大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 10 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. X, No.1, 73-84, July 2000

어떻게 '구조'를 가르칠 것인가 - 군 개념을 중심으로

홍 진 곤*

I. 서론

수학 교육과정을 구성하고 운영하고자 할 때 가장 먼저 부딪히게 되는 중요한 질문은 '무엇을 가르칠 것인가'라는 질문일 것이다. 그리고 이에 대한 해답의 하나로 Bruner가 제시하였던 '수학의 구조를 가르쳐야 한다'는 주장은, '구조'에 대한 분명한 정의가 그에게서 제시되고 있지 않음에도[1] 불구하고, '사실의 더미'나 '중간언어(middle language)'만을 가르치고 있는 교육에 대한 반성으로 이해된다는 점에서 많은 호응을 얻어 왔다. 그런데 이와 같은 '구조'라는 아이디어는 근본적으로, 어떠한 대상의 겉으로 드러난 외양, 혹은 '현상'과 대비되어서 가능할 수 있는 개념(이홍우, 1988, p.356)이기 때문에, '구조'를 가르치려는 시도는 자칫 구체적인 '현상'을 놓치는 결과를 가져올 수 있다는 점이 문제가 될 수 있다. 다음의 현행 고등학교 공통수학 교과서(조태근 외, 1996)를 보자.

> 실수의 집합 R은 유리수의 집합 Q와 마찬가지로 덧셈, 곱셈, 뺄셈과 0이 아닌 수로 나누는 나눗셈에 대하여 닫혀있다. 또, 실수의 덧셈과 곱셈에 대하여 다음 기본 성질이 성립한다.
>
> 1. 교환법칙
> $a+b=b+a$, $ab=ba$
> 2. 결합법칙
> $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$
> 3. 분배법칙
> $a(b+c)=ab+ac$
> 4. 항등원
> $a+0=0+a=a$, $a\cdot 1=1\cdot a=a$
> 5. 역원
> $a+(-a)=(-a)+a=0$, $a\neq 0$이면
> $a\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)a=1$
>
> 위의 성질 4에서 0을 덧셈에 대한 항등원이라고 하고, 1을 곱셈에 대한 항등원이라고 한다. 따라서 성질 4는 실수의 집합 R에는 덧셈과 곱셈에 대한 항등원이 각각 있음을 뜻한다... (p.38)

이러한 교육과정의 의도는 분명하다. '대수적 구조(algebraic structure)'를 학생들이 어느 정도는 느낄 수 있게 가르치자는 것이고, 이는 군, 환, 체 등의 개념을 알고 있는 수학 교사라면 누구나 그 의도를 이해할 만한 것이다. 그러나 학생의 입장에서는 어떨까? 실수의 집합 외에도 다항식의 집합, 함수의 집합, 행렬의 집합 등에서 유사한 '현상'을 발견하지도 못한 상태에서 이것이 제시된다면, 극도로 빈약한

---

* 경기여고

1) Bruner(1960)는 '교육의 과정(The Process of Education)'에서, '구조'의 명확한 정의를 제시하고 있지는 않으며, 구조를 '기본적이고 일반적인 개념, 아이디어'와 동의어로 쓸 수 있다는 대략적인 설명, 수학의 교환, 결합, 분배법칙과 같은 구조의 예시, '일반적 전이'를 가능하게 하고 고등지식과 초보지식 사이의 간극을 좁힐 수 있다는 구조의 학습이 갖는 이점 등을 제시함으로써 '구조'의 의미를 설명하고 있다.

맥락을 갖는 '뼈대 뿐인 구조'가 될 위험이 존재할 수 있다. 다시 말해, 보통의 중학생이면 충분히 익숙해 있을 실수의 사칙연산에 대한 '당연한' 성질을 새삼스럽게 정리하는 정도로 이것이 이해되거나, 또 새롭게 정의된 항등원, 역원과 같은 생소한 용어는 막연히 '외어야' 하는 것으로 받아들여진다면, 이는 구조를 가르치려는 현재의 시도에 대한 근본적인 반성을 요구하는 문제로 제기되어야만 한다.

여기에서 본 연구는 두 가지의 문제에 초점을 맞추고자 한다. 그 첫 번째 문제는 우리가 가르치려는 '구조'의 의미에 대한 반성이다. 앞의 예와 같은 '공리적 체계의 기술' 자체를 제시하여 학생이 그것을 '암기'했다고 해서 대수적 구조를 가르쳤다고 할 수 없음은 분명하지만, '이것이 구조다' 하고 제시하기에는 그나마 공리적 체계를 기술하는 것 이상의 방법도 없어 보인다. 이같은 문제에 대하여 임재훈(1998, p.377)은 '표면적으로' 기술되는 공리 체계의 '이면에 있는' 구조를 가르치기 위해서 "교사가 탐구하고 교재 연구를 할" 필요성을 강조하기도 했지만, 교사가 갖고 있는 맥락이나 지식이란 것은 학습의 필요조건일 수 있다 하더라도 그것만으로 학습의 충분조건이 될 수 없음은 분명하다. 예컨대 교사가 군, 환, 체 등과 같은 대수적 구조에 관하여 폭넓은 맥락을 갖고 있다 하더라도, 현재 교육과정의 체계와 순서는 앞의 예가 주어지는 것과 같은 상황에서 "나중에 배울 내용이 이것을 보다 보편적이고 의미있는 구조로 만들어 줄 것이다"는 이상의 어떤 말을 학생들에게 해 줄 수 있을지 의심스러운 것이다. 이러한 문제의식은, 수학적 지식의 구조에 대한 그간의 논의가 '구조의 발생'에 관한 문제를 어느 정도 간과하여 왔다는 것을 지적함으로써 출발할 수 있다고 생각되는 바, 본 연구에서는 구조주의에 대한 고찰을 바탕으로 '구조를 가르치는 것'에 대한 의미를 다시 한 번 살펴보고자 한다. 이어서 두 번째로는, '구조'의 가장 대표적인 형태라 할 수 있는 군(group) 개념을 '구성한다'는 것의 의미를 살펴보고, 이것이 중등 수학교육에서 시도하는 대수적 구조의 학습에 어떤 시사를 주는지 고찰하고자 한다.

II. 구조란 무엇인가

'구조(structure)'의 어원은 구축한다, 쌓는다, 배열한다 등의 뜻을 가진 struere 또는 structus에 둔다. 이렇듯 구체적인 대상이 직접 구축되는 양식이나 결과를 의미하던 것이, 나아가 구성요소가 상호 관계되며 이루어진 복잡한 전체를 의미하게까지 된 용어가 '구조'이다. 개개의 요소가 아닌 이러한 구조 전체를 탐구의 대상으로 하는 방법론을 구조주의(structuralism)라 부른다.[2] 이러한 구조주의는 수학, 생물학, 물리학, 언어학, 인류학, 사회학, 철학, 심리학 등의 방대한 영역에서 영향력을 미치고 있기 때문에, 그 구체적인 모습은 적용되는 영역에 따라 다양한 형태를 띠고 있으며 그들 사이에는 공통점과 함께 현격한 차이점도 존재한다고 말할 수 있다. 하지만 본 연구의 직접적인 관심사는 '수학'의 구조를 '가르치고자' 하는 수학교육의 상황에 제한되는 것이므로, 여기에서 다루고자 하는 '구조'에 대한 논의는 주로 '지식(수학)의 구조'와 '인지 구조'에 관한 논의가 될 것이다.

---

2) Piaget(1968, p.136)도 구조주의를 특별한 원칙이나 철학이 아닌 하나의 방법론으로 보고 있듯이, 구조주의는 Saussure, Lévi-Strauss, Foucault 등의 개개 이론을 일컫는 용어가 아니라 그들의 공통적인 방법론만을 지칭하는 것으로 이해할 수 있다.

1) Bourbaki의 모구조

구조주의의 발전에 수학은 핵심적인 역할을 담당하였다. 현대 사회-문화인류학의 원조인 Lévi-Strauss의 구조적 모형은 대수학의 직접적인 적용이었으며, 역사적으로 볼 때 최초로 연구된 '구조'는 Galois의 '군(group)'이었다(Piaget, 1968, p.17). 게다가 Klein의 Erlangen Program이 독립적으로 존재하던 전통적인 대수학과 기하학을 변환군이라는 하나의 구조 안에 성공적으로 통합시키게 되자, Bourbaki 학파는 군 구조를 포함할 수 있는 기본적 구조의 일반화 작업을 통하여 기하학, 정수론, 추상대수, 해석학, 확률론 등으로 분리되어 있던 수학의 구분화(compartmentalization)를 극복하려 시도하였고, 그 결과 그들은 다른 구조적 원천으로는 더 이상 환원될 수 없는 세 가지의[3] '모구조(matrix structures)'를 발견하였다. 그 첫 번째는 군, 환, 체 등을 포함하는 대수적 구조이며, 두 번째는 격자(lattice)등과 같은 순서 구조이고, 세 번째는 근방(neighborhood)이나 연속성과 같은 개념을 포함하는 위상적 구조이다.

또한 이렇게 특성화된 세 가지의 모구조로부터 새로운 구조를 구성해 나가는 것은 조합(combination)과 분화(differentiation)라는 방법을 통해서 가능하게 된다. 예를 들어 어떤 집합이 동시에 두 가지의 모구조를 가질 수 있기 때문에(조합) 대수적 구조와 위상적 구조를 함께 다루는 대수적 위상수학이 가능하게 되는 것이며, 또한 각각의 모구조는 부가적인 조건들을 도입함으로써(분화) 구조를 강력하게 만들 수 있는데, '군>환>체'와 같이 구조가 정교해지는 것이 그 한 예이다. 분화의 반대 과정인 비분화(de-differentiation) 또한, 하나의 한정조건을 제외시킴으로써 구조를 '약하게' 만드는 과정으로 이해할 수 있다. 예를 들면 군 구조에서 항등원과 역원의 존재조건을 삭제함으로써 반군(semigroup)의 구조를 만드는 것이 그러한 경우이다.

그런데 여기에서 주목해야 할 것은, 이러한 Bourbaki의 세 가지 모구조가, Piaget가 분석한 아동의 '논리-수학적 사고의 구조'와 부합한다는 사실이다(Beth & Piaget, 1961, pp.163~190). 사고의 본질을 조작(operation)으로 파악한 Piaget는 조작들이 서로 결합된 통합적 구조를 군성체(grouping)[4]라는 구조로 설명한 바 있는데, Piaget에 따르면 '구체적 조작'이 갖는 구조는 집합(class)이나 관계(relation)에 관한 9가지의 군성체로 설명된다(이홍우, 1973, p.142). 분류나 서열화(seriation) 등의 조작이 그러한 군성체를 이루는 예라고 할 수 있다.

조작을 일반적인 행동과 구별짓는 본질적 특성을 '가역성'이라 할 수 있기 때문에[5], 조작의 유형을 나누는 범주는 그 조작이 어떠한 가역성의 형태를 갖느냐에 따라서 구분할 수 있게 된다. 가역성이 일반적으로 '구조'의 본질과 어떻게 관련되는가 하는 문제도 다음 절에서 언급하겠지만, 간단하게 말하면 가역성은 목하 문제되는 조작의 출발점으로 되돌아가는 항구적 가능성을 뜻한다고(이홍우, 1973, p.141) 할 수 있다. 이러한 가역성의 다른 형태는 다음과 같은 예시를 통해 흔히 설명된다. 예를 들어

3) 기본 구조를 발견하기 위한 Bourbaki의 초기 작업은 일종의 준귀납적(quasi-inductive)인 절차를 통한 것이었기 때문에(Piaget, 1968, p.24), 여기서 '세 가지'라는 수는 이 세 가지 뿐일 수밖에 없다는 절대적인 의미는 아니다.

4) 불어로는 'groupement'이다.

5) Piaget에 의한 '조작'의 정의는 '내면화된 가역적 행동(김응태 외, 1984, p.153)'이지만, 여기서 내면화한다는 것은 가역성을 획득하기 위한 선결조건 정도로 이해될 수 있기 때문에(이홍우, 1973, p.141) 조작의 본질을 '가역성'으로 두는 것은 큰 무리가 없다.

평형을 이루고 있는 천칭의 어느 한 쪽에 무게를 가해 평형이 깨어졌다고 하자. 이 때 평형을 회복하는 방법은, 가한 무게를 제거하는 방법과 반대편에 같은 무게를 더하는 방법이 있다. 앞의 것을 역(inversion) 또는 부정(negation)이라 부르며 뒤의 것을 상반(reciprocity) 또는 보상(compensation)이라 부른다. 일반적으로, 분류 조작과 같은 집합과 관련된 조작의 체계에서는 가역성이 역의 형태로 나타나며, 서열화 조작과 같은 비대칭관계와 관련된 조작의 체계에서는 가역성이 상반의 형태로 나타난다.

집합의 포함관계와 관련하여, $A+A'=B$는 A에다 A'을 추가시키는 행동이고 $B+(-A')=A$는 B에서 A'을 제외시키는 행동을 의미하므로, A에다 A'을 가했다가 다시 A'을 제거하는 가역적 행동은 $(+A')+(-A')=0$으로 이해될 수 있다. 그런데 다시 Bourbaki의 세 가지 모구조로 돌아가 보면, 그 중 '대수적 구조'가 이와 같은 형태의 가역성을 가진다는 것을 알 수 있다. T가 어떤 연산이고 T^{-1}이 그 역연산이라면 $TT^{-1}=e$가 되는 관계는 모든 대수적 구조에 공통되는 것이다.

반면, 순서 구조는 가역성이 위와 같은 '역'이 아니라 '상반'의 형태를 갖는다는 사실로 그 특징이 설명될 수 있다. $A \leq B$라는 관계에 $B \leq A$라는 관계를 추가시켜서 $A=B$라는 관계를 얻는 것이 바로 그것이다. 이는 어느 한 편에 무게를 가해 '순서'라는 비대칭관계가 생겼을 때 다른 한 편에 똑같은 무게를 추가하여 평형을 회복하는 것과 같은 구조이다.

Piaget는 이와 같이, 조작이 갖는 가역성의 형태가 '역'의 형태를 갖느냐, '상반'의 형태를 갖느냐, 그렇지 않으면 '연속과 분리'의 형태를 갖느냐에 따라 조작의 범주를 세 가지로 나누었고, 이것이 Bourbaki의 세 가지 모구조와 정확하게 일치한다고 주장하였다. 그에 따르면 (Piaget, 1968, pp.26~27) 대수적 구조는 분류 구조와 수 구조에 대응되고, 순서 구조는 순차 배열과 순차 대응, 서열화에 대응되며, 위상적 구조는 유사성이나 차이로 구별되는 것이 아니라 근방, 연속, 경계 등의 개념에 의해서 구별되는 류(class)를 만들어내는 조작에 대응된다.

그런데 이와 같은 '수학의 구조'와 '수학적 사고의 구조'에 대한 이해는 어떠한 시사를 가져다 주는가. Bruner의 '구조를 가르치자'는 아이디어가 구체화된 수학교육 현대화 운동은 Bourbaki의 기본 구조를 곧바로 아동에게 제시하려고 시도하였고, 아동의 인지 구조에 대한 Piaget의 분석은 그러한 시도의 심리학적인 타당성을 제공해 준다고 믿는 근거가 되었다. 그러나 이러한 믿음이 간과하였던 것은, 아동이 '어떠한 형태의 구조로 사고하는' 것이 '자신이 사고하는 그 구조 자체를 의식화하는' 것을 곧바로 보장해 주지 못한다는 사실이었다. Piaget는 Bourbaki의 구조를 어린 아동에게 곧바로 가르칠 수 있다고 말하고 있는 것이 아니며, 더욱이 군 개념과 같은 대수적 구조를 학습자가 자신의 것으로 개념화하는 데에는 반영적 추상화(reflective abstraction)[6]에 의한 구성이 필수적이라는 것이 Piaget의 발생적 인식론의 핵심이라는 점은 놓칠 수 없는 것이다(졸고, 1999 참조). 그렇기 때문에, '구조를 가르치려는' 입장에서는 수학적 구조가 어떠한가 하는 문제 못지않게 그 구조의 발생적 본질에 관한 문제가 논의의 핵심이 되어야 할 것이다.

---

6) Piaget는 사물의 속성으로부터 이루어지는 추상화(Piaget는 이를 경험적 추상화라 부른다)와 구별하여, 인식 주체가 사물에 가하는 행동이나 조작으로부터 이루어지는 추상화를 반영적 추상화라고 불렀다.

2) 구조와 발생

이 절에서는 '구조'의 의미를 분석하여 '발생'의 문제가 여기에 본질적으로 어떻게 관련되는가 하는 것을 고찰하고자 한다. 먼저 Piaget의 '구조'에 대한 정의를 보자.

> 요컨대 구조의 개념은 세 가지의 핵심적인 개념으로 이루어진다. 즉 전체성(wholeness), 변형(transformation), 자율 규제(self-regulation)[7]의 개념이 그것이다. (Piaget, 1968, p.5)

> 하나의 구조가 자율 규제되는 변형의 체계적인 전체라고 한다면, 유기체는 어떤 점에서 전형적인 구조이다. (같은 책, p.44)

우선 '전체성'이 구조의 결정적인 특성이라고 하는 것은, 구조의 개념이 '구성 요소의 단순한 집합체(aggregate)'에 대조되는 의미라는 점에서 당연하다고 할 수 있다. 예를 들면, 교향곡은 음표들의 단순한 모임이 아니라 그 구성요소들의 총체적인 관계로서만 이해될 수 있다. 마찬가지로, 정수(integer)의 본질은 개개의 정수가 독립적으로 가질 수 있는 것이 아니라 전체적으로 통합된 어떤 구조적 속성(군, 환과 같은)과 관련되며, 이 때의 구조적 속성은 각 숫자의 속성과는 관계가 없는 것이다.

여기서 문제는 개개의 구성요소들과 무관한 구조의 속성이 어떻게 '생겨나는가' 하는 것이다. 이 문제는 인식론적으로 해석하면 메논의 패러독스[8]와도 유사한 것이 되는데, 아동이 어떠한 인식을 '구성'할 때 각각의 요소들을 동화(assimilate)하는 도구가 원래부터 존재했던 것인가, 그렇지 않으면 구성 요소들이 모여서 그냥 구조의 속성이 생겨나는 것인가 하는 문제가 그것이다. 앞서 언급된 '전체성'을 고려하는 구조주의라 하더라도, 그 구조의 발생에 대한 입장이 전자의 경우라면 이는 선험론적인 플라토니즘으로, 또 후자의 경우라면 경험론적이고 원자론적인 결합으로 각각 회귀한다고 할 수 있다. 두 가지의 관점이 모두 발생의 문제를 만족스럽게 해결하지 못한다고 본 Piaget는 조작적(operational) 구조주의라는 새로운 틀을 제시하는데, 이는 구조적 속성이 선험적으로 존재하는 것도, '구성 요소'로부터 직접적으로 나오는 것도 아니라 구성 요소들 사이의 '관계', 곧 '조작(operation)'[9]으로부터 출현한다고 하는 관점이다.

이러한 관점에 의해서 비로소 '변형'이 구조의 핵심적인 특성이 되는데, 사실 모든 구조는 변형의 체계로 볼 수 있는 것이다. 자연수의 대수적 구조를 예로 들면, 3에 2를 더해서 5가 된다(making)거나 3 다음에는 4가 따른다(following)거나 하는 것이 모두 변형의 예이며, 조작은 이러한 변형의 규칙이다. 구조주의가 정교해지는 것은 바로 이 '변형'의 아이디어에 접근하는 것과도 관련이 된다고 할 수 있는데, 언어학에서도 구조주의의 창시자인 Saussure의 이론에서는 변형의 아이디어를 찾아볼 수 없지

7) 'regulation'의 번역은 '조절한다'는 의미가 가장 유사한 뉘앙스를 가질 것 같으나, '조정(coordination)', '조절(accommodation)'이라는 용어와는 구별되어야 하기 때문에 본 고에서는 이를 '규제'라는 용어로 일관되게 사용하였다.

8) Plato의 대화편 'Meno'에서 제시되는 이 문제는 다음과 같은 것이다. 절대적으로 아무 것도 모르는 어떤 사람이 있다고 가정해 보자. 이 사람은 이전에 알지 못하던 사실을 어떻게 알게 될 것인가? 사전에 어느 정도든 지식을 가지고 있어야 새로운 사실의 설명이 가능한 것이 아닌가? 그렇다면 그 '사전 지식'은 또 어떻게 알게 되었는가?

9) 여기서 'operation'은 '인지 구조'의 관점에서는 '조작'으로 번역될 수 있지만 '수학적 구조'의 관점에서는 '연산'으로 번역될 수도 있다. 지금의 논의가 '구조' 일반에 대한 것이므로 그 중의적인 의미를 함께 고려해도 무방하며, 이것이 바로 '변형'으로 연결된다.

만 Chomsky의 '변형생성문법'에 이르면 '변형'이 핵심적인 아이디어가 되는 것이 그 한 예이다. Bruner의 경우를 보면, 학자의 지식과 아동의 지식이 같은 '구조'를 가지며 그 수준의 차이는 '표현 방식'의 차이일 뿐이라고 보는 관점은, 구조를 실재론적인 '고정된' 것으로 해석하는 시각이며, 구성되고 발달하는 '변형의 체계'로서 구조를 이해하지 못한 결과라 할 수 있다(졸고, 1999, pp.98~107).

Piaget 이론의 핵심 중의 하나는 이러한 변형의 체계, 조작의 체계가 '발달'한다는 것이다. 통상적으로 6세 이전의 아동은 분류나 순서짓기 등의 행동에서 가역성을 갖지 못하기 때문에, 역조작이라는 논리의 절반이 결여되어 있다는 의미에서 반논리적(semi-logical)인 지적 발달 단계에 있다고 말할 수 있지만(Piaget, 1968, p.65), '함수'와 '동일성(identity)'의 개념은 이 단계에서도 초보적이나마 존재한다. 가역성을 획득하는 구체적 조작기에 들어서면서 비로소 관계의 추이성, 분류의 양화, 서열화와 포함관계에 의한 수 개념의 구성 등이 이루어져 조작의 체계는 반군(semigroup)의 구조를 갖게 되고, 형식적 조작기에는 '역'과 '상반'이라는 두 가지 가역성이 조정(coordinate)되면서 Klein의 4원군인 INRC[10] 구조를 얻게 된다.

그렇다면 남는 문제는 이러한 조작의 구조가 '무엇 때문에' 발달할 수 있는가 하는 것인데, Piaget(1968, p.67)는 가역성이 생겨나는 것이 구조가 '평형화(equilibration)'의 요구[11]에 의해 끊임없이 규제되기(regulated) 때문이라고 설명한다. '자율 규제'의 개념은 이와 관련되는데, 즉 '구조'는 '변형'과 같이 병존하는 개념이라 하더라도 이 때의 '변형'은 인식의 범위를 한꺼번에 벗어날 수 있는 것이 아니라 항상 어느 정도의 '불변(invariant) 범위'를 유지하고 있어야 한다는 것이다. 그리고 그 불변 범위는 조작들의 역조작에 의해 '출발점으로의 회귀'가 항상 가능하다는 조건이, 조작의 일반적인 '조정'의 규칙으로 작용할 수 있을 때 설정된다. 이는, '구조'에 관한 논의에서 '가역성'이 중요한 위치를 차지하는 것을 또 한편으로 설명해 준다.

III. 대수적 구조(군 개념)의 학습

전체성, 변형, 자율 규제라는 '구조'의 본질적 특성이 확인되었다면, 이제 '구조'를 가르치고자 하는 교육학적 논의를 고려해 보자. 지금까지 살펴본 Piaget의 이론은 조작이 형성되지도 않은 아동의 어린 시기부터 형식적 조작이 가능해지는 시기까지 발달하는 조작의 구조에 대한 분석이었다. 이는 그 자체만으로도 구체적 조작기에 있는 초등학생들의 논리-수학적 사고를 분석적으로 판단하여 올바르게 발달시키도록 하는데 많은 시사점을 줄 수 있을 것이다. 그러나 본 연구의 직접적 관심은 서론에서 언급하였듯이 형식적인 대수적 구조를 '고등학

10) I는 identity, N은 negation, R은 reciprocity, C는 N과 R의 상관(correlation)을 의미하는 조작이며, 이들은 $I^2=N^2=R^2=C^2=I$, $NRC=I$, $NR=C$, $RC=N$, $CN=R$ 를 만족시킨다.

11) 구조의 발생에 관하여, Piaget가 플라토니즘에서 완전히 벗어나기를 기대했던 독자라면 '평형화'를 위해서 구조가 발달한다는 대답에 실망할 수도 있을 것이다. "평형을 이루려는 경향은 또 왜 존재하는 것인가?" 하고. 이는 메논의 패러독스에 대한 해답이 '무한회귀'로부터 그토록 벗어나기 힘든 것임을 보여주는 것인지도 모른다. 그러나 교육을 위한 인식론을 탐구하는 입장에서 보면, Piaget의 이론은 고전적인 플라토니즘이 줄 수 없는 풍부한 시사를 우리에게 제공하고 있다는 것 만큼은 분명하다. 과연 구조의 본성은 어디에서 출발하는 것인가? 현상계의 '바깥'인가? 적어도 Piaget는 그 출발점을 '유기체'에 두고, 이후의 '발달' 메커니즘을 밝혀내었다. 이것만으로도, '구조'란 고정되어서 '번역'되는 정도의 것이 아니라 '구성'해 가야만 하는 것임이 분명해지지 않았는가?

생에게' 가르치려는 상황이다. 이 경우 문제가 되는 것은, 그 형식화된 대수적 구조가 학습자의 인지 구조에 어떻게 동화되는가 하는 점이다. 예컨대 군 구조를 가르치려는 이유가 그것이 수학적 사고의 가장 기본적이고 본질적인 핵심이 되는 것이기 때문이라면, "실수의 집합이 그러한 성질을 갖는다"라는 단순한 사실을 학습하는 것은 애초 의도했던[12] 그러한 '구조의 학습'에 얼마나 접근하고 있는지 의심스러운 것이 될 수 있다. Piaget(1968, p.19)에 따르면 구조가 정교해지고 세련되는 메커니즘인 반영적 추상화는 논리-수학적 사고의 구조가 군 구조를 갖추게 되는 과정 뿐만 아니라 자신의 그 사고를 의식화, 주제화하여 반성한 결과로 수학적 군 개념을 얻는 과정에서도 핵심적인 역할을 담당한다. 그렇게 얻어져야 하는 대수적 구조라면, 학습자의 수학적 경험과 사고 양식으로부터 추상화, 일반화되어 '구성'되어야 한다는 점이 구조를 가르치려는 시도의 가장 중요한 원칙으로 대두되어야 할 것이다.

1) 군은 왜 전형적인 구조인가

군은 현대 대수학의 기초적인 개념인 동시에 그 유용성은 매우 포괄적이어서, 거의 모든 영역의 수학과 논리학, 물리학, 생물학 등에 도입된다. Piaget(1968, p.19)는 군이 일반적인 구조의 원형(prototype)이라고까지 말한다. 그리고 군 개념이 폭넓은 포괄성을 가지며 성공할 수 있었던 것은 '반영적 추상화'라는 특별한 논리-수학적 추상화의 양식에 의해서 그 개념이 획득되었기 때문이라고 설명한다. 어떤 속성을, 그 속성을 가지는 '사물들로부터' 추상[13]하는 경우에는 그 속성이 일반적인 것이 될수록(외연이 확장될수록) 그것이 갖는 내포는 빈약해져서 그 구조의 유용성은 적어지기 마련이지만, 사물에 대하여 작용하는 방식, 즉 '조작으로부터' 개념이 추상화되는 경우에는 그 개념이 일반화될수록 내포가 풍부해지기 때문에 그 구조의 유용성이 점점 포괄적으로 된다는 것이다.

한편, 군 개념은 반영적 추상화를 통하여, 즉 다양한 조작으로부터의 추상화를 통하여 도출된 개념이기 때문에, 이 개념이 갖는 구조를 분석하기 위해서는 조작들을 '조정'하는 기본적인 방법, 일반적 조정 규칙을 분석해야 한다. 앞에서도 살펴 보았지만, 변형의 체계가 구조의 형태를 갖추기 위해서는 일정한 불변 범위가 있어서 자율적으로 규제되어야 하기 때문에, 조작들이 조정되는 기본 규칙은 적어도 다음 두 가지가 필요하게 된다(Piaget, 1968, pp.19~20).

① (역조작을 거쳐서) 조작의 출발점으로 항상 돌아올 수 있을 것.

② 여러 조작의 최종 결과는 선택되는 대안적인 경로와는 독립적일 것(결합성).

이를 군 개념의 수학적 정의와 비교해 보면, 규칙 ①은 '역원의 존재성'과 관련되며, 규칙 ②는 '결합법칙'과 관련됨을 쉽게 알 수 있을 것이다. 결국 이러한 고찰은, 군 구조가 수학적 사고의 구조, 즉 조작의 구조가 갖는 본질적인 특성을 담고 있는 대표적인 구조라는 점을 보여주고 있다.

한편, 군 구조를 설명하는 대표적인 조작의

12) Bruner는 교과의 구조를 파악하는 것이 ① 교과를 쉽게 파악하고 ② 기억하기 쉽게 하며 ③ 학습의 전이를 가능하게 하고 ④ 고등지식과 초보지식 사이의 간극을 좁히는 이점이 있다고 하였다(박재문, 1981, pp.30~31).

13) 'abstract'라는 말은 'extract'와 같은 어원을 가지며, 그 말 뜻 그대로, 어떤 하나의 속성만을 '끌어내고' 나머지 속성들은 배제하는 사고 과정을 의미한다.

집합인 '도형의 이동(합동변환)'들의 집합을 생각해 보면, 하나의 이동은 다시 그것을 돌려놓는(return) 이동에 의해 소거될 수 있고, 이동들의 연속은 그 결합 순서에 따라 다른 결과를 가져오지 않으므로, 이것은 가환군의 구조를 가진다. 그리고 이러한 구조에 대한 분석은 역사적으로 "합동변환군⊂닮음변환군⊂아핀변환군⊂사영변환군⊂위상변환군"이라는 구조의 관계망에 대한 통찰로까지 이어지게 되었는데, 이는 구조주의의 과학적 유용성을 입증하는 하나의 대표적인 사례로서 의미를 갖는 것이기도 하다.

2) 군 개념의 구성

본질적으로 변형의 체계인 대수적 구조를 학생들에게 가르친다는 것은, 형식화된 구조의 최종적인 형태를 제시함으로써 이루어질 수 있는 것이 아니다. Piaget(1968, p.36)는 '구조'가 '형식'과 일치하는 것이 아니라는 점을 강조하고 있는 바, 그에 따르면 변형 체계로서의 '구조적' 사고는 계속적인 형성 과정으로서의 '구성적' 사고와 연속적인 것이라 할 수 있다. 이러한 관점에서 보면, Bruner의 경우와 같이 형식화된 지식의 구조를 고등학교, 중학교, 초등학교 순으로 계속 초등화하여 나가는 이른바 '하향식' 교육과정은 진정한 의미에서의 구조주의적인 관점이라고 보기 어렵다. '구조'를 수학적인 현상이나 수학 자체를 조직하는 수단으로 규정하는 Freudenthal(1991, p.20)에 따르면 수학적 구조를 발견하고 조직화, 체계화해 나가기 위해서는 수학의 형식과 내용이 변증적으로 교대되면서 수준의 상승이 이루어져야 하는데, 이를 위해서는 형식화된 수학의 구조적 결과만을 학습자의 수준에 맞게 번역하여 제시하는 것이 아니라 학습자 수준의 현실 세계로부터 출발하여 그것이 수학적으로 세련될 수 있는 구조로 조직해 가야 한다는 것이다.

부연하면, 학습자에게는 수학의 완성된 구조를 직접적으로 접하게 하는 것이 아니라, 학습자의 정신적 현실에 맞는 현상, 수학적 구조가 조직화의 수단이 될 수 있는 현상에 학습자가 대면하게 해서, 그 조직화의 수단을 학습자 스스로 찾아낼 수 있는 재발명 과정을 경험하게 해야 한다(정영옥, 1997, p.68). 그러한 조직화의 수단들을 현상 속에서 다루어 보는 것에서 출발하여, 수학적 대상에 대한 심상(mental object)이 구성되고, 반성 과정을 통한 수준 상승이 이루어질 것을 기대하는 것이다. 군을 비롯한 대수적 구조의 학습에서도, 형식화된 구조적 개념으로부터 시작하여 이를 구체화하는 자료들을 살펴보는 것이 아니라,[14] 학습자가 대수적 구조에 대한 심상을 구성하도록 수학화될 '현상'들을 제시하고 반성에 의해 그 구조가 개념으로 형성될 수 있도록 이끌어가는 형태가 되어야 한다.

가장 기본적인 대수적 구조라 할 수 있는 군 개념을 구체적인 예로 '번역'하는 것과, 현상으로부터 군 개념을 '조직'하는 것이 어떻게 다를 수 있는지 예를 들어서 살펴 보자. 군 구조가 가르쳐질 때는 보통 다음과 같은 예들이 제시된다.

[예 1] (정사각형이 아닌) 직사각형의 모든 대칭변환(symmetry)들의 집합은 군을 이룬다. 항등변환 외에, 마주보는 두 변의 중점들을 이

14) 현행 고등학교 교과서를 살펴 보면, 서론에서 예를 든 것과 같은 대수적 구조는 실수 체계의 도입부에서 '이러이러한 성질을 갖는다'는 식으로 제시되며, 이후 다항식, 복소수, 행렬 등의 단원에서 계속 그 연산 체계의 유사성과 차이점 등이 제시되는 형태로 나타나고 있다.

은 직선들이 축이 되는 선대칭이동 두 가지와, 사각형의 중심에 대한 점대칭이동(180° 회전이동이기도 하다)으로 이루어지는 이 군은 $Z_2 \oplus Z_2$ 와 동형인 Klein의 4원군이다

[예 2] 화학에서는 분자들을 점군(point group)으로 분류할 수 있다. 물분자 H_2O의 경우, 산소 원자의 중심을 원점에 두고 두 개의 수소 원자를 yz-평면 위에서 z-축에 대칭으로 두면, 항등변환, xy-평면에 대한 반사, yz-평면에 대한 반사, z-축에 대한 180° 회전은 물 분자의 모든 가능한 대칭변환이며, 이들은 Klein의 4원군을 이룬다. 같은 점군을 갖는 분자들은 같은 적외선 스펙트럼을 가지기 때문에, 잘 모르는 어떤 분자가 Klein의 4원군, 즉 $Z_2 \oplus Z_2$ 를 그 점군으로 갖는다면 그 분자에 관한 어떤 정보를 물 분자에 대응시켜서 얻을 수 있다.

[예 3] 실수를 성분으로 갖는 2×2 정칙행렬 전체의 집합 $GL_2(R)$ 은 행렬의 곱셈 연산에 관하여 군을 이룬다. 행렬의 곱셈에서는 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않으므로 $GL_2(R)$ 은 비가환군이다.

[예 4] 유리수체 Q 의 확대체 $Q(\sqrt{2})$ 의 자기동형사상 중 Q 의 원을 고정시키는 것은 항등사상 i 와 $\tau: a+b\sqrt{2} \rightarrow a-b\sqrt{2}$ 뿐이다. 이 때, 집합 $\{i, \tau\}$ 는 Z_2 와 동형인 군을 이루는데 이를 Q 위의 $Q(\sqrt{2})$ 의 Galois 군이라 한다.

이러한 예들에서 주어지는 집합이 군을 이루는 것은 명백한 계산에 의해 확인되는 절차를 거치게 되고, 그 과정 자체에는 아무런 잘못이 없다고 할 수 있다. 그러나 이러한 틀이 갖는 문제는, 새로운 군이 도입될 때마다 알고리즘의 반복이 계속된다는 점이다. 구성된 것이 정말 군이 되는지 증명하는 것은 끝없이 반복되는 단순 작업이 되며, 학습자로서는 군 구조의 발생적 본질에 대하여 통찰할 기회는 갖지 못한 채 주어지는 집합들이 '신기하게도' 같은 구조를 가진다는 것을 받아들여야만 하는 것이다. 실수의 집합, 다항식의 집합, 복소수의 집합, 행렬의 집합 등의 대수적 구조가 그냥 주어지고 이를 비교하는 정도에서 그치는 우리의 고등학교 상황도 이러한 점에서만큼은 본질적으로 크게 다르지 않은 것으로 보인다.

Freudenthal(1973, p.109)은 위와 같은 예들 모두에 공통되는 군의 의미를 "어떤 구조의 자기동형사상의 체계"로서 이해할 수 있다고 설명한다. 구조 S 를 관계 R 들의 체계 Φ 가 주어진 집합 M 이라 하면, Φ 의 모든 관계와 그 역을 보존하는 일대 일 대응 $f: M \rightarrow M$ 을[15] S 의 자기동형사상이라 하는데, 군은 본질적으로 이같은 자기동형사상들의 집합이라는 것이다. 이러한 관점에서 보면, [예 1]과 [예 2]는 도형의 구조를 보존하는 합동변환들의 집합이 군을 이루는 것을 보여 준다. [예 2]의 점군은 산소 원자를 산소 원자로, 수소 원자를 수소 원자로 보내는 모든 대칭이동과 회전이동의 집합을 의미한다. [예 3]의 GL_2 는 2차원 평면에서 원점을 지나는 직선을 원점을 지나는 직선으로 보내는 선형변환들의 집합이다. [예 4]에서 $\tau: a+b\sqrt{2} \rightarrow a-b\sqrt{2}$ 는 $Q(\sqrt{2})$ 에서 정의되어 있는 덧셈과 곱셈 구조를 보존하는 자기동형사상이다.

이와 같은 자기동형사상들로서 군을 도입하

15) 즉, Φ 의 모든 관계 R 에 대하여 $R(x, y, z, \cdots) \Leftrightarrow R(fx, fy, fz, \cdots)$ 를 만족하는 f.

는 것의 가장 큰 장점은, 정의되는 것이 군이라는 사실이 그 도입 방법 자체로부터 보증된다는 것이다. 구조 S의 자기동형사상 전체의 집합을 G라 하면, 항등사상은 분명히 G에 속하고, f가 G에 속하면 그것의 역이, 또 f와 g가 G에 속하면 $f \circ g$가 G에 속하는 것이 당연하기 때문에, "어떤 구조의 자기동형사상은 합성이라는 연산과 함께 군을 형성한다"는 것은 군 개념의 출발점이 될 수 있다. 그리고 이는 알고리즘적인 증명보다 훨씬 명쾌한 개념적인 접근이며, 이러한 접근은 현대 수학이 지향하는 하나의 특징이기도 하다.

자기동형사상들의 체계로서 군 개념에 접근해 갈 경우에는 정의되는 군의 원소들을 구체적으로 확인하는 것이 문제로 남지만, 그 절차도 그렇게 어렵지는 않다. 예를 들어 S가 2차원 평면의 정수 좌표 격자점의 구조라고 하자. S를 보존하는 군 G는 무엇으로 생성되겠는가? 벡터 a만큼의 평행이동(t_a라 하자), $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π만큼의 회전이동 (각각 $d_1, d_2, d_3 d_4$라 하자), x축 대칭이동(s라 하자) 등이 모두 G의 원소가 되지만 '모든' G의 원소를 생성하려면 이것만으로 충분한가?

$f \in G$에 대하여, $f(0,0)=a$라 하면 $f_1 = t_a^{-1} \circ f$는 $(0,0)$을 고정시킨다. 이 때 f_1은 $(1,0)$을 $(0,0)$ 근처의 한 점 $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ 중의 하나로 옮겨야 하는데, d_1, d_2, d_3, d_4도 $(1,0)$을 그와 같이 옮기므로 적당한 n에 대해 $f_2 = d_n^{-1} \circ f_1$은 $(0,0)$과 $(1,0)$을 고정시키게 되어 결과적으로 x축 전체를 고정시킨다. 따라서 f_2는 항등사상이거나 s이므로, f는 $t_a \circ d_n$이거나 $t_a \circ d_n \circ s$일 수 밖에 없다. 즉, t_a, d_n, s는 G의 모든 생성원이다.

이러한 과정은 일견 번거롭게 느껴질 수도 있을 것이다. 그러나 문제는 역시 현상으로부터 수학을 '조직'해 나갈 것인가 그렇지 않으면 형식화된 결과물을 초등화하여 '번역'할 것인가에 대한 선택이다. 알고리즘을 선택하는 것은 번거로움을 피할 수 있다는 장점 때문이라고 생각할 수도 있지만, 개념의 발생 단계인 학교 수학에서부터 통찰이 아닌 알고리즘에 의지할 수는 없는 일이다.

IV. 결론

Bruner가 '구조'라는 용어를 사용해서 교육과정이나 교육내용의 변화를 주장하였다고 해서, '구조'를 주된 탐구의 대상으로 삼는 모든 철학, 사회과학, 자연과학에 뭉뚱그려서 Bruner의 이론을 '구조주의' 교육과정이라거나 '구조중심' 교육과정이라 부르는 것은 여러 가지 오해의 소지가 있는 일이다. 중요한 것은 '구조'라는 용어 자체가 아니라 Bruner가 '구조'라는 용어를 사용하면서 그가 진정으로 의미하고자 했던 것이 무엇인가 하는 것이다. 예를 들어 "만약 수, 측정, 확률 등에 대한 이해가 과학을 공부하는데 필수적으로 중요하다 하면, 이런 주제는 아동의 사고방식에 알맞게, 되도록 지적으로 올바르게, 또 일찍부터 가르치기 시작하여야 할 것이다. 그리고 그런 주제는 고학년에 가서 몇 번이고 다시 전개되어야 한다(Bruner, 1960, p.136)"고 하는 그의 말은, 학문의 '기본개념'을 초등학교 때부터 교과서에 넣어 놓고 고학년까지 계속 되풀이되어 나오도록 하면 그것이 마치 '구조'를 가르치는 것이라고 생각하기 쉽게 만든다. 박재문(1981, p.81)은 Bruner의 '구조'와 '나선형 교육과정'에 대한 아이디어가 의미를 갖기 위해서는 교과 내용을 학자가 하

는 일, 또는 탐구 과정으로 보아야 한다고 해석했지만, 지식의 내용과 직접적으로 관련되어야만 하는 교과교육학의 입장에서 그러한 해석은 막연하기만 할 뿐이다. Bruner 자신도 나선형 교육과정의 아이디어를 구체적인 교과의 내용에 적용하려는 시도에서 EIS 이론이라는 방법론을 제시하였지만 결과적으로는 많은 이론적 한계점을 드러내고 말았다(졸고, 1999, pp.98～108).

본 연구는 Piaget의 '구조주의'에 대한 고찰을 바탕으로, Bourbaki가 말하는 수학의 모구조와 Piaget가 말하는 수학적 사고의 구조가 어떻게 관련을 맺는지 살펴 보았고, 지식의 구조가 가져야 하는 본질적인 특성을 검토하면서 '변형'과 '발달'이 핵심적인 문제가 됨을 지적하였다. 그리고 군 구조가 수학에서 뿐 아니라 일반적인 구조의 핵심적인 특성을 갖추고 있는 전형적인 구조임을 살펴 보았으며, 수학적 개념으로서의 군 구조(폭넓게는 대수적 구조)를 학습자가 구성하게 하는 문제를 논의하였다.

수학의 일반적인 아이디어, 원리를 설정하고 그것을 학습자의 수준에 맞추어서 초등화 또는 번역하고자 하는 입장은 수학의 구조를 완성되고 고정된 지식 체계로 보는 입장이라고 할 수 있으나, Piaget 등의 구조주의에서 말하는 구조는 발달하는 변형의 체계로 이해되어야 하는 것이었다. 특히 이러한 문제가 '교과 내용'과 관련이 된다면 학습자의 발달하는 지식의 구조는 질적인 수준의 차이를 함의하게 되고, 내용→형식→보다 세련된 내용→새로운 형식→…과 같은 반영적 추상화의 메커니즘이 그 구조를 구성하는데 핵심적인 것이 된다.

Freudenthal 또한 수학의 구조를 학습자가 이해하도록 하기 위해서는 현상을 수학적 구조로 조직화하는 구조화의 경험이 필요하다고 주장하는 바(정영옥, 1997, p.119), 이러한 '조직화'나 '구성'의 방향은 단순히 어떤 구조의 형식적 의미를 알고 그 구조를 가지고 있는 몇 가지 현상을 예로 다루는 것과는 정반대의 방향이라 할 수 있다. 본 연구에서는 군 구조를 갖는 여러 현상을 조직할 수 있는 '자기동형사상' 개념을 예로 들었다. 수학의 구조는 학습자에게 부과되는 것으로서가 아니라 학습자가 구조화하여 나가는 것으로서 학습되어야 한다는 전제가 구체적으로 실현되기 위해서는, 수학적 구조의 본질과 그 구조로 수학화할 수 있는 현실적인 맥락에 대한 보다 집중적인 연구와 통찰이 필요하다 할 것이다.

참고문헌

김응태, 박한식, 우정호(1984). 수학교육학개론. 서울: 서울대학교 출판부.

박재문(1981). 구조주의 인식론에 비추어 본 브루너의 지식의 구조. 서울대 대학원 박사학위논문.

이홍우(1973). 인지학습의 이론. 서울: 교육출판사.

이홍우(1988). 교육의 목적과 난점 (제5판). 서울: 교육과학사.

임재훈(1998). 지식에 대한 구조주의적 관점과 수학에서의 '지식의 구조'. 대한수학교육학회 논문집 제8권 제1호, pp.365～380.

정영옥(1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대 대학원 박사학위논문.

조태근 외 6인(1996). 고등학교 공통수학. 서울: 금성출판사.

졸고(1999). 반영적 추상화와 조작적 수학 학습-지도. 서울대 대학원 박사학위논문.

Beth, E. W., Piaget, J.(1961). *Épistémologie mathématique et psychologie.* W.

Mays(trans.)(1966). *Mathematical epistemology and psychology.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Bruner, J. S.(1960). *The process of education.* 이홍우(譯)(1973). 브루너 교육의 과정. 서울: 배영사.

Freudenthal, H.(1973). What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education. In A. G.Howson(Ed.), *Developments in Mathematical Education* (Proceedings of ICME-2) (pp.101~114). Cambridge University Press.

Freudenthal, H.(1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Piaget, J.(1968). *Le Structuralisme.* C. Maschler(trans.)(1970). *Structuralism.* New York: Basic Books, Inc.

How We Teach 'Structure' - Focusing on the Group Concept

Jin-Kon Hong (Kyung-ki Girl's High School)

This study, after careful consideration on Piaget's structuralism, showed the relationship between Bourbaki's matrix structure of mathematics and Piaget's structure of mathematical thinking. This, studying the basic characters that structure of knowledge should have, pointed out that 'transformation' and to it, too. Also it revealed that group structure is a 'development' are essential typical one which has very important characters not only of mathematical structure but also general structure, and discussed the problem that learners construct the group structure as a mathematical concept.