2+2x-3를 인수분해하면 $(x+3)(x-1)$이다.

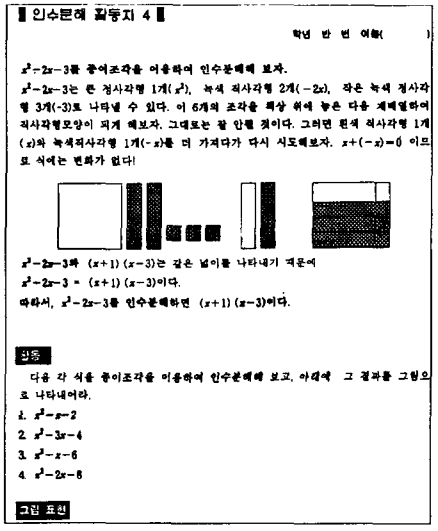
실동

다음 각 식을 종이조각을 이용하여 인수분해해 보고, 아래에 그 결과를 그림으로 나타내어라.

1. x^2+3x-4
2. x^2+x-6
3. $x^2+3x-10$
4. $x^2+2x-15$

그림 표현

<그림 9> 넓이의 축소로 음수를 처리한 예
(수학사랑, 1999, p.201)



▌인수분해 활동지 4▐

학년 반 번 이름( )

x^2-2x-3를 종이조각을 이용하여 인수분해해 보자.

x^2-2x-3는 큰 정사각형 1개(x^2), 녹색 직사각형 2개($-2x$), 작은 녹색 정사각형 3개(-3)로 나타낼 수 있다. 이 6개의 조각을 책상 위에 놓은 다음 재배열하여 직사각형모양이 되게 해보자. 그대로는 잘 안될 것이다. 그러면 흰색 직사각형 1개(x)와 녹색직사각형 1개($-x$)를 더 가져다가 다시 시도해보자. $x+(-x)=0$ 이므로 식에는 변화가 없다!

x^2-2x-3과 $(x+1)(x-3)$는 같은 넓이를 나타내기 때문에

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$이다.

따라서, x^2-2x-3를 인수분해하면 $(x+1)(x-3)$이다.

실동

다음 각 식을 종이조각을 이용하여 인수분해해 보고, 아래에 그 결과를 그림으로 나타내어라.

1. x^2-x-2
2. x^2-3x-4
3. x^2-x-6
4. x^2-2x-8

그림 표현

<그림 10> 넓이의 축소로 음수를 처리한 예
(수학사랑, 1999, p.203)

(3) −를 포함한 복잡한 다항식 연산의 어려움

대수타일의 조작활동에는 다항식의 연산과정이나 인수분해의 인수를 찾는 과정에서 같은 개수의 음수 타일과 양수 타일을 첨가해야 하는 경우가 있다. 이는 필요한 만큼의 0을 첨가하여 주어진 식의 값은 그대로 유지하면서 그 표현을 달리하는 것으로 타일의 조작이나 직사각형의 구성을 의미 있게 처리하기 위한 것이라고 할 수 있다. 본 고의 실험수업사례에서도 주어진 식에 0을 첨가하는 과정이 인수분해의 문제해결활동에서 예시된 바 있다. (<그림 7> 참조).

연구자는 실험수업을 통해서 과연 학생들 스스로가 0을 첨가해야 할 필요성을 느끼는 가의 문제, 0의 역할과 그 처리과정을 올바르게 이해하는 가의 문제, 0의 첨가와 관련된 조작활동이 대수타일을 이용한 학습의 효율성을 가져다주는가의 문제를 생각해 보게 되었다. 교사의 안목에서 간단하고 쉬운 작업일 수 있는 그러한 활동이 학생들에게는 다소 생소한 받아들여질 수 있는 어려운 학습과정이 될 수도 있음을 생각하게 된 것이다. 특히 괄호가 있는 복잡한 다항식의 연산을 하는 경우에도 그 결과의 표현을 위해 식에 0을 첨가해야 하는 상황이 불가피하게 일어나게 된다. 복잡한 다항식을 다루게 될 때 음수나 뺄셈과 관련된 인지적인 어려움의 문제가 발생되는 것이다.

역사적으로 음수가 그 존재를 정당하게 인정받기까지 오랜 시간이 걸렸다는 것을 우리는 잘 알고 있다. 수와 관련된 수학의 오랜 역사 속에는 아무 것도 없는 것 즉, 0보다 더 작은 것이 과연 무엇인가, 작은 것에서 큰 것을 빼면 그 결과가 어떻게 되는 것인가, 그것을 어떻게 표현할 수 있는가 등의 문제를 해결하고자 한 노력의 기나긴 과정이 스며들어 있다. 대수타일의 조작활동에서도 음수를 인정하기까지의 과정에서 제기된 여러 가지 의문들이 여전히 존재하는 것으로 보인다. 대수타일로 다항식의 차를 다루는 몇 가지 경우를 살펴보자.

괄호가 포함된 다항식의 차를 생각해보면 몇 가지 경우에서 학생들에게 학습의 어려움을 여전히 존재할 수 있음이 짐작된다. 앞의 내용의 <그림 5>에 제시된 바와 같이 $(2x^2+3x+5)-(x^2+2x+2)$의 조작은 이미 존재하는 타일에서 몇 개의 타일을 빼는 활동으로 지도되면서 학생들에게 그다지 어려움을 주지 않지만 $5x-(x-1)$와 같은 식을 대수타일로 조작하려면 어떻게 해야 하는가? 괄호의 해결을 어떻게 해야 하는가? 일반적으로 괄호가 있을 때에는 이를 먼저 없애고 식을 풀어나가야 한다고 알고 있는 학생들에게 대수타일을 이용한 괄호의 처리를 어떻게 설명할 수 있는가? 대수타일을 이용하여 위의 문제를 해결하려면 <그림 5>에 제시된 문제해결활동과 같이 앞의 식을 나타내는 타일의 집

합에서 뒤의 식을 나타내는 타일의 집합을 제거해야 한다. 이를 해결하려면 $5x$를 $5x+0$으로 생각하여 $5x+1-1$에 해당하는 타일의 집합을 만들고 여기서 하나의 x와 하나의 -1을 빼야 한다. 빼는 행위를 정당화하기 위해 앞의 항에 해당되는 타일의 집합에 빼야 할 타일이 모두 들어 있도록 0에 해당하는 적당한 개수의 타일을 첨가하는 과정은 일종의 형식적인 절차로 지도되면서 음수 개념의 학습과 관련하여 학생들이 경험하는 인지적인 어려움을 완전히 해결해 주지는 못하는 것으로 보인다. 한편 음수를 형식적인 하나의 실재로서 받아들이고 있는 일부 학생들의 이해수준에서는 빼는 식에 해당되는 타일을 미리 만들어 놓아야 한다는 조작행위가 불필요 작업으로 느껴질 수 있으며 이것이 오히려 학습에 비효율성을 가져다주는 요인으로 작용할 수도 있다. 다항식의 연산을 대수타일을 이용하여 해결하는 것은 마이너스와 함께 괄호가 있는 복잡한 다항식의 경우에는 그 적용이 학습의 어려움을 더욱 가중시킬 수 있다. 다항식의 연산을 타일을 가진 실제적인 조작활동으로 계속 지도하게 되면 괄호 앞에 붙은 마이너스 부호의 처리 문제를 동치인 식의 변형으로 형식적으로 다루게 되는 시점과 맞물리면서 오히려 인위적으로 꾸민 조작활동의 학습을 불필요하게 가중시키는 상황이 연출될 수도 있는 것이다.

대수타일은 다항식의 연산을 모델화하는데 있어서 기존의 수학학습에서도 발생될 수 있는 뺄셈과 관련된 이해의 문제를 여전히 그대로 드러내고 있는 것으로 보인다. 음수, 뺄셈 학습과 관련된 이해 문제에서 0보다 작은 것을 정당화하기 위한 형식적인 처리의 문제는 대수타일을 이용한 학습에서도 여전히 그대로 존재하고 있는 것이다. 다만 다항식의 연산결과에 대한 정당화를 시각적으로 확인할 수 있게 하는 방법만을 제공할 뿐이다.

뿐 만 아니라 대수타일의 조작활동은 삼차 이상의 다항식의 연산에는 적용될 수 없다. 다항식의 연산지도를 위해 수업시간에 다루어야 할 모든 문제를 대수타일로 해결하려는 시도는 바람직하지 않은 것으로 생각된다. 대수타일의 활용은 간단한 다항식의 연산의 예에서 동류항의 의미를 지도하거나, 동류항끼리의 연산에 대한 정당화를 시각적으로 설명하고자 할 때, 간단한 다항식의 합과 차를 조작활동의 예로 보여주는 정도의 범위 내에서 수업에 이용되는 것이 바람직할 것으로 보인다.

교사가 학생들에게 다항식 연산을 주로 대수타일의 이용을 통해서 해결해 가는 방법으로 지도하게 되면 학생들은 학습의 진전과 함께 그 깊이가 더해질수록 많은 문제의 경우에서 대수타일의 적용한계를 느끼고 경우에 따라서는 인지적인 혼란을 경험하게 되어 교구사용에 대한 불신을 갖게 될 수도 있는 것이다.

(4) 이미 알고 있는 개념을 다룰 때의 비효율성

개념적으로 이미 이해가 되어 있는 학습내용을 대수타일의 조작활동으로 지도하는 것은 수학의 내용과 거의 동일한 조작과정을 다시금 학습하게 함으로써 학생들에게 오히려 불필요한 학습과정을 부과시키는 상황을 만들 수도 있다. 아래의 예시문을 들어보자.

> 중학교 3학년 학생들에게 이 활동을 실시한 바 있는데 몇 가지 문제점이 발견되었다. 이미 인수분해 과정을 학원에서 배운 경험이 있는 학생들이 상당수 있어서 타일을 이용하는 것을 오히려 거추장스럽게 여기는 현상이 발생한 점이다. 이런 현상은 이미 알고 있는 알고리즘을 그대로 행하는 데 구체적 조작물을 사용하는 것은 비효과적이라는 선행연구와도 일치하는 것이다. 따라고 이 활동은 인수분해를 배우기 이전에 발견적으로 학습되어야 한다고 생각한다(김효정, 1995, p.63).

위의 예시문에서 잘 알 수 있듯이, 대수타일을 이용한 학습은 다루고자 하는 수학의 내용을 교육과정에서 명시적으로 다루기 훨씬 이전에, 또는 새로운 개념을 처음 도입해야 하는 단계에서 그 개념에 대한 아이디어를 발견적으로 경험시키려는 의도로 계획되는 것이 적절하다고 생각한다.

연구자가 실험수업으로 인수분해의 아이디어 지도[18]를 중학교 1학년 학생들에게 실시하고자 계획한 것에는 바로 위와 같은 생각이 반영되어 있다. 연구자는 실험수업에서 중학교 1학년 학생들이 문제해결에서 타일을 이용하는 것을 번거롭게 생각하거나, 불필요한 작업이라고 느끼기 보다는 오히려 그 조작활동을 통한 문제해결에 대해 상당히 신기하고 흥미로운 관심을 보여주었음을 관찰하였다. 그리고 학생들은 인수분해 아이디어의 실제적인 의미를 체험하며 그 해결과정을 올바르게 수행하는 모습을 보여주었다. 연구자는 아직 배우지 않은 수학의 내용을 대수타일을 통해 발견적으로 학습할 수 있게 계획한 실험수업이 학생들에게 상당히 효과적이었음을 경험한 것이다.

김효정(1995)의 예시문 내용이나 연구자의 실험수업의 경험에서 알 수 있듯이 교구를 다루는 시기의 결정은 그 학습효과와 직접적인 관련을 갖는 중요한 문제라고 생각한다. 특히 대수타일과 같은 교구는 그 특성상 중학교 수학교육과정에 적합한 내용을 모델화하고 있어서 중학교 현장 교사들이 많이 활용하고 있는 교구이다. 이미 형식적인 사고수준에 있는 중학생들을 대상으로 한 수업에서 대수타일의 조작은 오히려 학생들의 수학학습을 비효율적으로 만들 위험성이 있다[19].

---

18) 현행 교육과정에 따르면 인수분해는 중학교 3학년에서 지도된다.

19) 교구활용수업에서 수학성취도가 낮은 학생들은 교구의 조작활동 자체에서도 어려움을 겪을

중학교 수준의 학생들을 대상으로 한 대수타일의 활용은 학습의 새로움과 신선감이 유지될 수 있고 발견적인 학습의 흥미를 자아낼 수 있는 시기에 계획되어야 적절할 것이다. 교육과정의 내용을 본격적으로 지도하기 훨씬 이전에 즉, 그 내용이 아직 개념적으로 소개되어 있지 않은 상태에서 학생들로 하여금 학습할 내용의 아이디어를 조작을 통해 실제적으로 경험해 볼 수 있게 하여 그 개념에 대한 심상을 갖추게 하는 것이 바람직하다고 생각한다.

중학교 수준의 학생들을 대상으로 한 대수타일의 조작활동은 새로운 학습내용을 발견적으로 학습시키는데 유용하지만 적절한 학습 시기와 학습 범위 이상으로 수업에 자주 사용하게 되면 충분한 학습효과를 기대하기가 어려워지는 것으로 보인다. 학습내용이 이미 소개되어 어느정도 이해가 되어 있는 상태에서 대수타일의 조작활동으로 다시금 반복학습하는 것은 어쩌면 형식적 조작기에 접어든 학생들에게 불필요한 학습을 부과하여 학습의 효율성을 저하시키는 상황을 만들 수도 있는 것이다.

VI. 맺음말

본 고에서는 대수타일이라는 특정한 교구를 대상으로 실험수업을 시행하고 실험수업의 경험과 대수타일사용에 대한 이론적 논의를 토대로 대수타일의 활용에서 고려해야할 교수학적인 문제점들을 정리하여 보았다. 교구와 관련된 선행연구들이 교구의 활용방법과 그 긍정적 효과를 중심으로 논의되었던 것과는 달리, 본 고에서는 교구 이용에서 발생할 수 있는 교수학적인 우려와 교사가 교구 활용의 계획에서 고려해야 할 교구 이용의 문제점을 부각시켜 다루어 보았다.

'대수타일을 이용한 수학학습(김남희, 2000)'에서 대수타일 교구의 활용방법과 지도사례를 소개하고 본 고에서는 그 교구 사용의 교수학적인 문제점을 부각시킨 내용을 다루고 있는 것이 어쩌면 읽는 이로 하여금 '걸맞지 않다'는 생각을 갖게 할 지도 모르겠다. 그러나 연구자의 이런 작업은 교사들로 하여금 교구에 대한 바른 이해와 수학모델로서의 한계점을 인식하고 그것을 적절한 시기에 유용한 범위 내에서만 활용하려는 판단의 기초를 제공하고자 한 것이었다. 이러한 의도는 실제 학교 현장 경험에서 느낀 안타까움에서 비롯된 것이다. 교구가 새로운 수업형태의 시도 속에서 그 긍정적 효과와 편리성이 부각되면서 교구에 대

수 있다는 것도 여전히 미해결된 문제이다.

한 철저한 분석 없이 수업시간에 마구 이용되는 상황, 교구의 무계획적인 사용으로 인해 발생할 수 있는 교수학적인 문제점들에 대한 고려없이 여러 가지 교구를 수업에 자주 이용하는 상황은 그 개선의 여지가 충분히 있다고 생각한 것이다.

본 고의 내용은 표면상으로는 교사들에게 대수타일이라는 교구 사용에 대한 올바른 이해와 대수타일의 활용 범위에 대한 판단의 기초를 제공하는 것으로 드러나 있지만 본 고의 궁극적인 의도는 대수타일이라는 특정한 교구에서 나아가 교사가 어떠한 교구[20]를 사용함에 있어서도 그 교구 활용을 위해서는 본 고에서 논의된 바와 같은 교수학적인 분석을 반드시 행하여야 한다는 것을 주장하는 것이다.

수학의 발달사에서 나타난 여러 가지 오개념은 조종되지 않은 그림 모델의 개재에 의해서 발생되었다는 이야기는 우리에게 시사하는 바가 있다. 교구는 수학에 대한 일종의 모델로서 형식적이고 추상적인 수학의 내용을 실제적인 의미를 갖는 구체적인 활동을 통해서 쉽게 이해할 수 있도록 하는 장점을 가지지만 교구의 사용으로 인해 수학학습에서 뜻하지 않는 오개념이 유발될 수 있고 교구가 수학원형을 완전하게 구현할 수 없다는 제한점을 가지기 때문에 교구를 사용하려는 교사들에게는 그것을 수학학습의 어느 정도의 범위 내에서 활용할 것인가에 대한 신중한 판단이 요구된다.

본 고에서 논의의 대상으로 다루어진 대수타일도 변수의 부호 개념에 대한 잘못된 이미지를 갖게 할 수 있고, 곱셈의 면적모델에서 발견되는 불완전성으로 대수를 기하적으로 잘못 해석하게 할 수도 있는 오류를 가지며 복잡한 다항식의 처리문제에서 원형 표현의 한계가 있다는 등의 문제점이 지적되었다. 또한 이미 알고있는 개념에 적용될 때 발생할 수 있는 학습의 비효율성 문제는 교사들에게 교구의 활용시기에 대한 문제를 신중하게 고려할 필요성이 있음을 시사한다.

어떠한 교구라도 수학원형을 완벽하게 구현해 내기 어렵게 때문에 항상 문제해결의 한계에 부딪히는 상황이 발생할 수 있어서 수학의 내용을 전적으로 교구에 의존해서 지도하는 것은 교수학적인 위험을 내포한다. 대수타일 교구도 다항식 연산의 모든 경우에 다루어지기 곤란함이 드러났으며 그러한 제한에도 불구하고 그것을 수업에 활용하려는 것은 새로운 내용의 도입단계에서 그것이 중요한 역할을 할 수 있다는 것과 개념을 다루기 이전의 발견적 학습에 활용될 때 효과적일 수 있다는 사실을 인정하기 때문이다.

어떠한 교구의 경우에 있어서도 이를 이용하려는 교사들에게는 교구의 긍정적 효과를 극

20) 교사들에게 이미 잘 알려져 있는 십진블럭, 퀴즈네어 막대, 도미노, 패턴블럭, 탱그램 등의 구체적 조작물이나 GSP, CABRI, LOGO 등과 같은 수학보조프로그램도 여기에 해당될 수 있다.

대화하고 학습의 부정적인 영향을 최소화 할 수 있는 학습 시기와 학습 범위를 결정하는 문제가 최대과제로 부과되어 있는 것이다.

참 고 문 헌

수학사랑(1999). 수학사랑에서만 쉬~리. 제 2회 수학사랑 세미나팀 연구 발표회 자료집 (pp.197-207).

한국교육과정평가원(1999). 중학교 수학과 수행평가 시행방안 및 자료 개발 연구. 연구보고 CRE 99-5(pp.170-174).

김남희(1999a). 수학의 기본 구조 지도와 딘즈블럭. 대한수학교육학회지 학교수학, 1(1), 305-324.

김남희(1999b). 학교수학 학습에서의 퀴즈네어 막대 활용. 대한수학교육학회지 학교수학, 1(2).

김남희(2000). 대수타일을 이용한 수학학습. 대한수학교육학회지 학교수학, 2(1), 259-281.

김연식, 김홍기(1996). 중학교 수학 3. 동아출판사.

한국수학교육학회(1999). 제 1 회 초등학교 수학 교수 방법 개선을 위한 워크샵 : 제 7 차 교육과정 적용을 위한 교수 매체 활용.

한국수학교육학회. 수학교육 학술지, 3, 99-168.

수학사랑(2000). 제2회 Math Festival 자료집.

A Didactical Discussion on the Use of Mathematical Manipulatives

Kim Nam Hee (Nangok Junior High School)

In this study, we tried to suggest an example of the analysis on the use of mathematical manipulatives. Taking algebra tiles as an example of

mathematical manipulatives, we analysed several effects resulted from the use of algebra tiles

The algebra tiles make it possible to do activities that are needed to introduce and explain the distributive law and factoring. The algebra tiles have a several advantages; First of all, This model is simple. Even though they cannot make algebra easy, this model can play an important role in the transition to a new algebra course. This model provides access to symbol manipulation for students who had previously been frozen out of the course because of their weak number sense. This model provides a geometric interpretation of symbol manipulation, thereby enriching students' understanding. This model supports cooperative learning, and help improve discourse in the algebra class by giving students objects to think with and talk about.

On the other hand, The disadvantages of this model are as follows; the model reinforces the misconception that $-x$ is negative, and x is positive; the area model of multiplication is not geometrically sound when minus is involved; only the simplest expressions involving minus can be represented; It is ineffective when be used the learning of already known concept.

Mathematics teachers must have a correct understanding about these advantages and disadvantages of manipulatives. Therefore, they have to plan classroom work that be maximized the positive effect of manipulatives and minimized the negative effect of manipulatives.