대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제1호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.1, 53~72, March 2000

수학적 의사소통과 수학의 교수-학습

유 현 주 (전주교대)

I. 들어가는 말

정보화 사회로의 변화에 따라 달라져야 할 수학교육의 새로운 목표가 1990년대와 2000년대 학교수학을 위한 <NCTM Standards>에 의해 공표된 이래 수학과 교육과정의 방향과 내용도 달라지고 있다. 그것은 곧 수학적 개념. 지식. 기능의 획득과 숙달을 주로 했던 것에서 수학적 문제해결력. 수학적 추론 능력. 수학적 의사소통 능력의 신장을 적극적으로 반영하게 된 것으로의 변화이다. 이와 같은 변화는 한마디로 '수학적 힘의 신장'으로 집결될 수 있다. '수학적 힘'이란 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학에 관한 또는 수학을 통한 정보 교환 능력, 수학내에서 또는 수학과 다른 학문적 영역 사이의 아이디어를 연결하는 능력, 문제해결이나 어떤 결정을 내려야 할 때 수량과 공간에 관한 정보를 찾고 평가하고 사용하려는 성향과 자신감을 포함하는 것으로, 인지적인 측면과 정의적인 측면을 모두 포함한다.

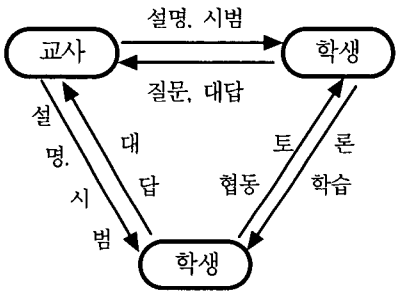
이와 같은 능력은 모두 수학을 학교의 한 교과로 배우고 마치는 것이 아닌 실세계에 의미있게 적용될 수 있는 도구가 되도록 하는 것을 염두에 두고 있다. 이 가운데 수학적 문제해결력이나 추론과 같은 것은 강조되어 교수-학습에 반영되고 있으나 수학적인 의사소통은 선언적으로만 강조되고 있는 실정이다. 이에 본 고는 수학적 의사소통의 의미와 중요성을 이론적으로 살펴보고, 효과적인 지도의 방법 및 이를 신장시키기 위해 수학과 교수-학습에서 활용할 수 있는 구체적인 학습자료를 탐색해 보고자 한다.

II. 학습과 의사소통

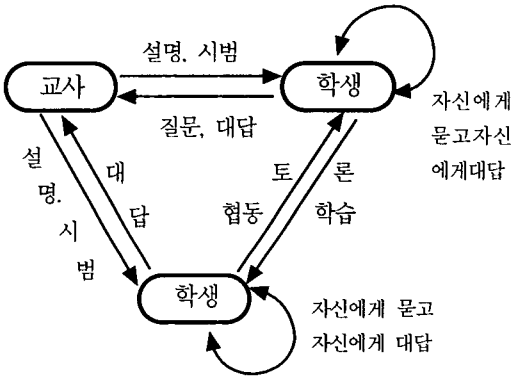
어느 교과의 교수-학습이든 그 과정은 기본적으로 의사소통을 통해 전개되어 간다. 그것

은 교사는 가르치고 학생은 교사가 요구하는 질문에 적절한 답을 구사하는 방식이라 할 수 있다. 수업에 참여하는 성원들 사이에 이루어지리라고 예상되는 의사소통의 흐름을 도식화하면 <그림 1>과 같다.

교사와 학생간의 의사소통 가운데 어느 부분이 주가 되느냐에 따라 교사 위주의, 학생이 중심이 된 혹은 교사와 학생간의 상호 작용이 이루어지는 수업이 된다고 할 수 있다. 지금까지 수학 수업에서 찾아 볼 수 있는 의사소통은 주로 선생님과 학생 전체 간에서 주로 이루어지며, 간혹 개별적인 학생에게 선생님이 주는 질문이나 간단한 언급이라고 할 수 있다. 그러나 그 수업의 형태가 어떠하든 결과적으로 의도하는 바는 학생 스스로의 힘으로, 배운 바 지식. 기능 등을 활용할 수 있는 능력의 양성이라고 할 수 있다. 그러한 상태는 자기 스스로 의문을 품고 스스로 해답을 찾는 개인의 정신 내에서 이루어지는 내적인 의사소통 과정이라 할 수 있으며 <그림 2>와 같은 도식으로 표현될 수 있을 것이다.



<그림 1 >



<그림 2>

위의 두 도식을 비교해보면, 교수-학습의 최종목표인 개인의 내적인 의사소통 능력 함양에는 일방적인 혹은 한쪽에 편중된 의사소통 방식보다는 가능한 의사소통이 이루어지는 형태의 수업이 효과적이리라 짐작할 수 있다. 수업에서 일반적으로 이루어지는 개인간 상호작용이 개인 내 정신기능에 어느 정도 영향을 미치리라는 것은 짐작될 수 있으나 비고츠키(Vygotsky)의 연구에 따르면 그 영향은 절대적이다. 비고츠키에 따르면, 아동의 고등 정신기능의 발달에서 모든 기능은 두 국면에서 나타나는데, 첫 번째는 아동이 다른 사람들과 **상호작용 하는 가운데서** 나타나고, 두 번째는 아동이 고등정신기능을 내면화함으로써 **아동 내에서** 나타난다는 것이다. 여기에서 내면화되었다는 것은 그 고등정신기능이 진정한 내적 정신기능으로 아동 내에서 작용함을 의미한다. 그리고 아동내의 고등정신 기능의 발생은 바로 다른 사람들과의 상호작용에서 비롯된 것이다.

비고츠키에 있어서 개인간 정신 기능으로부터 개인 내 정신 기능으로 변화되는 '내면화' 과정은 매우 중요하다. 피아제는 어린 아동의 물리적 세계와의 상호작용에 관심을 두면서 상호작용의 결과가 내면화되는 것을 주로 발달의 자연적인 순서와 관련시키는 반면, 비고츠키는 내면화를 발달의 사회적, 문화적인 것과 관련시킨다. 그에게 있어 내면화는 사회적 현상을 심리적 현상으로 변형시키는 과정이며, 외적인 수준에서 수행되어 왔던 활동 유형 중 어떤 측면이 내적인 수준에서 실행되는 과정이다. 그리고 공유된 환경에 있던 정신기능들이 개인 내로 들어오는 지점을 그는 자신의 독창적인 개념인 '근접발달대'라 지칭하였다. 비고츠키는 아동발달에 영향을 미치는 사회적 관계를 강조하는데, 여기에서 사회적 관계란 '교수적 관계'를 말하는 것으로서 이때 교수자는 교사. 부모와 같은 성인이거나 자신의 또래일 수 있다. 자신의 환경 속에 있는 이들과의 상호작용을 통해 '중재된 학습 경험'을 가짐으로써 아동 내부의 발달 과정은 일깨워지고 아동이 이를 내면화함으로써 독립적인 성취를 이룰 수 있게 된다. (Vygotsky, 1978)

이와 같은 비고츠키의 이론에 비추어 볼 때, 교수는 아동의 근접발달 대에서의 수행을 그 아동에 비해 더 유능한 타인이 돕는 것으로부터 시작된다. 거기에서 아동의 고등정신기능은 사회적 국면으로부터 개인적 국면으로, 개인간 정신국면으로부터 개인내 정신국면으로, 사회적 조절(social regulation)로부터 자기 조절(self regulation)로 전환된다.

비고츠키와 논점이 다소 다르지만 피아제 역시 또래 아동들과의 공동활동이 아동의 인지발달에 영향을 미친다고 주장한다. 피아제에 의하면, 아동들의 공동활동은 인지적 갈등을 낳는 상황을 초래하고, 또래들과의 인지적 갈등, 불일치를 통해 아동들은 자신의 견해와 타인의 견해간의 차이점을 깨닫게 된다. 이러한 불일치 상황들은 아동으로 하여금 자신의 인지구조를 조절하거나 재조직하는 기회를 갖게 하여 인지발달을 촉진시키는 수단이 되는 것이다.

III. 수학의 학습과 의사소통

비고츠키와 피아제의 이론이 보여주듯이 교수-학습에 있어서 아동들간의 공동 활동과 의사소통에 의한 그 활동의 공유는 본질적인 부분을 차지한다고 할 수 있다. 이것은 수학교육에서도 역시 그러하다. 최근의 세계적인 수학교육 동향에 '수학적 의사소통 능력의 함양'이 포함된 것도 이와 같은 이유에서이다. 수학수업에서 교사와 학생간의 의사소통만이 아닌 학생들간의 의사소통이 강조되면 다음과 같은 효과를 기대할 수 있다.

첫째, 다른 사람들과 의사소통하기 위해 학생 스스로의 수학적 사고를 체계화하고 명백하게 할 수 있는 기회가 마련된다. 어떤 수학적 개념. 아이디어나 문제에 대한 해결방법은 의사소통을 통해서 논의의 대상이 되며, 수정하거나 정련하거나 반성할 대상이 될 수 있다. 여러 가지 사고는 순식간에 일어나기 때문에 그것을 외부로 표현하지 않으면 초기에 가졌던 생각이나 아이디어는 그 타당성이나 일반화 가능성이 점검될 수 없기 때문에 그 수준 이상으로 발전될 수 없다. 수학적 아이디어와 추론은 언어나 문장으로 표현될 때 좀 더 쉽게 점검되고 이해된다. 학생들은 교실에서 보고 듣는 수학을 자신의 것으로 만들어 내면화하지 않는 한 파지하지 못한다. 일단 자신이 가지고 있는 아이디어가 공개되면, 그것들은 점검되고 수정되고 확대된다.

반성과 이를 위한 의사소통은 수학학습에서는 불가분의 과정들이기 때문에 이 과정이 원활하게 될 수 있도록 교사의 세심한 주의와 계획이 필요하다. 저학년 아동들에게 그들의 답을 설명하고 전략을 설명하는 것을 배우게 할 필요가 있다. 글을 쓰는 것도 반성을 위해 사용될 수 있는 좋은 방법이다. 수업이 끝나고 난 뒤 몇 분 동안 그날 수업 시간에 배운 것과 그 수업의 아이디어들에 대해 가지게 된 질문을 쓰게 하면 사고를 체계화하고 반성, 정리의 기회가 될 수 있다.

둘째, 다른 사람들의 사고방식과 전략들을 고려함으로써 자신들의 수학적 지식이 명확해지고 확장된다. 아동들이 다른 사람들과 의사소통 하려고 함으로써 발생하게 되는 학습 기회는, 대화하는 과정에서 자신의 생각을 말로 표현할 때, 그리고 함께 활동하는 동료가 하는 말을 해석하고 이해하려고 하는 과정에서도 발생하게 된다. 협력적인 의사소통은 학생들이 말을 함으로써 그리고 또래가 하는 말을 이해하려고 할 때 자신의 인지적인 구성을 재개념화함으로써 자신이 이해했는지 여부를 명확하게 할 수 있도록 해준다.

주어진 문제를 이해하는 한 가지 방법을 가진 학생은 그 문제의 다른 측면을 드러내주는 다른 학생의 관점으로부터 이익을 얻을 수 있다. 예를 들면 중학교 3학년 학생들이 다음의 문제에 접근한 경우이다(NCTM, 1996).

> 현경이는 남자 형제만큼 여자형제가 있다. 그녀의 오빠 용진이는 남자형제의 2배 만큼의 여자형제가 있다. 이 가족은 여자형제와 남자형제를 각각 몇 명씩 가지고 있는가?

이 문제를 푸는 데 사용되는 방법은 여러 가지가 있다. 어떤 학생들은 문제가 모든 조건을 만족할 때까지 추측하는 방법을 사용하는 데, 문제의 조건을 가지고 추측을 점검하고, 추측을 수정하고, 다시 점검함으로써 다음과 같이 추론했다.

단계 1 : 먼저 추측을 한다. 나는 현경이가 같은 수의 여자형제와 남자형제가 있다고 말했다. 따라서 현경이는 1명의 여자형제와 1명의 남자형제가 있을 수도 있다.

단계 2 : 그러고 나면 용진이는 2명의 여자형제를 가지고 남자형제는 한명도 없다. 그런데 용진이는 남자 형제의 2배인 여자형제를 가져야만 한다. 용진이의 남자형제는 없지만 현경이는 남자형제로 용진이를 세어야 하기 때문에 다루기 힘들다.

단계 3 : 나는 소년. 소녀들의 표를 만드는데서 막혔다. 나는 용진이와 현경이를 자매와 형제로 표에 썼다.

단계 4 : 현경이는 남자형제와 같은 수의 여자형제를 가져야 하므로 여자 1명을 더했다. 거기서 용진이는 없지만 현경이는 찾을 수 있다.(자매: 현경, 여자 동생 / 형제: 용진)

단계 5 : 그 다음 용진이는 1명의 남자형제를 가져야 하므로 남자 1명을 더 추가시켰다. 거기서는 현경이는 찾을 수 없고 용진이는 있다. (자매: 현경, 여자 동생 / 형제: 용진, 남동생)

단계 6 : 현경이는 남자형제와 같은 수의 여자형제를 가져야 하므로 여자 1명을 더했다. 현경이도 있다. 그녀는 2명의 여자형제와 2명의 남자형제가 있다. 여전히 용진이도 찾을 수 없다. 용진이는 3명의 여자형제와 1명의 남자형제가 있다. (자매: 현경, 여동생, 여동생 / 형제: 용진)

단계 7 : 그래서 나는 용진이에 관해서 시도했다. 그는 2배의 여자형제를 가지고 있어야 한다. 그래서 나는 4명의 여자형제와 2명의 남자형제를 생각했다. 성공했다. 현경이는 3명의 여자형제와 3명의 남자형제를 가진다. 용진이는 남자형제 중 하나이다. 용진이는 현경이를 더해 4명의 여자형제를 가지고 2명의 남자 형제를 가진다. 그 가족은 여자형제 4명 남자형제 3명을 가진다.

이에 비해 소수의 학생들은 대수적인 방법으로 이 문제를 풀었다.

단계 1 : '$x=$현경이의 여자형제'라고 놓자. 그것은 여자형제의 수가 $x+1$임을 의미한다. 1은 현경이다.

단계 2 : '$y=$용진이의 남자형제'라고 놓자. 남자형제의 수는 $y+1$이다. 1은 용진이다.

단계 3 : 현경이의 조건에서 남자형제의 수는 x와 같다.

단계 4 : 용진이의 조건에서 여자형제의 수는 $2y$와 같다.

단계 5 : 두 조건에서 여자형제의 수는 $x+1=2y$이다. 남자형제의 수는 $x=y+1$이다.

단계 6 : 우리는 방정식 $x+1=2y$와 $x=y+1$을 푼다.

$$x=y+1$$
$$(y+1)+1=2y$$
$$y+2=2y$$
$$\therefore \quad y=2 \quad x=3$$

현경이는 3명의 여자형제를 가지므로 이 가족에는 4명의 여자형제가 있다. 용진이는 2명의 남자형제를 가지므로 이 가족은 3명의 남자형제를 가진다. 검산한다. 7명의 아이들이 있다.

어떤 학생은 이 문제를 앞서와 같이 추측과 확인 전략을 써야만 풀 수 있다. 그런데 이 방법은 주의 깊게 모든 과정을 살피면서 더디게 진행된다는 문제점을 가지고 있다. 반면 다른 학생들은 대수적으로 접근하여 문제해결의 구조를 명확하게 하기도 한다. 그러나 이 방법은 문제풀이의 대부분을 대수적인 식에 의존하기 때문에 세세한 조건을 놓칠 수 있다는 문제점을 가지고 있다. 문제를 푸는 여러 가지 방법에 관한 토의에서, 학생들은 다른 사람들의 관점과 방법들을 보고, 그것들이 옳은지 유용성이 있는지를 평가하고, 이후에 다른 문제들에 이러한 방법들을 스스로 사용할 기회를 가질 수 있다.

다른 사람들의 사고방법을 고려하고, 평가하며, 신뢰하는 과정은 아주 복잡할 수 있다. 여러 가지 문제들에 대한 다양한 접근방법을 고려하기 위해서, 학생들은 수학적 개념과 용어를 쉽게 사용할 수 있는 능력을 개발하는 과정에 있는 또래들에게 주목하는 것을 배우게 된다. 또한 분명하지 않은 아이디어를 명료하게 하기 위하여 다른 사람들의 사고에 대하여 의문을 가지고 탐구하는 것을 배우게 된다. 더 나아가 모든 방법들이 똑같은 장점을 가지는 것이 아니라는 것을 인식하고, 그것들의 장. 단점을 결정하기 위하여 다른 사람들의 방법들과 아이디어를 검사하는 것을 배울 수 있게 된다. 그러한 과정을 통하여 수학에 관한 비판적인 사고가가 될 수 있다.

이러한 관점에서의 의사소통의 유익은 수학적 개념을 학습하는데 있어서도 적용될 수 있다. 나눗셈의 개념을 학습하고 난 뒤 말하기-듣기-쓰기를 결합하여 지도한 경우에서 그것을 발견할 수 있다(NCTM, 1996).

생각하기

교사: 나눗셈은 무엇입니까? 나눗셈에 대하여 생각하여 봅시다. 말하지는 말고 생각만 하세 요. 이 시간이 끝나면 말할 기회를 주겠어요. (학생들은 스스로 몰두하여 있다. 그들은 스스로 반성적인 대화를 하는 것이다.)

말하기

교사: 그룹별로 모여 서로 돌아가면서 나눗셈에 대하여 말해 보세요. 각자 30초 동안 말하도록 하세요. 한 사람이 말하면 다음 사람들은 주의 깊게 들으세요. 다음 사람이 말할 차례가 되면 선생님이 말하겠어요. (학생들은 말하기 시작한다. 한 그룹에서의 예를 보면 다음과 같다.)

재현: 나눗셈은 집합에서 어떤 것을 집어내는 것이라고 생각합니다.

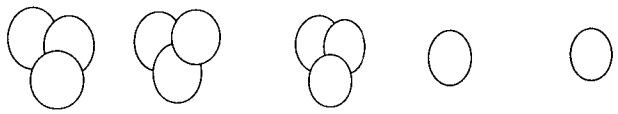
은숙: 나눗셈을 한다고 할 때는 어떤 한 집합에서 더 작은 집합으로 나누는 것을 말합니다.
희진: 집합들은 똑같이 나누어져야 합니다. 그러니까 나누어진 집합들은 같아야 한다는 말입니다.
상구: 그러나 때때로 그것은 제대로 나누어지지 않고 남을 때도 있는데 이것을 나머지라고 합니다.

쓰기

교사: 자 각자 그룹에서 말했던 것을 써 보도록 합시다. 나눗셈을 설명하기 위해 그림을 그려도 좋아요. 자, 시작합시다.

재현

나눗셈은 여러 그룹들 속에 숫자를 집어넣는 수학의 주제입니다.
때때로 예외의 수도 있게 됩니다. 그것을 나머지라고 합니다.
만일 나머지가 있게 되면 이렇게 쓰면 됩니다. 나머지 2



3 나머지 2

희진

저는 나눗셈을 공평하게 나누는 것이라고 생각해요.
나누면서 묶음들이 같게 되어야 한다는 말이예요.
만일 묶음들이 나머지가 생기면서 같게 되지 않는다면,
남게 되는 그것을 나머지라고 합니다.

위의 예에서 각자 속한 그룹에서 나눗셈에 대하여 자기가 알고 있는 것을 말하고 다른 사람들의 말을 듣고 난 후에 쓴 학생들의 글을 보면 처음 말했을 때에 비해서 발전되어 있음을 발견할 수 있다. 재현이의 경우에, 이 학생이 나눗셈에 대해 가졌던 개념은 대략적이고 초보적이었으나, 후에 쓴 글을 보면 나눗셈에 대해 거의 완전하게 기술하고 있다. 이것은 희진이의 경우도 마찬가지이다. 이와 같이 학생들의 수학적 개념에서의 발달은 또래들과의 의사소통을 통해 자기의 생각을 다른 사람들과 비교할 수 있고 그 결과 반성이 일어났음을 보여주는 예라 할 수 있다. 이러한 반성에 의한 개념화의 진전은 교사에 의한 가르침만 있고,또래와의 의사소통이 없었다면 기대되기 어려운 것이라 할 수 있다.

셋째, 의사소통을 통해 수학적 아이디어를 친구, 교사 그리고 다른 사람들에게 일관적이고 명백하게 표현하는 것을 배울 수 있다. 수학적 아이디어는 그것이 공동 사회에서 인정되

면서 타당성을 얻는다. 전문적인 수학 공동사회에서는 하나의 수학적 결과에 대한 증명을 놓고 그것을 인정할 것인가의 여부에 대한 논의가 정기적으로 이루어진다. 비록 학생들이 놀라운 수학적 결과는 발견하기 힘들다 할지라도 이와 유사한 과정을 경험하는 것을 통해 많은 혜택을 받을 수 있다. 학생들도 교실이라고 하는 수학 공동 사회 내에서 그들의 이해될 수 있고 충분히 설득력이 있는 것이라면 그것은 점검될 기회를 필요로 한다.

여러 아이디어가 신중하게 고려되고 정련되고 세련되는 데 다른 사람과의 상호작용이 중요한 역할을 할 수 있다. 한 학생이 하나의 수학적 주장의 타당성을 의심하는 동료를 설득하면서 수업에서 나타나는 결과는, 사람들이 일반적으로 교과서에서 발견하는 정당화와는 전혀 다른 생생함과 힘을 가진다. 학생들은 짝끼리 또는 소집단으로 활동할 때, 그들 자신의 잠정적인 아이디어를 시도해보고 소수의 학급 동료들의 반응과 아이디어를 경청해 볼 기회가 많이 있다. 적절하게 구조화된 또래와의 상호작용은 학생들이 수학적 아이디어를 듣고 명백하게 표현하는 것을 배우도록 도와 줄 수 있다.

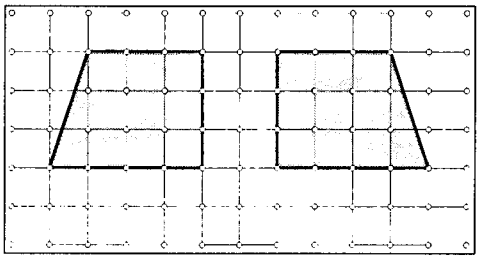
다음과 같은 문제를 제시하여 학생들에게 토론을 시켜 보는 것도 의미있는 일이라 할 수 있다(NCTM, 1998).

> 봉윤이는 어떤 피자의 ½을 먹었다. 석진이는 다른 피자의 ½을 먹었다. 봉윤이는 자기가 석진이보다 피자를 더 많이 먹었다고 말했지만, 석진이는 둘 다 같은 양을 먹었다고 말했다. 누구의 말이 옳은지 알아보자.

분수가 단지 1보다 작은 어떤 양을 나타낸다고 생각하는 아이들도 있을 수 있다. 그러나 분수란 주어진 전체와 그 가운데 부분을 부분-전체로 나타낸 것이라는 개념을 알고 있는 아이도 있을 것이다. 그런 아이들이 혼합되어 있는 상황에서, 누구의 주장이 옳은 지에 관해 토론하는 과정에서 아이들은 분수에 대한 자기의 개념과 이해한 내용을 가지고 말로 설명해서 또는 그림에 의한 증거의 제시로 자신의 생각이 옳다는 것을 증명하는 논리적인 방법을 배울 수 있다. 그 뿐 아니라 잘못된 개념을 가지고 있는 아이는 친구의 그런 설명을 들으면서 자신의 잘못된 개념을 수정하기도 하고 개념을 확장시켜 일반화시키기도 하게 된다.

학생들이 소집단으로 이런 활동을 하면, 그들 자신의 잠정적인 아이디어를 발표해보고 그에 대한 다른 학생들의 반응과 아이디어를 경청할 기회를 자주 갖게 된다. 더 나아가 교사들은 이들 토론을 관찰함으로써 학생들의 학습이나 이해의 정도를 생생하게 모니터 할 수 있다.

수학적 언어를 수학적 표현의 정확한 수단으로 사용할 수 있다는 것이 수학적 의사소통의 또 다른 장점이다. 학생들은 수학에 대해 자신이 이해한 것을 일상 언어나 친근한 언어를 사용하여 표현하기 시작한다. 이것을 기반으로 하여 형식적인 수학적 언어로 발전해 간다. 학생들에게 수학적 언어의 힘과 정확성을 평가할 수 있는 다음의 경험들을 제공하는 것이 중요하다.



< 그림 3 >

<그림 3>을 가지고, 두 학생이 한 조가 되어 다음과 같은 활동을 한다. 두 학생은 칸막이를 사이에 두고 서로 격리되어 있다. 한 학생이 이 그림에 그려진 도형을 그리는 방법을 설명하고, 나머지 학생에게 그 설명만 듣고 그에 맞는 도형을 모눈종이 위에 그리게 한다. 설명하는 사람은 도중에 만드는 사람이 잘하고 있는지 보아서는 안 되며 다 마칠 때까지 기다려야 한다. 이 활동은 의사소통 가운데 말하기-듣기를 결합한 활동이다.

40명이 정원인 6학년 한 반을 대상으로 위와 같은 활동을 해 보았다. 그 결과 처음에 주어진 것과 똑같이 만든 조는 4조 정도에 불과했다. 전혀 시도하지 못한 조는 1-2조 정도 되었고, 대부분 열심히 설명하고 만들었다. 그러나 완벽하게 모눈종이 위에 그려진 도형을 재생하지는 못하였는데, 그 학생들이 이 도형을 설명할 때 사용한 용어는 '오른쪽, 왼쪽, 옆으로, 위로, 아래로' 등과 같은 일상의 용어들이었다. 그리고 한 사다리꼴을 설명하고 난 후에 '선대칭'과 같은 용어를 사용하면 쉽게 설명될 수 있는 것을, 다시 옆의 도형을 다시 설명하는 경향을 보였다. 그 뿐 아니라 도형을 완벽하게 재생하기 위해 도형의 모든 요소를 고려하고 설명해야 함에도 불구하고 그 가운데 몇 가지 요소는 누락시키고 설명하는 경향을 보였다. '선대칭'이라는 용어를 사용하면서도 몇 칸 건너서 선대칭인지를 빠뜨리기도 하였다. 그리고 도형을 정확하게 설명하지 않고 대략적인 특징인 '비스듬한 사다리꼴 두 개가 나란히 놓여 있다'는 식으로 설명을 하기도 하였다.

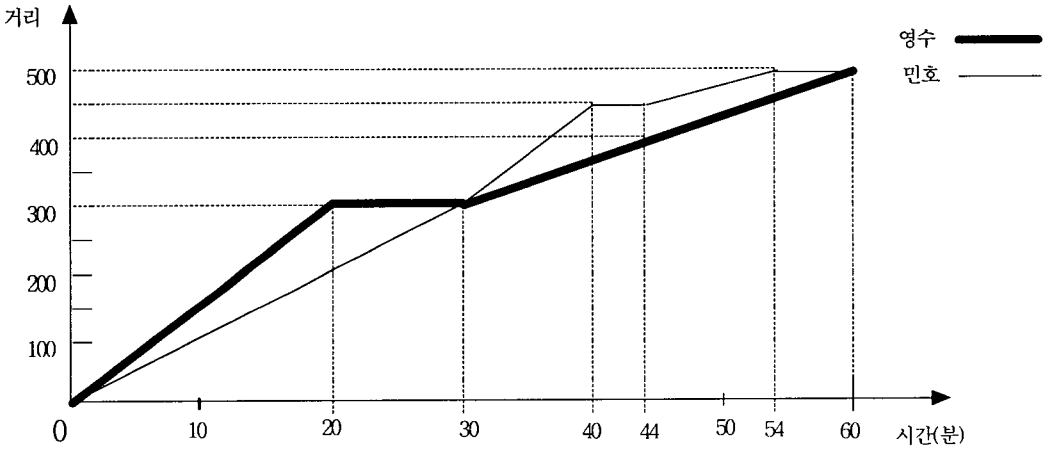
그에 비해 도형을 완전하게 만든 조 학생은 "우리가 그릴 것은 사다리꼴이다" 라든지

"사다리꼴의 꼭지점의 좌표는 (,) (,) (,) (,) 이다", "모눈종이의 한 칸을 1로 보면, 사다리꼴의 밑변의 길이는 4이고 높이는 3이다"와 같이 그 대상과 관련된 수학적 용어를 주로 사용했으며, 정확하게 사용하였다. 그리고 한 도형을 설명하고 난 후 '선대칭'과 같은 용어를 사용하여 최소한의 설명으로 도형을 만들게 하는 효율성도 보였다.

이 과제에 참여한 학생들은 '사다리꼴의 개념' 이나 '좌표' 등을 이미 학습했음에도 불구하고, 그들이 배운 바 수학적 지식을 활용하여 대상을 수학적으로 파악하는 데는 무척 서툴렀다. 학생들은 이와 같은 수학적 의사소통의 경험을 통해 자신들이 사용하는 언어나 용어의 부정확성에서 기인하는 혼동들이 정확한 정의가 필요하다는 것과 관습적인 수학적 용어의 의사소통력에 대한 의미를 발달시키게 해야 할 필요가 있다는 것을 인식하게 할 필요가 있다.

수학적 의사소통은 학생의 학습에 의미 있게 적용될 뿐 아니라, 교사에게는 학생들의 이해의 정도에 대한 좋은 정보를 제공해 줄 수도 있다. 다음 평가 과제에 대한 학생들의 평가 결과를 살펴보자.

아래의 그래프는 영수와 민호가 일요일 아침에 각자 따로 따로 까치 산에 올랐을 때의 상황을 나타내 주는 시간과 거리 사이의 그래프입니다. 산 정상까지의 거리는 500m이며, 두 친구는 동시에 같은 지점에서 출발하여 각자 자유롭게 걸어 산 정상에서 다시 만나기로 하였습니다.



1. 민호가 출발지점에서 산을 오른 30분간의 속력을 구하십시오.
2. 영수가 출발지점으로부터 300m를 오를 때까지 걸린 시간은 얼마입니까?
3. 20분에서 30분 사이의 영수의 속력을 구하십시오.

4. 산을 오르는 도중에 두 친구가 만난 적이 있습니까? 만난 적이 있다면 두 친구가 만난 때는 언제였습니까?
5. 영수와 민호가 산 정상까지 오르는데 걸린 시간을 각각 구해 보십시오.
6. 누가 몇 분 더 일찍 산 정상에 도착하였습니까? 왜 그렇게 생각하는지 그 이유를 적어 보십시오.
7. 위의 그래프를 보고 출발지에서 산의 정상까지 두 사람이 오르는 동안 어떤 상황이 일어났는지를 시간대 별로 자세히 설명해 보십시오.

① 0~30분 사이 :
② 30~44분 사이 :
③ 44분~60분 사이 :

이것은 수학적으로 표현된 그래프를 그것으로 나타내어진 상황으로 읽고 이해하는 수학적 의사소통 능력의 평가과제이다. 이 과제를 중학교 1학년 학생에게 실시한 결과를 분석해 보면 다음과 같다.

반응한 학생들의 80% 가량이 1번 문제에 대해서는 정답을 하였다. 그런데 2번 문제에 대해서는 정답을 한 학생들의 비율이 낮았다. 정답은 20분인데, 민호의 그래프는 20분부터 30분까지 300m에 걸쳐 있어서 20분으로 해야 할지 30분으로 해야 할지 혼동하는 학생들이 있었다.

3번 문제에 대한 학생들의 반응은, 1번에 정답을 한 비율의 반 정도로 현저히 낮았다. 대부분의 학생들이 답지에는 속력=(거리/시간)라고 썼지만, 그것을 이용해서 문제를 풀지는 못하였다. 특히 동일하게 속력을 묻는 1번과 3번 문제에 대한 정답의 비율이 이렇게 큰 차이가 나는 것은, 1번의 민호 그래프는 1차 함수이고 3번의 영수 그래프는 그와는 차이가 나기 때문인 것으로 보인다. 속력=(거리/시간)라는 공식의 의미는 거리는 단순히 위치가 아니라 '움직인 거리'이고 시간은 시각이 아니라 '걸린 시간'이라는 것을 알아야 파악될 수 있다. 1번 문제의 경우 그것을 잘 몰라도 피상적으로 답을 낼 수 있는 반면, 2번은 그 의미를 모르고 거리-시간 그래프를 읽을 줄 모르면 풀 수 없는 문제인 것이다. 이로 볼 때 학생들은 속력=(거리/시간)라는 공식을 기계적으로 암기하고 적용은 하지만, 그것은 공식이 어떻게 적용되어야 할 지에 대한 이해가 결여된 '도구적인 이해'의 상태인 것이다.

4, 5, 6번 문제에 대해서는 정답을 보인 학생들이 많았다. 7번은 그래프를 보고 출발지에서 산의 정상까지 두 사람이 오르는 동안 어떤 상황이 일어났는지를 시간대 별로 자세히 설명하는 문제이다. 이 문제에 대한 학생들의 반응은 대략 3수준으로 구분되었다. 거리-시

간의 그래프를 바르게 읽고 정확하게 답한 경우(높은 수준), 거리-시간의 그래프를 읽기는 했으나 대략적인 윤곽만 설명한 경우(중간 수준), 그래프를 거리-시간 사이의 관계로 읽지 않고 산의 높이로 이해하고 답한 경우(낮은 수준)가 그것이다. 전체 학생의 20% 가량이 높은 수준인 것으로 나타났다. 이 학생들은 속력=(거리/시간)라는 공식의 의미를, 거리는 단순히 위치가 아니라 '움직인 거리'이고 시간은 시각이 아니라 '걸린 시간'이라는 것을 알고 있었으며, 그에 따라 그래프를 정확하게 읽고 상황을 구체적으로 설명하였다. 예를 들면 다음과 같다.

① 0~30분 사이 : 영수는 출발점에서 시작하여 일정한 속력으로 20분 동안 300m까지 올라 갔고, 거기에서 10분간 있었다. 그리고 민호는 출발점에서 시작하여 민호는 작지만 일정한속력으로 30분 동안 300m까지 올라갔고 거기에서 영수와 만났다.
② 30~44분 사이 : 민호는 40분까지 일정한 속력으로 450m 까지 올라가서 4분간 그 곳에 있었고, 영수는 민호 보다는 작지만 일정한 속력으로 44분에 400m까지 올라갔다.
③ 44분~60분 사이 : 민호는 44분부터 54분까지 일정한 속력으로 산 정상인 500m까지 올라가서 6분간 그 곳에 있다가 영수를 만났다. 영수는 민호 보다는 작지만 일정한 속력으로 44분부터 올라가 60분이 되어서야 산 정상에 올라갔고 거기서 민호를 만났다.

거리-시간의 그래프를 읽기는 했으나 대략적인 윤곽만 설명한 학생(중간 수준)들은 대략 전체의 43% 정도였다. 그래프에서 거리와 시간 그리고 그 둘 사이의 관계를 모두 읽고 설명하기보다는 몇 가지만 부분적으로 설명하였다. 그 학생들의 답안의 예는 다음과 같다.

① 0~30분 사이 : 영수는 300m까지 올라가서 쉬었고, 민호는 30분 동안 쉬지 않고 계속 올라갔다.
② 30~44분 사이 : 민호는 영수보다 빠른 속력으로 산에 먼저 올라갔다. 영수는 민호보다는 느리게 산을 올라갔다.
③ 44분~60분 사이 : 민호는 영수보다 빠른 속력으로 산에 먼저 올라갔다. 영수는 민호 보다는 느리게 산을 올라갔다.

반면 낮은 수준의 학생들은 전체의 37% 가량의 학생들이, 이 그래프가 거리-시간 관계를 표현한 그래프라는 것을 무시하고 산의 지형으로 해석하여 영수와 민호가 서로 다른 산을 오르는 것으로 해석하는 오류를 보였다. 예를 들면 다음과 같다.

① 0~30분 사이 : 영수는 민호 보다 가파른 산을 올라갔고 다음에는 제 자리에서 왔다 갔다 했으며, 민호는 영수보다는 완만한 산을 올라갔다.
② 30~44분 사이 : 민호가 영수보다 가파른 산을 올라갔고 제 자리에서 뛰었다. 민호는 영수보다 완만한 산을 쭉 올라갔다.
③ 44분~60분 사이 : 그 다음에는 민호가 영수보다 가파른 산을 올라가서 제 자리에서 서 있었고, 민호는 영수보다 완만한 산을 쭉 올라갔다.

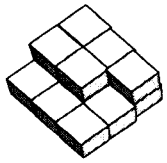
이 검사 결과에서 주목할 것은, 1-6번까지는 모두 맞은 학생들 가운데 50% 만이 7번에서 높은 수준을 보였다는 것이다. 이로 볼 때, 학생들은 그래프의 특징을 피상적으로는 읽을 수 있지만, 두 변수의 상호 관계가 집약적으로 표현된 그래프를 두 변수간의 상호 관계로 해석하는 것에는 숙달되지 못하였음을 알 수 있다. 이와 같은 학생들의 수학적 표현에 대한 이해의 정도는 이와 같은 수학적 의사소통(읽기)에 관한 평가가 없다면 알기 어려운 것이라 할 수 있다.

IV. 수학적 의사소통을 지도할 수 있는 교수-학습 자료

1. 공간도형의 구조 이해와 관련된 과제

① 관련 단원 - 초등학교 5학년 2학기 3. 직육면체 6. 직육면체의 겉넓이와 부피
② 내용 영역 - 도형, 측도
③ 주요 내용 - 여러 종류의 공간 도형을 상부에서 보았을 때의 구조도와 관련시켜 봄으로써 공간도형을 그 구조도와 관련시켜서 읽고 이해할 수 있는 지를 평가한다.

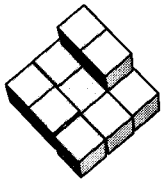
* 다음을 위에서 보았을 때 블록의 수를 나타내면 다음과 같습니다. (단, 블록은 가로 1 cm, 세로 1cm, 높이 1cm의 크기입니다.)

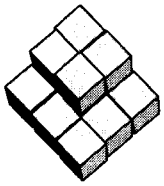


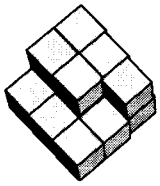
2	2	1
2	2	1
1	1	1

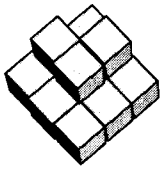
① 위에서 보았을 때 블록의 수가 다음과 같이 나타내질 때 어떤 모양이 될까요?

1	2	1
2	2	1
1	1	1

가) 

나) 

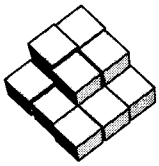
다) 

라) 

② 위의 블록의 부피를 구해 보고, 왜 그렇게 나왔는지 그 이유도 써 보세요.

부 피 _____ 그 이유:

③ 다음을 위에서 보았을 때의 블록의 수는 어떻게 나타낼 수 있을까요?



④ 위에서 보았을 때 블록의 수가 다음과 같이 나타내지고 부피가 12㎤ 일 때 가와 나에는 몇 개의 블록이 쌓인 것 일까요? 왜 그런지 이유를 설명하세요

1	가	1
2	2	1
1	나	1

2. 말하기와 듣기가 결합된 활동

① 관련 단원 - 5학년 2학기 8. 좌표와 그래프

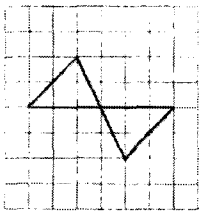
② 내용 영역 - 도형, 측도

③ 주요 내용 - 한 학생이 모눈종이 위에 그려진 도형을 가지고 그것을 보지 못한 학생에게 설명하여 다시 모눈종이 위에 그리게 하는 과제이다. 이 과제는 지시하는 학생에게는 수학적 지식, 개념을 가지고 말하기를, 그 지시를 받아 다시 도형을 그리는 학생에게는 듣기와 같은 수학적 의사소통 능력을 평가하는 것이다. 수학적 의사소통 능력이 평가가 되기

위해 이 과제는 2명이 분리된 채 진행하는 것이 효과적이다. 그리고 말하는 학생의 모든 지시가 평가되어야 하기 때문에 그것을 평가지 위에 쓰게 해야한다. 듣는 학생의 모든 활동도 기록으로 남겨져야 할 필요가 있다. 그리고 가장 최상의 방법은 교사의 참관 하에 과제가 수행되는 것이다.

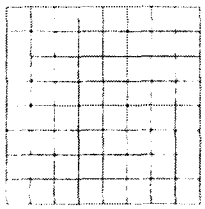
(1) 모눈종이 위에 그려진 도형을 가지고 친구에게 설명하는 학생용 과제

① 설명을 듣고 이 도형을 모눈종이 위에 그릴 수 있도록 하려면, 그리는 방법을 어떻게 설명해야 할지 아래에 써 보세요. 그리고 그 설명을 친구에게 해서 그리게 해 보세요.



설명 :

② 이제 친구가 그린 도형을 살펴봅시다. 친구가 학생의 설명을 듣고 원래의 도형과 똑같이 그렸나요? 만일 그렇지 않다면, 자신이 쓴 설명대로 직접 빈 모눈종이 위에 그려보고, 그 설명이 도형을 그리기에 충분했는지 살펴보세요. 어떤 점이 부족 했나요? 그것을 다시 써 보세요. 그리고 그 설명을 친구에게 해서 다시 그리게 해 보세요.



(2) 친구의 설명을 듣고 모눈종이 위에 도형을 그리는 학생용 과제

① 친구의 설명을 듣고 그것대로 빈 모눈종이 위에 그려보세요. 다 그린 다음 그 친구에게 그것을 보여 주세요.

② 만일 틀렸다고 하면, 친구의 설명 가운데 빠뜨리고 그리지 않은 것은 없는지 살펴봅시다. 있다면 그것을 보충하여 그려보세요. 그런 것이 없다면 잠깐 기다렸다가 다시 해주는 설명을 듣고 다시 그려보세요.

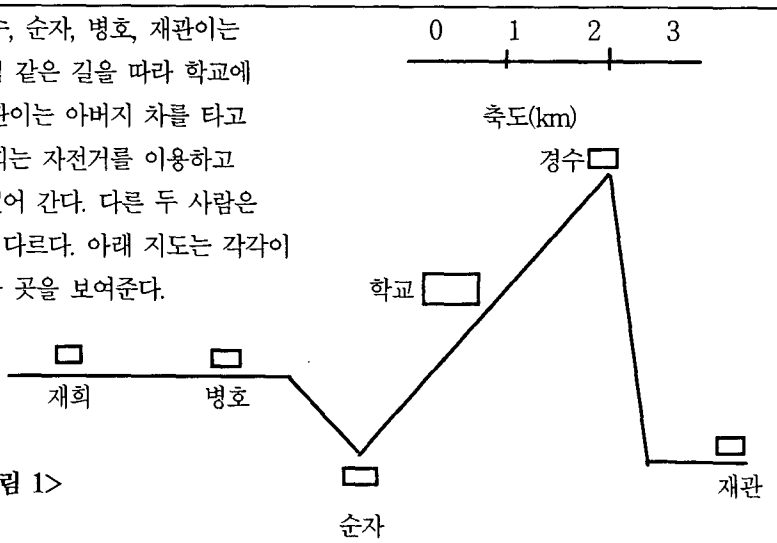
3. 그래프를 상황으로, 상황을 그래프로 나타내기[1)]

① 관련 단원 - 중학교 함수의 그래프

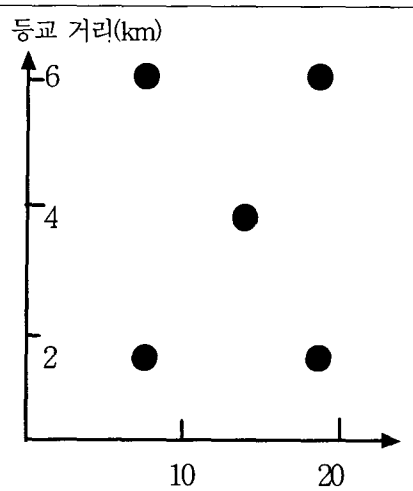
② 내용 영역 - 함수 영역

③ 주요 내용 - 학생들은 그래프를 보고 상황으로 해석할 수 있으며, 상황을 그래프로 나타내는 것을 학습한다.

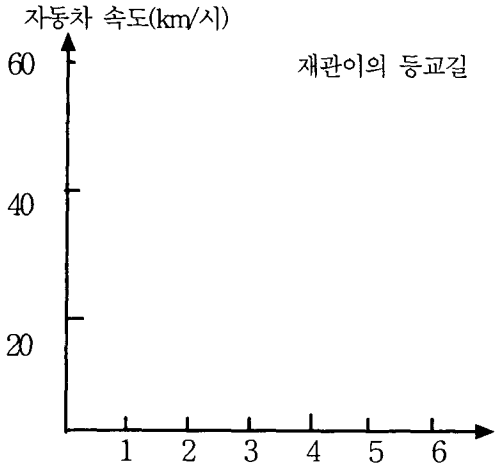
재희, 경수, 순자, 병호, 재관이는 매일 아침 같은 길을 따라 학교에 간다. 재관이는 아버지 차를 타고 가고, 재희는 자전거를 이용하고 순자는 걸어 간다. 다른 두 사람은 매일매일 다르다. 아래 지도는 각각이 살고 있는 곳을 보여준다.



<그림 1>



<그림 2> 학교까지 가는데 걸린 시간(분)



<그림 3> 재관이의 집으로부터의 거리(km)

1) 이 자료는 NCTM(1989)의 것을 참조하였음

1. <그림 2>는 각 학생의 지난 월요일 등교길을 묘사하고 있다. 그래프를 보고 병호와 재관이는 어떻게 등교했는지 알아보아라.

2. 재관이의 아버지는 직선 도로에서는 시속 60km로 운전하나 코너에서는 감속한다. 길에 따른 속도의 변화를 <그림 3>에 그래프로 나타내라.

V. 글을 마치며

NCTM의 <Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics>에서 제시한 학생들을 위한 새로운 목표의 골자는 수학적 능력의 개발이다. 수학적 능력은 조사하고 추측하고 논리적으로 추론하는 능력, 실생활 문제를 해결하는 능력, 수학에 대해 그리고 수학을 통해 의사소통 하는 능력, 수학 내의 여러 아이디어 및 수학과 다른 지적 활동간의 아이디어를 연결짓는 능력 등을 포함한다. 또한 수학적 능력은 문제해결과 의사결정에서 자신감의 발달, 양적 정보와 공간적 정보를 찾고 평가하며 이용하는 성향의 발달과 같은 정의적 영역까지도 포함한다(NCTM, 1991).

이와 같은 학교 수학에서의 변화는 변화된 사회의 요구를 반영하는 것이지만 인지 심리학과 수학교육학의 여러 연구가 제시한 방향의 적극적인 반영이기도 하다. 그것은, 학생들은 새로운 정보와 경험에 능동적으로 동화하고 자신만의 의미를 구성할 때 진정한 의미에서의 학습이 일어난다는 것이다. 이는 사실과 절차를 수집하는 것으로서의 수학 학습에서 수학적 상황을 의미 있게 만드는 지적인 도구의 통합으로서의 수학 학습으로의 주요한 변화이다. 학습에 대한 이러한 관점은 <Everybody Counts>에 잘 드러나 있다(NCTM, 1991에서 재인용).

> 유능한 교사는 학생들이 수학을 학습하도록 자극해 줄 수 있는 사람이다. 교육적 연구에서는 학생들이 수학에 대해 스스로 이해를 구성할 때에만 수학을 잘 학습한다는 강력한 증거를 제공한다. 교사들은 학생들이 무엇을 학습해야하는 가를 이해하기 위해 수학교육과정에 들어있는 여러 동사 - '표현하다' '탐구하다' '변환하다' '풀다' '적용하다' '증명하다' '의사소통하다' - 를 스스로 규정해야 한다. 이는 학생들이 집단별로 학습하고, 토론에 참여하며, 발표하고, 또 다른 식으로 자신의 학습에 책임을 질 때 가장 쉽게 일어난다.

이러한 관점은 학생들이 단순히 자신에게 제시된 것의 일부를 학습하는 것이 아니라 주어진 정보에 대해 자기 스스로의 해석을 부여하고, 새로운 정보로 기존의 신념을 수정, 확

장, 일반화하는 등 적극적으로 지식을 구성하고, 활용하는 주체임을 강조하고 있다.

새로운 수학교육과정의 실천을 위한 아이디어를 제공하고 있는 <Professional Standards for Teaching Mathematics>에서는 학생들이 유능해지도록 수학을 지도하는 방법은 수업 환경에서 다섯 가지의 주된 변화가 있어야 함을 강조하였다. 그것은, 단순히 개인들의 집합체가 아닌 수학적 공동체로서의 학급을 지향하고, 교사를 정답에 대한 유일한 권위로 여기는 것을 탈피해서 입증으로서의 논리와 수학적 증거를 지향하며, 절차를 단순히 암기하는 것을 탈피하고 수학적 추론을 지향하며, 기계적인 해답 찾기를 강조하는 것을 탈피하고 추측. 발명. 문제해결을 지향하며, 수학을 개념과 절차의 고립된 체계로 보는 것을 탈피하고 수학과 그 아이디어. 적용 등을 관련짓는 것을 지향하는 것이다(NCTM, 1991). 이와 같은 변화에서 주목할 것은 학생들은 단순히 교사의 일방적인 지도를 통해서만 학습하지 않으며, 교사 그리고 학급 전체가 수학을 하는 공동체로서 함께 문제해결. 토론. 추론. 입증을 하는 가운데 의미 있게 수학을 학습하게 된다는 것이다.

본 연구는 이러한 수학교육에서의 변화 가운데 수학적 의사소통을 강조한 수학 교수-학습에 관해 살펴보았다. 수학적으로 말하고, 듣고, 읽고, 쓰는 수학적 의사소통이 수업에서 활용될 때 학생들은 다른 사람들과 의사소통하기 위해 학생 스스로의 수학적 사고를 체계화하고 명백하게 할 수 있는 기회가 마련된다. 그리고 다른 사람들의 사고방식과 전략들을 고려함으로써 자신들의 수학적 지식이 명확해지고 확장된다. 의사소통을 통해 수학적 아이디어를 친구, 교사 그리고 다른 사람들에게 일관적이고 명백하게 표현하는 것을 배울 수 있다. 수학적 언어를 수학적 표현의 정확한 수단으로 사용할 수 있다는 것이 수학적 의사소통의 또 다른 장점이다. 수학적 의사소통은 학생의 학습에 의미 있게 적용될 뿐 아니라, 교사에게는 학생들의 이해의 정도에 대한 좋은 정보를 제공해 줄 수도 있다.

수학적 의사소통이 의미 있게 수학의 교수-학습에 적용되기 위해서는 무엇보다도 교사의 역할이 중요하다고 할 수 있다. 교사는 다음과 같은 사항에 유의하여 학급을 수학하는 공동체가 되도록 의사소통을 이끌어야 할 것이다((NCTM, 1991).

교사의 역할 중 하나는 학생들의 수학적 추론을 유발시키는 것이다. 학급에서의 의미 있는 수학적 담화(discourse)는 질 높은 과제의 제시로부터 시작하기 때문에, 교사는 각 학생들의 생각을 이끌 수 있고 주의를 끌 수 있고 이를 촉구할 수 있는 과제를 제시하여 의사소통이 원활해 질 수 있도록 도와야 한다.

교사 역할의 또 다른 특징은 전통적인 교실의 대화와는 다르게 활동적이라는 것이다. 교사는 학생들 사이의 대화를 경청하며 학생들에게 그들의 아이디어를 구두로, 또한 글로 써서 명확하게 하고 정당화할 것을 요구해야 한다. 대화 가운데 나온 학생들의 아이디어 중

좀 더 깊이 논의할 것을 결정하여 심도 있는 수학적 추론 및 논의의 기회로 삼는 것이 필요하다. 그리고 학생들의 아이디어를 언제 그리고 어떻게 수학적 기호와 연결 시켜야 하는지를 결정해야 한다.

대화를 이끌어 나가는 데 있어서 교사의 역할은 학생들의 참여도를 관찰하고 모든 학생들이 대화에 참여하도록 도와주는 것이다. 학급에서의 대화가 본질적으로 수학을 이해하는 데 초점을 맞춘 것이고 수학적으로 추론하는 능력을 학습하는 것이라면 교사는 정답이나 정확한 아이디어를 알고 있을 것 같은 학생들만 시키는 것을 자제해야 한다. 이렇게 함으로써 좀 더 폭넓은 범위에서 수학적 탐구가 이루어 질 수 있다.

참 고 문 헌

한순미(1999). 비고츠키와 교육 : 문화-역사적 접근, 교육과학사.

Balanced Assessment Project (1999). *Balanced assessment for the mathematics curriculum. (Assessment Package 1: Elementary Grades).* Dale Seymour Publication.

_____(1999). *Balanced assessment for the mathematics curriculum (Assessment Package 2: Elementary Grades).* Dale Seymour Publication.

_____(1999). *Balanced assessment for the mathematics curriculum (Assessment Package 1: Middle Grades).* Dale Seymour Publication.

Christiansen B., Hawson A.G. (1986). *Perspectives on mathematics Education.* D. Reidel Publishing Company.

Hynes C. Michael (1995). *IDEAS : NCTM standards-based instruction, Grade K-4.* NCTM.

_____(1995). IDEAS : *NCTM standards-based instruction, Grade 5-8.* NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics(1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. 구광조 외 공역(1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 서울: 경문사.

_____(1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: Author

_____(1995). *Assessment Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author

_____(1996). *Communication on Mathematics, K-12 and Beyond. (1996 Year Book).* Reston, VA: Author

_____(1998). *Principles and standards for school mathematics: Discussion draft.* Reston, VA: Author

Vygotsky L.S. (1934). *Thought and language.* 신현정 (역)(1985). 사고와 언어. 성원사.

Vygotsky L.S. (1978). *Mind in society : The development of higher psychological processes.* 조희숙 외 공역(1994). 사회 속의 정신: 고등심리 과정의 발달. 성원사.

Wood, T., Paul C., Yackel, E. & Dillon, D (Eds.)(1990). *Rethinking elementary school mathematics: insights and issues.* 대한 수학교육학회 1998년 춘계 집중 세미나집.

Mathematical Communication and Mathematics Learning-Teaching

Yu, Hyun Joo (Junju National University of Education)

The purpose of this study is to review theoretically the meaning and importance of mathematical communication and to search effective teaching-learning materials to develop it. This study has the content on relation of learning & communication, the qualitative examination of student's response in some mathematical communication tasks and materials of teaching mathematical communication.