大韓數學教育學會誌 數學教育學研究 第 10 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. X, No.1, 139-159, July 2000

탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용의 구성방안 탐색[1)]

류 희 찬* · 유 공 주** · 조 민 식***

I. 서론

기하교육의 주된 목적 중 하나는 기하학적 직관능력과 그것을 바탕으로 한 논리적인 추론 능력을 향상시키는 것이다. 분석적인 지적과정에 의존함이 없이 문제의 의미, 의의, 구조를 곧바로 파악하는 직관적인 사고는 날카로운 추측, 의미 심장한 가설, 잠정적인 결론으로의 과감한 도약과 같이 생산적인 사고의 매우 중요한 일면이다. 직관은 핵심적인 연결관계를 즉각적으로 파악하는 거의 무의식적인 매우 신속한 인지과정이며, 특히 시각적인 요소와 밀접하게 관련되어 나타나는 경우가 많다(우정호, 1998).

직관과 관련된 시각적인 요소는 기하의 교수학습에서 중요한 역할을 한다. 그러므로 기하교수 학습을 위해 고안된 탐구형 소프트웨어의 시각적 요소에 대한 동적인 조작 가능성은 기하교육에 많은 영향을 줄 수밖에 없다.

NCTM(1989)은 '학교 수학을 위한 평가와 규준'에서 학생들은 모양과 패턴을 가지고 하는 실제적인 경험을 통해, 수학적 경험을 예술 활동과 통합함으로서 그리고 기하학적 컴퓨터 프로그램의 사용을 통해 기하학적 성질과 관계를 학습해야 한다고 권고하고 있다. 이러한 권고와 더불어, 탐구형 소프트웨어가 교사와 학생들에게 주는 긍정적인 영향-탐구형 소프트웨어를 통해 대상에 대한 직접적인 조작이 가능하고, 이러한 조작을 통해 수학적 대상과의 관계를 강화시킬 수 있으며, 모형과 모의실험을 통해 형식적인 수학을 보다 넓은 경험과 연결할 수 있다.-은 기하교육에서 이것들의 활용을 증가시키는 요인으로 작용하고 있다.

이러한 소프트웨어의 활용은 Olive(1998)가 지적한 것처럼, 단순히 '그것을 거기로 내몰기(Putting it out there)'식으로 수업에 도입하는 것만으로는 불충분하다. 이들 소프트웨어들은 수학에 사용되는 다른 기술들과는 달리, 그것이 작동되는 방식으로 인해, 학교 수학의 주제와 내용 그리고 그것이 수업에서 다루어지는 방법을 변화시킬 수 있는 잠재력을 갖고 있으므로, 이에 대한 충분한 고려가 기하교육과정과 실제수업에 반영되어야 한다.

예를 들어, 현 교육과정의 중학교 1학년 수준에서, 하나의 소단원으로 다루어지고 있는 작도를 생각해보자. 기하의 다른 부분과 작도의 충분한 연결성에도 불구하고, 현 교육과정에서, 작도는 그 밖의 기하 단원에서 잘 드러나지 않는다. 대부분의 학생들은 작도의 효용

---

* 한국교원대
** 대전여자중
*** 한국교원대

1) 본고는 한국학술진흥재단이 지원하는 1998년도 대학부설연구소 지원 연구 과제인 「창의성 신장을 위한 컴퓨터 통합 수학교육과정 개발에 관한 연구」의 2년차 보고서의 일부를 간추린 것이다.

성에 대하여 인식하지 못하고 있으며, 작도와 관련된 문제를 해결할 때조차도 자와 컴퍼스를 이용하여 정확하게 작도하기보다는 시각적으로 그럴듯하게 그림으로서 문제를 해결한다. 그러나 탐구형 소프트웨어가 제공하는 동적인 환경에서 작도의 위치는 현 교육과정에서와는 다르다. 학생들은 동적인 환경에서 수학적 사실을 발견하고 탐구하기 위해 그리고 문제를 해결하기 위해 시각적으로 그럴듯한 그림이 아닌 도형의 관계를 이용한 작도를 해야만 한다. 다시 말해, 기하영역 전반에 걸쳐 탐구형 소프트웨어의 효과적인 사용을 통해 얻고자 하는 이점은 작도로부터 시작된다고 할 수 있다. 이러한 작도의 중요성을 인식하는 것이 탐구형 소프트웨어의 효과적인 활용을 위한 시작이라고도 할 수 있다. 그러므로 작도는 현 교육과정에서와는 달리 기하교육과정 전반에 걸쳐 잘 통합되어져야만 한다.

Balacheff와 Kaput(1993)도 수학의 내용과 교육과정에 대한 기술공학(technology)의 영향은 다루어지는 주제의 특성과 그것이 활용되어지는 방법을 변화시키면서 계속해서 깊어지고 있음을 지적하면서, 이러한 영향으로 인해 교육과정의 내용뿐 아니라 전반적인 조직 또한 변화하고 있다고 주장한다. 그러므로, 기하교육과정의 내용과 전반적인 조직에 대한 탐구형 소프트웨어의 영향은 기하교육에 탐구형 소프트웨어를 도입하기에 앞서 가장 먼저 고려되어야 할 사항이다.

본 고는 탐구형 소프트웨어의 특성과 활용이 기하학습의 내용구성에 미치는 영향을 고찰하고, 이를 바탕으로 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용구성의 전반적인 방법을 모색해보고자 한다. 이를 위해 2장에서는, 1절에서 탐구형 소프트웨어의 특성을 살펴보고, 2절에서 기하학습내용의 변화에 대한 시사점을 얻기 위해 여러 자료를 비교분석하고, 3절에서 탐구형 소프트웨어를 활용한 탐구활동과 기하학습 내용구성과의 관계를 기하학적 이론의 배열과 전개의 측면에서 논하며, 4절에서는 탐구형 소프트웨어에 의해 중요성이 부각되는 작도에 의해 논의한다. 그리고 3장에서는 2장에서 논의한 이론을 토대로 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용구성의 전반적인 방법과 모형단원을 제시한다.

II. 탐구형 소프트웨어와 기하학습내용의 구성

1) 탐구형 소프트웨어의 특성

사용자로 하여금 컴퓨터 스크린 상의 도형을 직접 조작하며 도형의 성질이나 관계들을 탐구하도록 해주는, 다시 말해 동적인 기하환경(dynamic geometry environment)을 제공해 주는 탐구형 소프트웨어는 1980년대 말 등장하였다.

Finzer와 Jackiw(1998)는 동적인 환경의 특성으로 직접적인 조작, 연속적인 움직임, 몰입적인 환경을 제안하고 있다. 직접적인 조작이란 스크린 상의 한 대상을 선택하여 사용자가 직접 움직여보는 것을 의미하는 것으로, 이것을 통해 스크린 상에 보여지는 것과 그것 뒤에 숨겨진 수학적인 것 사이에 인식 거리를 좁힐 수 있다. 연속적인 움직임이란 ‘드래그(drag)’ 동안에 일어나는 변화와 관련된 것으로, ‘드래그’ 동안에 스크린 상의 수학적 대상들이 항상 논리적인 관련성과 전체모양을 유지하면서 움직이고, 사용자가 움직여지는 중간상태를 모두 볼 수 있음을 의미한다. 몰입적인 환경이란 사용자의 초점이 수학적 목표를 달성하는 방법에 맞추어지도록 하는 환경을 말한다.

이 같은 동적인 환경을 제공하는 소프트웨어의 대표적인 것으로는 GEOLOG(Holland, 1993), Cabri-geometre(Baulac, Bellemain & Laborde, 1990), Euklid(Mechling, 1994), The Geometer's Sketchpad(Jackiw, 1992), The Geometric super-Supposer(Yerushalmi & Schwartz, 1993), Thales (Kadunz & Kautschitsch, 1994) 등이 있다(Hölzl, 1996). 현재 국내에서 간헐적으로 쓰이고 있는 소프트웨어는 주로 Cabri-geometre(이하 Cabri)와 The Geometer's Sketchpad(이하 GSP)이다.

이러한 소프트웨어들은 메뉴 옵션이나 아이콘 또는 버튼 등에서 서로 다른 모양을 갖추고 있음에도 불구하고 몇 가지 공통된 특성을 가지고 있다. Hölzl(1996)은 이러한 특성으로 세 가지를 제시하고 있다. 하나는, 이들 모두가 유클리드 원론에 규정된 자와 컴퍼스 작도를 흉내내고 있다는 것이다. 또 하나는, 기능적으로, 사용자에 의해 정의된 작도를 지원하고 있다는 것이다. 그리고, 마지막 하나는, 그가 이들 소프트웨어의 가장 큰 특징으로 들고 있는 것으로서, 도형의 이루는 어떤 요소들(점, 선분, 원 등)을 움직여 그것의 모양을 변화시키더라도, 도형의 근간을 이루는 기하학적인 관계는 계속적으로 유지된다는 것이다. 이 특성은 Laborde (1993)가 제안한 이들 소프트웨어의 공통적인 특성과도 맥락을 같이 한다. 그는 도형의 명시적인 서술과 그림의 가변성을 공통된 특성으로 제안한다. 다시 말해, 화면상에 그려진 그림은 도형의 정의를 명확하게 하는 과정의 결과로, 그리고자 하는 도형에 내재된 기하학적 관계에 대한 명확한 이해와 서술이 필요하다. 이렇게 해서 그려진 스크린 상의 도형은 도형의 가변적인 요소가 변화되었을 때, 의도한 특성들을 보존하면서 여러 가지 도형으로 변화되어진다. 그러므로, 이들 소프트웨어를 활용한 작도는 결과된 그림을 그리는 것이라기보다는 그림에 요구되는 기하학적 관계를 명확히 서술하는 것이라 할 수 있다.

2) 탐구형 소프트웨어와 기하학습내용

현행 학교 수학에서 기하는 초등학교와 중학교 1학년에서 직관기하, 중학교 2, 3학년에서 평면 논증기하가 지도되고 있으며, 고등학교 수학II에서 공간기하가 지도되고 있다. 그리고 해석기하가 공통수학과 수학II에서 일차변환과 벡터기하가 수학II에서 지도되고 있다.

Key curriculum press와 그 밖의 출판사에서 발간한 여러 교수학습자료인 Geometry Through the Circle(King, 1996), Geometry Activities for the Middle School Student(Lawrence et al., 1998), Explorations for the Mathematics Classroom (Engebretsen et al., 1997) 등과 많은 인터넷상의 자료들이 현 교육과정의 기하학습내용을 다루는 데 활용될 수 있다. 이들 자료들은 평면도형의 성질, 삼각함수, 일·이차함수의 그래프, 지수함수와 로그함수, 미분법, 부정적분과 정적분, 벡터, 공간도형 등의 학습내용들을 다루고 있다.

탐구형 소프트웨어 활용의 잠재성은 기하학습내용 각각에 대한 활용가능성보다는 수학 내에서의 내적 연결성을 강화할 수 있다는데 있다. 예를 들어, 탐구형 소프트웨어의 자취탐구 기능과 그래프기능은 교사와 학생들이 대수와 기하에 대한 지식을 통합하도록 돕는다. 가우스 좌표계와 극좌표계가 모두 사용될 수 있고, 두 좌표계에 근거하여 직선과 원의 방정식이 메뉴를 통하여 얻어질 수 있다. 이들 표현은 다른 측정과 마찬가지로 동적이므로 사용자가 마음대로 직선이나 원을 변화시킴에 따라 변한다. 좌표체계도 동적이다. 원점의 위치는 원점을 움직임에 따라, 그리고 축의 스케일은 원점

과 관련된 단위점을 움직임으로써 간단히 변화되어질 수 있다(Olive, 1998). 탐구형 소프트웨어에 의한 동적인 환경에서는 기하학적 작도를 통하여 보다 직접적으로 대수적 관계를 탐구하는 것이 가능하다. 또한, 스크린 상에 작도된 대수적 함수의 그래프는 기하학적으로 구성되어졌기 때문에 평행이동, 대칭이동, 회전이동되거나 확대되어질 수 있다. 그리고 계산기 기능, 측정기능, 그래프관련 기능, 작도메뉴의 자취기능을 사용하여 임의의 대수적 표현을 그래프로 표현할 수 있다.

또한, Balacheff(1993)에 의하면, 기하에서 탐구형 소프트웨어는 주제의 복잡도(complexity)로 인해 현행 학교체제에서는 시간이나 인식의 제약으로 인해 다루어 질 수 없었던 주제들을 다룰 수 있는 가능성을 열어주기 때문에 가르칠 대상을 새롭게 발생시킨다. 그는 구점원(nine-point circle)과 삼각형 수심의 자취에 대한 연구를 그 예로 들고 있다. 이 밖에 원에 대한 점의 역상, 원의 중심의 자취, 변환, 피타고라스 이론에 대한 다양한 증명, 황금비를 갖는 직사각형의 작도 등 현 기하교육과정 밖의 학습내용들이 다루어질 수 있다.

그러나, 이러한 예 모두가 중등 수준에서 다루어질 수 있는 것은 아니며, 그렇다 하더라도 기하교육과정에 포함시키기 위해서는 그와 관련된 많은 연구가 선행되어야 한다. Olive(1998)는 학생들이 수업 중이나 수업 후에 컴퓨터와 가까이 할 수 있고, 교사나 학교 공동체가 외부 압력에 의해 유동성 없는 교육과정을 따르도록 제약을 받지 않고, 학생들이 그들 자신의 문제를 드러내고 탐구하도록 격려되는 상황 속에서, GSP는 중등학교 수준에서 발생되는 기하학습의 범위와 깊이를 확장하기 위한 결정체가 될 수 있다고 제안한다.

탐구형 소프트웨어의 활용을 통해 현 교육과정의 기하학습 범위와 깊이가 어느 정도 확장될 수 있을 것인가? 이러한 문제에 답한다는 것은 그리 간단한 것이 아니다. 여기서는 탐구형 소프트웨어를 활용한 중등 수준에서의 교수학습자료와 다른 나라 교육과정의 분석하여, 현 교육과정에 포함될 수 있는 학습내용에 대한 시사점을 찾고자 한다.

다음에 이어지는 <표 1>, <표 2>, <표 3>은 차례로 Explorations for the Mathematics Classroom(Engebretsen et al, 1997, 이하 EMC), Geometry Activities for the middle School Student(Lawrence et al, 1998, 이하 GAMSS), Exploring Geometry(Bennett, 1996, 이하 EG)를 중심으로 한 분석이다. 이들 자료에서 다루는 내용 중, 현재의 중·고등학교 기하교육과정 밖의 내용을 분석하고, 이들 내용이 정규교육과정 내에서 다루어질 수 있는 내용인가에 대한 시사점을 얻기 위해, 뉴질랜드 교육과정(1996) Ontario 교육과정(1997, 이하 Ontario), Oxford University Press(1995)에서 출판한 'Oxford Mathematics(이하 영국)', 중등기하에 관한 국제회의에서 발표된 Shouts(1998)의 'Transformations and Congruence: An inquiry based unit(이하 TC)', Memorial University에서 추진한 ED4161(Secondary Mathematics Method)의 기하관련 단원계획(1997, 이하 ED4161), 박상호와 윤삼열(1999)의 '고등학교 수학에서의 GSP활용(이하 수학사랑)'에 제시된 현 기하교육과정 밖의 내용에 대한 분석이다. 이들 자료는 단원에 따라 연역적 증명을 다루지 않고 기하학적 내용에 대한 시각적 확인이나 조사활동을 통한 귀납적 추론에 머무르는 것도 있다. 비고란은 주된 분석 자료에 있는 현 중등학교 교육과정 밖의 내용들이 다루어지고 있는 또 다른 자료나 다른 나라의 교육과정을 나타낸다.

<표 1> Explorations for the Mathematics Classroom의 분석

단원	중·고등학교 교육과정 밖의 내용	비고
유전문제(Oil-well problem)	페르마 점(Fermat point), 한 점에서 만나는 두 직선과 두 점이 주어졌을 때, 두 직선을 한 번씩 거쳐 두 점을 잇는 최단거리	EG
회전이동	회전이동의 성질 (합성, 회전의 중심, 회전이동과 선대칭의 관계)	EG, 뉴질랜드, TC, ED4161
선대칭이동	선대칭이동의 성질 (합성, 방향 등)	EG, 뉴질랜드, TC, ED4161
삼각형과 사각형의 무게중심	사각형의 무게중심, 나폴레옹(Napoleon) 삼각형	EG
파그나노 (Pagnano)의 문제	임의의 삼각형에 내접하는 삼각형 중 둘레의 길이가 최소인 삼각형	
당구대 문제	사각형 내에서 다양한 조건을 만족하는 최단거리	EG, TC
최대 넓이를 갖는 사각형	주어진 네 개의 고정된 길이를 사용하여 최대넓이를 갖는 사각형을 작도하기, 순환(cyclic) 사각형, 프톨레미(Ptolemy)의 이론, 브라마굽타(Brahmagupta)의 공식	
최단거리	페르마 점, 삼각형 또는 사각형의 임의의 내점에서 각 꼭지점에 이르는 거리의 합이 최소인 점, 쉬타이너점(Steiner point)	GAMSS
삼각형의 심 (Centers)	심슨 선(Simson line), 오일러 선(Euler line), 구점원(nine-point circle)	

<표 2> Geometry Activities for the Middle School Student의 분석

단원	중·고등학교 교육과정 밖의 내용	비고
점, 선, 각	도형 밖의 점, 도형 위의 점, 원의 중심 등을 드래그했을 때의 차이점	
삼각형	정삼각형의 내부의 임의의 점에서 세 변에 이르는 거리의 합은 높이와 같다.	EG
사각형	오목 사각형	
대칭	도형의 대칭점과 대칭축	EG, 뉴질랜드, Ontario, 영국
변환	좌표평면 위에서의 도형의 변환, 미끄럼 반사	뉴질랜드(격자에서)영국(격자에서), EG, TC, Ontario
작도	황금비를 갖는 직사각형, 만화경(Kaleidoscope), 두 소실점을 갖는 상자, 평행이동에 의한 테셀레이션, 이진 구조, 시어핀스키 삼각형, Dragon의 프랙탈, 사도기(寫圖器, Pantograph)	EG, 뉴질랜드, 영국, Ontario, 수학사랑(고)

3) 동적 환경에서의 탐구활동과 기하학습내용의 구성

(1) 탐구형 소프트웨어를 활용한 탐구활동

탐구형 소프트웨어는 스크린 상의 대상에 대한 관찰, 실험을 통해 귀납적 접근을 할 수 있도록 도와주는 도구라 할 수 있다. 이러한 도구를 적절히 활용하기 위해선 먼저 스크린 상에 탐구활동이 가능한 도형을 그려야만 한다.

그려진 동적인 그림은 지필 환경의 어떠한 정적인 그림으로부터 상상하기 어려운 것들은 보여줄 수도 있다.

Cuoco et al.(1998)은 일반적인 의미에서, 기

<표 3> Exploring Geometry의 분석

단원	중·고등학교 교육과정 밖의 내용	비고
선과 각	데이지 디자인 (정삼각형의 작도 응용), 두 소실점을 갖는 상자 그리기	GAMSS
변환, 대칭 그리고 테셀레이션	좌표평면에서의 도형의 선대칭이동, 도형의 방향, 선대칭이동의 다양한 응용, 미끄럼 반사(glide reflection), 정다각형에서의 대칭, 만나는 두 직선에서의 반사(reflection), 평행선에서의 반사, 정다각형의 테셀레이션	뉴질랜드, 영국, Ontario, ED4161, TC, GAMSS, EMC
삼각형	나폴레옹의 이론, 모레이(Morley) 이론, 정삼각형 내부의 임의의 점에서 각 변에 이르는 거리의 합은 높이와 같다.	GAMSS, EMC
오각형	내접하는 별, 정오각형의 작도	
원	사이클로이드	
피타고라스의 정리	다양한 방법의 증명	
닮음	황금비를 갖는 직사각형, 사도기(寫圖器, Pantograph)작도	GAMSS, 뉴질랜드
삼각기하	프랙탈 작도, 자취로 사인곡선을 탐구	GAMSS, 수학사랑

하학적 탐구활동(geometric experiment)이란, 함수를 적용할 그림을 선택하는 방법과 더불어 도형공간에서 정의되는 함수로서 이해될 수 있다고 주장한다. 여기서 도형공간에 대하여 좀 더 생각해보자. Parzysz(1988)는 도형을 '그것을 정의하는 교과서에 서술되어 있는 기하학적 대상'으로 표현한다. Parzysz의 '도형'을 그림의 집합으로 생각하여, 도형이 삼각형이라고 가정한다면, 각각의 그림은 하나의 삼각형을 표현한다고 할 수 있다. 이러한 집합을 위상으로 설명할 수도 있다. 도형 공간에 대해 그림을 점으로 생각해보자. 그러한 공간 속에 있는 어떤 점들은 동일시 될 수 있다; 예를 들어, 합동이거나 닮은 삼각형은 하나의 점으로 동일시 될 수 있다. 그래서, 도형 공간은 사실상 어떤 관계(relation)에 의한 그림 집합의 상(quotient)일 수 있다(Cuoco et al., 1998).

함수를 적용할 그림을 선택하는 방법은 몇몇 탐구형 소프트웨어에서 다르게 나타날 수 있다. 그러나, 대부분의 탐구형 소프트웨어는 사용자가 마우스로 작도된 그림(하나의 삼각형, 사각형 등)의 원시 원소(점, 선분 등)를 클릭하여 끌어봄으로서 작도의 다른 예를 볼 수 있도록 한다. 스크린 상의 디자인이 바뀌면서 사용자는 연속체처럼 보이는 중간상태의 것들을 보게 된다. 그 결과 사용자는 처음 작도한 예가 마지막 예로 연속적으로 변화하면서 무한 사례를 검사하고 있다는 인상을 받는다. 이러한 환경 속에서, 독립변수는 현재 선택되어진 대상의 한 요소(꼭지점, 변)이고 결과되는 값, 즉 종속변수는 작도와 관찰에 기초되어지고 있는 어떤 대상(삼각형)이다. 그리고 독립변수인 요소를 마우스로 클릭하고 평면의 또 다른 부분으로 움직이는 것이 결과값을 얻는 방법으로 사용된다. 다시 말해, 탐구형 소프트웨어가 제공하는 탐구환경은 어떤 움직일 수 있는 대상의 위치에 따라 나타나는 자취에 의존하고 있다. 이것이 일종의 함수를 제안하게 되며, 이를 이용하여 탐구활동을 할 수 있게 된다.

(2) 탐구활동을 위한 기하학적 정리의 재서술

기하학적 정리를 동적인 환경에서 탐구활동이 가능한 내용으로 재서술하는 것은 정리에 대한 적절한 시각적 표현을 찾으려는 과정의

하나로 보여질 수 있다. 적절한 시각적 표현은 기하학적 정리에 대한 이해와 교수학습목표와 관련된 다양한 상황에 대한 인식, 그리고 앞서 논의한 함수적 관계가 요구되는 것이라 할 수 있다. 이러한 요구에 부응하여 Goldenberg et al.(1998)은 창조적인 탐구활동을 위한 하나의 방법으로, 사실에 대한 정적인 진술을 어떤 변화요인에 대한 종속관계로 재서술할 것을 제안하고 있다.

그는 기하의 많은 정리들은 정적인 표현에도 불구하고 동적인 의미를 갖고 있다고 말한다. 다시 말해, '삼각형의 내심은 삼각형의 내부에 있다'라든가 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.'라는 정적으로 표현된 정리에서 '삼각형', '이등변삼각형'의 표현은 '모든 삼각형', '모든 이등변삼각형'을 의미한다. 이러한 동적인 의미의 인식은 정리를 함수로서 볼 수 있는 중요한 역할을 한다. 다시 말해, '모든' 이라는 것이 잠재적인 변수로 작용하여 이론에 대한 함수적 재 서술을 제안하게 되는 것이다.

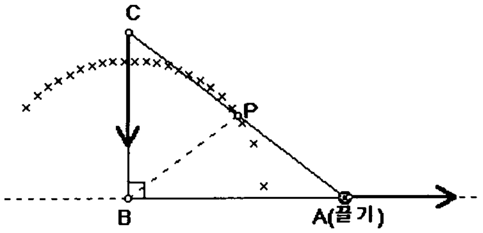
예를들어, 현재 중학교 2학년에서 가르쳐지고 있는 내용인 '직각삼각형의 빗변의 중점은 삼각형의 세 꼭지점으로부터 같은 거리에 있다.'라는 기하학적 정리를 살펴보자(Goldenberg et al., 1998). 교수학습 목표와 관련된 다양한 상황 내에서 기하학적 정리의 정적인 진술을 그대로 스크린 상에 옮겨 탐구활동을 할 수도 있다. 여기에 표현된 직각삼각형이란 모든 직각삼각형을 의미하므로, 임의의 직각삼각형을 작도하고 각 꼭지점으로부터 빗변의 중점까지의 길이를 측정한 후, 세 꼭지점 각각을 끌어보면서 측정치의 변화를 관찰할 수 있다. 그러나, 이러한 탐구활동을 통해 기하학적 이론을 서로 관련된 다른 이론과 자연스럽게 연결시키기는 어렵다.

이 정리를 앞서 논의한 함수관계를 고려하여 재서술하여 보자. 이 정리를 함수로 보기 위한 한가지 방법은 모든 직각삼각형을 빗변의 길이가 같은 직각삼각형으로 제한하여 변화요인과 관찰대상을 분명히 하는 것이다. 즉, 밑변과 높이의 길이 변화로 직각삼각형이 변화될 때, 빗변의 중점이 어떻게 변화되는지를 관찰하는 것이다. 탐구형 소프트웨어를 활용할 수 있는 좀 더 구체적인 활동으로 서술하면, '빗변의 길이가 일정한 직각삼각형의 밑변의 끝점을, 밑변을 포함하는 직선을 따라 움직일 때, 빗변의 중점이 그리는 자취는 어떤 특성을 가지고 있는가'로 서술될 수 있다. 여기서, 독립변수는 밑변을 포함하는 직선 상에 있는 밑변의 끝점의 위치이고, 함수값은 빗변의 중점의 위치가 된다.

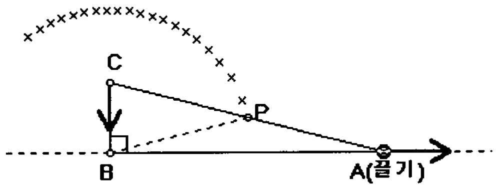
학생들은 밑변의 끝점을 움직여봄으로서, 빗변의 중점의 자취가 하나의 일정한 모양-직각을 이루는 꼭지점을 중심으로 일정한 거리 R (선분 BP)만큼 떨어져 있는 반원-을 이룬다는 것을 발견한다. 그리고, 빗변이 밑변에 가까워짐에 따라(<그림2>에서 점 C가 점 B에 가까워짐에 따라), 직각삼각형의 높이는 원의 중심으로 자취를 감추면서, 원의 반지름인 선분 BP가 선분 CP와 일치하게 됨을 관찰하게 된다. 이를 통해, 직각삼각형의 세 꼭지점으로부터 빗변의 중점에 이르는 거리가 같음을 추론하게 된다.

이처럼 변화요인과 관찰대상을 분명히 하여 정리를 재서술하는 활동은 탐구형 소프트웨어를 활용한 탐구활동의 바탕이 될 수 있고, 이를 통해 새로운 추론을 할 수 있으며, 고립된 사실을 서로 관련된 수학적 아이디어의 총체로 이끌 수도 있다(Goldenberg et al., 1998).

이러한 함수적 재서술은 대체적으로 작도에 의해 특성화되어지고 교수학습 목표를 달성하고자 하는 교사의 의도나 기하학적 정리를 탐구하고자 하는 학생들의 의도에 의해 다르게



<그림 1> 빗변의 중점이 그리는 자취2)



<그림 2> 빗변의 중점에 관한 새로운 추론

나타날 수 있다. 즉, 어떠한 요소들을 움직일 수 있도록 작도할 것인가, 함수값은 어떠한 대상이나 관찰로 할 것인가에 대한 결정으로 탐구활동이 특성화된다. Cuoco et al.(1998)은 이러한 함수를 탐구활동의 '절차(Procedure)'라고 표현한다. 이러한 '절차'를 통해 기하학적 이론에 대한 탐구활동이 행해질 수 있다.

(3) 탐구활동과 기하학적 이론의 배열

학생들은 재서술된 기하학적 이론을 작도에 의해 특성화하고 이를 탐구하면서 이론에 대한 새로운 추론을 할 수도 있다. 그러나, 정적인 진술의 함수적 재서술이 갖는 의미는 이러한 추론의 가능성보다는 탐구활동의 절차를 변화시켜 새로운 탐구활동과 이를 통한 추측 그리고 그것에 대한 정당화의 활동을 계속하여 전개시켜 나아갈 수 있다는 데에 있다. 함수적 재서술은 학생들에게 '만약 이렇게 한다면 어떻게 될까?'라는 질문을 자연스럽게 제기하는 힘을 갖고 있다. 앞서 논의한 기하학적 이론에서 '빗변의 길이가 아닌 밑변의 길이가 일정한 정삼각형이라면?' 또는 '관찰대상이 빗변의 중점이 아니라면?' 등의 질문이 자연스럽게 제기될 수 있고, 이러한 질문이 하나의 문제로 설정되어 탐구활동을 계속적으로 자극할 수 있다.

전통적인 기하교육에서 '직각삼각형의 빗변의 중점이 아닌 다른 점은 세 꼭지점으로부터 같은 거리에 있다' 라는 것은 단순히 잘못된 것으로 취급될 수 있지만, 이를 동적으로 서술한 위의 질문은 탐구활동을 자극하는 새로운 문제가 될 수 있다. 학생들은 이 점의 자취가 빗변의 중점이 그린 원과는 다르다는 것을 발견하고 이것이 동기가 되어 빗변에서의 점의 위치를 변화시켜보면서 탐구활동을 계속할 수 있다.

학생들은 이러한 탐구활동을 통해 직각삼각형에서 빗변의 중점만이 세 꼭지점에서 같은 거리에 있음을 명확히 인식하게 될 수도 있다. 또는 탐구활동을 하는 동안 학생들은 자신들을 직각을 이루는 꼭지점 '행성'에 앉아서 자신의 주변을 회전하는 빗변에 있는 위성을 바라보는 관찰자로 생각할 수도 있다. 이러한 생각은 또 다른 문제, 예를 들어 '만약 위성에 있는 관찰

2) 작도 방법
① 점 B를 지나는 직선 BD를 긋고, 그 위에 임의의 점 A를 찍는다.
② 점 B를 지나 직선 BD에 수직인 직선을 작도한다.
③ 임의의 선분 EF를 그린다.
④ 점 A를 중심, 선분 EF를 반지름으로 하는 원을 작도하고, 원과 수선과의 교점을 점 C라 한다.
⑤ 선분도구를 사용하여 삼각형 ABC를 그리고, 불필요한 부분은 감추기도구를 사용하여 보이지 않게 한다.
⑥ 선분 AC의 중점 D를 작도하고, 점 D의 자취를 관찰한다.

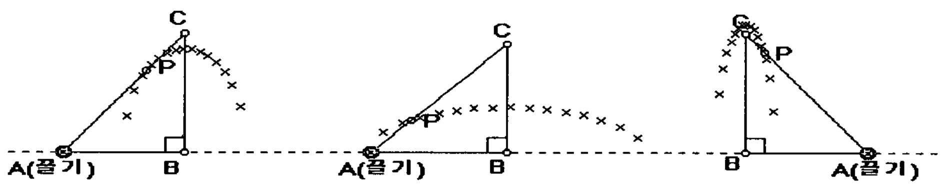
자가 나를 바라본다면?'과 같은 문제를 설정하는 바탕으로 작용하게 될 수 있다.

이러한 방법으로 계속적으로 질문을 제기하면서 새로운 문제를 설정해 나아갈 수 있으며, 이처럼 자연스럽게 제기될 수 있는 아이디어에 따라서 기하학습내용이 구성될 수도 있다. 그러나 이러한 자연스러운 아이디어에만 따른다면 전통적인 교육과정의 순서로부터 멀어질 수 있다. 이것은 전통적인 교육과정의 구성이 기하학적 정리에 대한 동적인 접근에서 자연스럽게 제기될 수 있는 질문들을 고려한 일련의 순서로 배열되어 있지 않기 때문이다. 그리고 이러한 내용 구성은 자칫 일관성을 잃기 쉬우며 학생들의 학습수준을 벗어날 수 있다. 그러나, 만약 탐구형 소프트웨어를 사용한 탐구활동을 시도하면서 전통적인 교육과정을 학생들의 자연스러운 아이디어보다 더 강조한다면, 학생들은 정리에 대한 실험적 접근으로 힘들이고 있는 이유를 궁금해 할 것이고 연속적인 사고의 단절을 경험하게 될 것이다. 주미와 전영국(1998)은 GSP를 통한 탐구학습을 현장에 적용해 본 결과 기존의 교육과정과 맞지 않는 부분이 많아 교사가 교육과정에 따라 컴퓨터 소프트웨어를 사용할 경우, 매우 제한적인 활용을 하게 되거나 새로운 교육과정에 따른 수업을 진행하게 되는 기로에 놓이게 됨을 지적하고 있다. 이것은 교과서에 있는 교육과정의 순서와 정리에 대한 실험적 접근으로 인한 학생들의 자연스러운 아이디어를 조화롭게 편성하는 도전을 요구한다.

(4) 탐구활동과 기하학습내용의 학습

기하학적 이론에 대한 재서술은 정적인 서술에 대한 전통적인 접근, 즉 연역적이고 형식적인 증명에 치중된 기하교육의 현실을 개선하는 촉매역할을 할 수 있다. 앞서 논의한 것과 같이, 동적인 서술은, 연역적 증명에 앞서, 스크린 상의 대상을 직접 조작하면서 관찰하고 경우에 따라 측정치를 기록하고 비교하면서 귀납적 추론활동을 전개해나갈 수 바탕을 마련해준다. 다시말해, 동적인 서술은 작도된 그림을 통해 탐구활동을 자극하게 되는 것이다. 이렇게 자극된 탐구활동은 귀납적 추론을 연역적 추론과 조화롭게 병행시켜 학생들이 기하 교육의 목적 중 하나인 이론에 대한 의미 있는 정당화에 이르도록 돕는다. Galindo(1998)는 학생들이 생각에 대한 의미 있는 정당화로 나가는데 있어 성공적일 수 있는 새로운 접근을 구성하는데 탐구형 소프트웨어가 사용되어질 수 있다고 제안하다.

Simon과 Blume(1996; Elliott & Knuth, 1998, 재인용)는, 탐구형 소프트웨어의 활용을 통해, 학생들이 네 수준 즉, 몇 개의 예를 통해 기하학적 이론에 대한 타당성을 잠정적으로 얻는 수준, 극단적인 경우를 시험하면서 일반성에



<그림 3> 빗변에서의 점의 위치에 따른 자취의 변화

대한 의문을 좀 더 명확히 다루는 수준, 대상들을 대표하는 예에 기초하여 논의를 전개하는 수준, 특별한 예에 대한 설명으로부터 벗어나 지적인 증명을 하기 시작하는 수준을 거치면서 귀납적 추론을 연역적 추론과 자연스럽게 연결시켜 나갈 수 있다고 제안한다. 이는 탐구형 소프트웨어가 증명의 이해와 의미를 강조하는 직관적인 접근과 이를 통한 연역적 추론을 자연스럽게 연결짓는 수업의 한 도구로 활용될 수 있음을 의미한다.

몇몇 학자들은 탐구형 소프트웨어의 이러한 도구적 활용을 수업 속에서 구체화하는 방법을 제시하였다. Galindo(1998)는 탐구형 소프트웨어를 활용하는 수업의 한 방법으로, 실제적인 조작활동 후에 컴퓨터를 통해 자신의 추측을 시험하고 확장하면서 다른 사람들과 서로에 대한 발견에 대한 논의를 하고 논의에 타당성을 제공하는 연역적 활동을 할 것을 제안한다. Yerushalmy(1998)는 동적인 서술을 작도로 특성화하고, 다양한 대상에 대해 시각적 피드백과 측정능력을 사용하여 관찰을 통한 추론을 한 후, 추론된 사실을 선수지식을 활용하여 설명하는 방법을 제안한다.

실상, 탐구형 소프트웨어를 활용하는 대부분의 교수-학습자료는, 위에서 제안된 방법들과는 달리, 연역적 논의가 결여된 채, 학습내용에 대한 시각적 확인 또는 귀납적 추론에 머물거나 귀납적 추론에 대한 논의의 결여로 귀납적 추론과 연역적 증명이 자연스럽게 연결되지 못하고 있다. *Geometry Through the Circle*(King, 1996)의 경우, 다양한 방법으로 기하학적 내용을 재서술하고, 이를 각각 작도로 표현한 후, 탐구활동을 통해 추측하고 이에 대한 용어나 형식적인 정리 내용을 진술하면서 내용을 심화시켜 나가나 시각적 확인이나 귀납적 추론에 그치는 내용들이 많다. Geometry Activities for the middle School Student(Lawrence et al., 1998)의 경우, 먼저 제시된 작도를 통해 특별한 경우를 관찰하고 좀 더 많은 예들을 탐구활동을 하면서 일반적인 추측을 하는 것으로 귀납적 추론위주로 구성되어있다.

그러므로, 귀납적 추론과 연역적 추론을 연결짓는 탐구형 소프트웨어의 역할이 충분히 반영된 교수학습자료의 개발이 필요하다. 물론, 이러한 자료의 효율적인 활용을 위해서는 탐구형 소프트웨어의 도구적 활용이 고려된 기하학습내용구성이 선행되어야 할 것이다.

4) 동적 환경에서의 작도문제

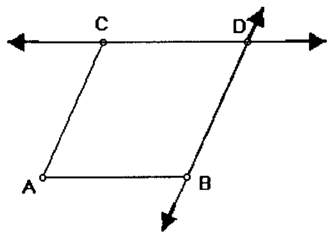
전통적인 기하교육과정에서 대부분의 작도문제는 기하과정 전체에 잘 융합되어 드러나기보다는 하나의 독립된 단원에서 작도 절차의 단순한 기능을 숙달시키는 수준에 머무르는 경향이 있다. 대부분의 연습문제는 작도절차를 암기하고 있는가를 묻고 있다. 그러나 작도 과정과 작도된 결과가 마지막에 작도된 그림, 즉 결과물에 결합되어 있어 교사가 학생들에게 과정에 대한 분리된 문서자료나 설명을 요구하지 않는 한 작도 과정에 대한 판단은 결과물에 의존할 수밖에 없다. 그래서, 교사들은 종종 마지막 결과물이 합리적으로 보일 것과 작도과정을 나타내는 호의 흔적을 남길 것을 요구한다. 그러나, 이러한 결과물로 그 과정의 옳고 그름을 판단하는 것은 모호하며, 이로 인해 작도 문제의 해결 과정에 대한 피드백을 제공한다는 것은 어렵다.

그리고, 기하의 다양한 영역에 포함된 작도문제도 시간의 제약이나 작도에 대한 인식의 부족 등으로 교사나 학생에 의해 대수적인 문제해결의 참조로 또는 시각적으로 그럴듯한 그림을 그리는 문제로 다루어지는 경향이 있다.

그러나, 동적인 탐구환경에서의 작도의 유용성과 필요성은 기하교육과정에서 작도문제의 역할에 변화를 가져다 줄 수 있다. 작도문제를 통한 능동적인 작도 경험은 도형에 대한 더 깊은 이해를 도울 수 있을 뿐만 아니라, 이들 도형들을 정의하는 조건들을 시험해보면서 도형의 정의와 논리적인 종속에 관해 더 깊은 이해를 할 수 있도록 해 줄 수 있다. 예를 들어, 탐구형 소프트웨어를 활용하여 스크린 상에 마름모를 작도해야한다고 가정해보자. 스크린 상에 그려질 사각형은 그 기본요소(점, 선분)가 드래그되어 그것의 모양과 크기는 변하더라도 계속적으로 마름모를 유지해야만 한다. 결국 동적인 탐구환경에서의 작도문제는 이러한 조건을 만족시키는 마름모를 작도하는 것이 된다. 이러한 작도문제의 해결은 학습자의 기하학적 수준이나 소프트웨어의 사용능력에 따라 다르게 나타날 수 있으나, 각 수준의 해결과정 속에서 학생들은 마름모에 대해 좀 더 정확한 개념을 학습할 수 있다. 이것을 작도문제의 해결에 있어 Bennett와 Finzer(1995)가 제시한 서로 다른 네 수준을 고려하여 좀 더 구체적으로 논의 될 수 있다.

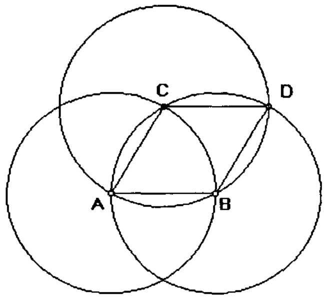
① 그림을 그리는 수준: 이 단계에서는 마름모의 성질을 사용하여 작도하지 않고 시각적으로 옳게 보이는 그림을 그린다. 예를 들어, 임의의 사각형을 그리고 각 변의 길이를 측정한 후, 각 변의 길이가 같아질 때까지 각각의 꼭지점을 드래그하는 경우이다. 학생들은 마름모의 기본 요소를 드래그해봄으로써, 이러한 방법이 주어진 작도 문제의 올바른 해결이 아님을 분명히 알게 된다. 그럼으로써 올바른 작도를 위해 마름모의 성질에 관심을 갖게 된다.

② 불충분한 조건을 사용하는 수준: 예를 들어, <그림 4>에서처럼 선분 AB와 AC에 평행하면서 점 B와 C를 지나는 평행선을 작도하고 측정을 통해 네 변의 길이가 같도록 조정하여 마름모를 작도하는 경우이다. 이 경우, 대변이 서로 평행하지만 이웃하는 두 변의 길이가 같지 않으므로 기본요소가 드래그되었을 때, 계속하여 마름모를 유지하지 못한다. 이를 통해, 학생들은 마름모의 조건이 불충분함을 깨닫게 될 수 있고 네 변의 길이가 같아질 수 있도록 하기 위해 애쓸 것이다.



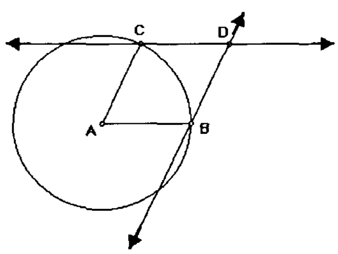
<그림 4> 불충분한 조건을 사용한 작도

③ 지나친 조건을 사용하는 수준: 이 단계의 학생들은 기본 요소가 어떻게 드래그되든지, 문제의 조건을 충족시키는 도형을 작도할 때까지 만족하지 못한다. 그러나, 너무 지나친 조건을 사용함으로서 요구하는 도형의 요구에 부합하지 못한다. 예를 들어, <그림 5>에서처럼, 이웃하는 두 변의 길이를 같게 하기 위하여 꼭지점 A, B, C 각각을 중심으로 하는 반지름의 길이가 같은 원을 작도하는 경우이다. 이 경우, 기본요소의 움직임과 상관없이 작도된 도형은 항상 마름모를 유지하긴 하지만 꼭지각이 60도와 120도인 마름모만이 스크린 상에 나타나게 된다. 학생들은 다양한 꼭지각을 갖는 마름모를 작도하기 위하여 사용한 조건을 완화하려고 할 것이다. 이를 통해, 학생들은 마름모가 되기 위한 최소한의 조건을 작도에 사용해야함을 인식하게 될 것이다.



<그림 5> 지나친 조건을 사용한 작도

④ 적절한 조건을 사용하여 수준: 예를 들어, 학생들은 이웃하는 두 변의 길이를 같게 하기 위한 적절한 도구로서 원도구를 사용할 수 있다. 그리고 <그림 6>에서처럼 선분 AB와 AC에 평행하면서 점 B와 C를 지나는 평행선을 작도한다. 물론, 마름모의 대각선의 성질이나 대칭성 등 다른 성질에 기초해서 적절한 조건을 갖는 마름모를 작도할 수도 있다. 적절한 조건이란 도형을 정의하는 최소의 관계이다. 학생들은 그들의 작도가 정의에 위배되는지를 검사하거나 서로 다른 방법의 작도를 통해 마름모의 대안적인 정의를 찾을 수도 있다.



<그림 6> 적절한 조건을 사용한 작도

그림 대신에 정확한 작도를 하는 것이 탐구형 소프트웨어를 탐구활동을 위한 도구로 활용할 수 있기 전에 극복해야할 장애로 보일 수도 있을지 모른다. 그러나, 작도문제를 해결하는 것 그 자체가 학습활동을 보상하는 것이다.

동적인 탐구환경에서는 작도의 역할뿐 아니라 작도문제도 지필 환경에서 제시되는 문제와 그 성격을 달리 할 수 있다. 다시 말해, 문제의 설정 목표나 작도문제의 제시형태 등이 달라질 수 있다. Jackiw(1995)에 의하면 교사들은 대개 탐구형 소프트웨어를 사용하여 '각의 복사'와 같은 형태의 문제를 제시하지는 않는다. 탐구형 소프트웨어는 교사들이 그러한 전통적인 문제를 더 복잡한 과제 안으로 삽입할 수 있도록 해 준다. 예를 들어, 사각형의 성질을 학습하는 상황에서 같은 크기의 각을 작도하는 문제는 등변사다리꼴을 작도하는 문제에 포함 될 수 있다. 여기서 문제 설정의 목표는 같은 크기의 각을 작도하는 절차에 대한 기능 숙달보다는 등변사다리꼴의 개념을 강화하는데 맞추어진다. 학생들은 Bennett와 Finzer가 제시한 네 가지 수준의 몇 개 또는 모두를 경험하면서 등변사다리꼴의 개념을 시험하게 된다; 스크린 상에 시각적으로 그럴듯해 보이는 그림을 그리거나 충분치 못한 조건이나 과도한 조건을 사용하여 작도하고 이를 드래그 모드로 시험하면서 또는 적절한 조건이 사용된 작도를 시험하면서 등변사다리꼴을 작도하기 위한 최소의 조건을 인식하게 되고 이를 통해, 등변사다리꼴의 개념을 강화하게 된다.

작도 문제 설정의 목표는 반드시 동적인 탐구환경을 고려해야만 한다. 작도 문제의 해결에서 요구되는 지식이 지필 환경에서 요구되는 것과 다를 수 있기 때문이다. 이것은 동적 탐구환경의 특성인 드래그 모드에 의해 부각되어진다. 드래그 모드는 기하학적 대상의 관계적 특성을 바꾼다. 예를 들어, 만약 점 A와 B가 주어진 정삼각형을 작도한다면 점 A와 B는 드래그할 수 있는 반면에, 점 C는 드래그 할 수

없다. 관계적 관점에서 보면, 그것들의 각 쌍이 정삼각형을 결정하는 것이므로 점 A, B, C는 구별할 필요가 없다. 그러나 함수적 관점에서 보면, 그 상황은 다르다: 점 A, B는 점 C의 위치를 결정하지만, 점 C는 점A, B의 위치를 결정하지 못한다.(Hölzl, 1996) 이러한 특성은 문제를 해결하는 방법을 변화시키고 이에 따라 문제 해결에서 지필 환경과는 다른 지식을 요구하게 된다.

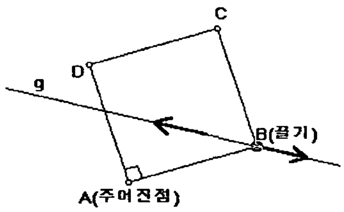
예를 들어, Hölzl이 연구한 정사각형 작도문제의 해결 전략을 살펴보자. 정사각형 작도문제는 다음과 같다.

정사각형 작도문제: 직선 g와 그 위에 있지 않은 한 점 A가 주어져 있다. 정사각형의 또 다른 꼭지점 B와 D가 직선 g에 놓이는 정사각형 ABCD를 작도하여라(Hölzl, 1996).

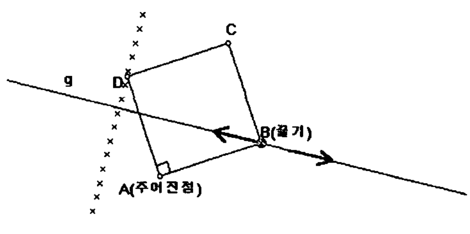
먼저, 지필 환경에서의 해결전략을 살펴보자. 작도하고자 하는 도형은 정사각형이고 선분 BD는 이 정사각형의 대각선이 된다. 그래서, 학생들은 직선 g가 정사각형의 대각선을 포함하고 있음을 이용하여 작도할 수 있다.

다음으로 탐구형 소프트웨어를 사용하여 문제를 해결하여 보자. 물론 지필 환경에서의 문제 해결 전략이 사용될 수도 있다. 그러한 전략을 사용하여 지필 환경에서보다 더 간단하게 작도할 수도 있다. 그러나, Hölzl(1996)이 연구한 몇몇 학생들은 탐구형 소프트웨어의 동적인 성질을 이용하여 문제를 해결하려고 하였다. 먼저, 그들은 직선 g위에 점 B를 위치시키고 점 A와 점 B를 이용하여 정사각형을 작도하였다. 그리고, 점 D가 직선 g위에 놓일 때까지 마우스를 사용하여 점 B를 직선 g를 따라 끌어보고, 점 D를 직선 g에 연결하려고 하였다. 그러나, 탐구형 소프트웨어가 제공하는 환경에서, 점 D는 기본점이 아니라 직선 AD와 CD의 교점이므로, 함수적인 이유로 인해 점 D는 직선 g에 연결될 수 없었다. 그래서, 학생들은 점 D의 자취를 작도해야만 했다. 그리고 문제를 해결하기 위해서는 먼저 점 D의 자취를 이해해야만 했다. 이 문제에서 점 D의 자취는 하나의 선으로 나타난다. 점 D는 점 A를 중심으로 점 B를 90도 회전하여 얻은 상이고, 점 D의 자취는 점 B가 직선 g위를 움직임에 따라 나타나므로, 그 자취는 점 A를 중심으로 직선 g를 회전하여 얻은 상 g’와 일치한다. 결국 직선 g와 직선 g’의 교점이 점 D의 위치가 된다.

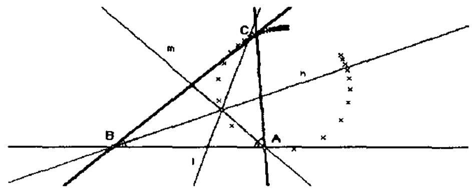
이 과정에서 학생은 점 B와 점 D가 직선 g 위에 위치되어야 한다는 조건 중 한 가지를 선택하고 나머지 조건을 만족시키기 위해 드래그 기능을 사용한다. 두 조건을 동시에 사용하지 않고 한 조건씩 만족시켜 감으로서 문제해결에서 요구되는 지식이 지필 환경과 달라지게 된다.



<그림 7> 회전이동을 이용한 정사각형의 작도



<그림 8> 자취를 이용한 정사각형의 작도



<그림 9> 자취의 해석을 통한 문제해결

지필환경에서는 대칭성 또는 정사각형의 대각선의 성질에 대한 학습자의 통찰이 문제 해결의 핵심이 되지만, 동적인 문제 해결에서는 점 D의 자취에 대한 해석이 결정적이다. 언뜻 보기에, 동적인 해결은 지필 환경에서의 해결보다 다소 복잡해 보이고 주어진 문제의 성질과 맞지 않는 것처럼 보일 수도 있다. 그러나, 이러한 해법은 탐구형 소프트웨어가 제공하는 환경 속에서는 자연스러운 것이다. 이처럼, 주어진 학습환경에 의해 문제해결에 요구되는 지식이 달라지게 된다.

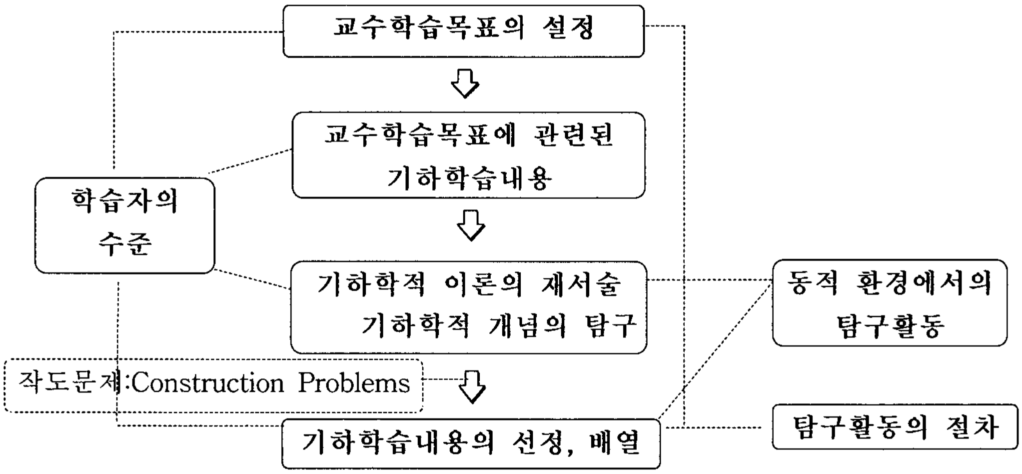
뿐만 아니라, 지필 환경에서의 해법이 제시된 문제에 대하여 특정한 것임에 비해, 동적인 해결전략은 정사각형 작도문제와 같은 종류의 문제에 대하여 일반적으로 적용될 수 있다. 예를 들어, 다른 작도문제-한 점에서 만나는 세 직선이 주어져 있다. 점 A는 그 직선 중 하나에 속해 있다. 각각의 직선들이 삼각형의 세 각을 이등분하도록 삼각형 ABC를 작도하여라-를 해결하고자 할 때, 위에서 사용한 동적인 전략이 사용될 수 있다.

그리고 정사각형의 작도문제가 지필 환경 상에서는 정사각형의 대각선의 성질을 학습한 후에 그것에 대한 학생들의 이해를 확인하기 위하여 다루어질 수 있는 반면에, 동적인 환경에서는 도형의 변환적인 측면을 다루는 기하 영역에서 회전이동의 학습 후에 다루어 질 수 있다. 이처럼, 동적환경에서, 작도문제의 해결전략의 변화는 문제설정의 목표, 다루어지는 영역 그리고 관련된 작도문제의 제시 가능성 등에 영향을 준다.

탐구형 소프트웨어를 활용하는 동적인 환경에서는 단순한 '복사'를 요구하는 작도문제의 형태도 지필 환경에서와는 다르게 제시될 수 있다. Galindo(1998)는 '블랙박스 분해(deconstructing black boxes)'라는 형태의 작도문제를 제안한다. 이것은 탐구형 소프트웨어를 사용하여 작도된 도형을 학생들에게 제시하는 것으로, 그 도형이 어떻게 작도되었는지 모르는 학생들에게 도형의 기본요소를 드래그해보면서 제시된 것과 똑같이 움직이는 도형을 작도하도록 요구하는 문제이다. 이러한 형태의 문제가 지필 환경에서 다루어질 수는 없다. 종이 위에 작도된 어떠한 그림도 그림의 각 요소 사이의 잠재적인 관계를 전달할 수 없기 때문이다.

이러한 '블랙박스 분해' 형태의 작도 문제를 해결하기 위해 학생들은 기본요소가 드래그될 때, 변하지 않는 기하학적 성질을 탐구하게 된다. 이것으로부터 가설을 세우고 여러 가지 방법을 사용하여 문제해결을 시도한다. 이러한 형태의 문제는 학생들에게 그들의 기하학적 지식, 공간감각, 수치적 관계 또는 기본요소가 드래그될 때 불변인 것처럼 보이는 시각적 성질들을 서로 연결해야만 하는 상황을 만들어주기 때문에 가치가 있다(Galindo, 1998).

작도의 의미를 새롭게 부각시키는 동적인 탐구환경은 기하영역에서 다루어지는 문제들의 여러 측면 즉, 문제설정의 목표, 해결전략의 변화와 그에 따른 후속문제의 선택, 그리고 문제 제시 형태와 방법 등에 영향을 준다. 그러므로, 탐구형 소프트웨어를 활용하는 기하교육에서 설정되는 문제들은 반드시 이러한 영향을 고려하여야 한다.



<그림 10> 기하학습내용의 구성

III. 기하학습내용의 구성방안

앞장에서 살펴본 바와 같이, 교육과정 내에서 탐구형 소프트웨어의 활용은 대수와 기하 그리고 예술 주제와의 다양한 연결을 통해 현 기하교육과정의 학습내용을 좀 더 풍부히 할뿐만 아니라, 귀납적 추론과 연역적 추론의 연결을 도와 이론에 대한 의미 있는 정당화에 이르도록 한다. 물론, 지필 환경과는 다른 직관적이고 시각적인 방법으로 기하학적 이론에 접근함으로서 논증기하의 부분이 약화될 우려가 있으나, 논증기하의 지도가 아이디어의 논리적 조직이나 엄밀한 형식적 체계 또는 표현에만 국한되어있지 않으며, Viller(1998)의 제안처럼, 명제에 대한 의심보다는 탐구활동을 통한 확신이 증명에 대한 필요성을 자극할 수 있음을 고려할 때, 기하교육에서 탐구형 소프트웨어의 활용을 통한 이론에 대한 새로운 접근은 긍정적이라 할 수 있다.

앞장에서 논의된 것처럼, 탐구활동을 통한 새로운 접근은 기하학적 이론의 배열, 증명과정 그리고 증명된 사실을 적용하기 위한 문제의 설정 등에 영향을 준다. 이러한 영향은 탐구형 소프트웨어를 활용하려는 기하교육의 학습내용과 전반적인 조직을 위해 가장 먼저 고려되어야 할 사항이다.

기하학습에서 중요시되는 기하학적이론은 먼저, 교수학습목표와 관련된 이론들을 모으고, 그것을 동적인 환경에서의 탐구활동을 고려하여 재서술한 후, 학생들의 학습수준과 학습정도를 고려하여 이론을 선정하고, 그것을 Cuoco et al.(1998)이 제시한 탐구활동 '절차(Procedure)'의 변화와 교수학습목표를 고려하여 배열함으로서, 교수학습목표에 일관된 구성체계를 갖춤과 동시에 학생들에게 탐구활동의 의미를 부여할 수 있도록 구성되어야 할 것이다. 기하학적이론이나 개념 등의 학습내용을 선정할 때, 동적인 환경에서의 탐구활동에 대한 고려는 중요하다. 예를 들어, 사각형 단원 내에서 사각형의 개념을 제시하고 이를 탐구하는 내용을 전개할 경우, 스크린 상의 사각형에 어떠한 제한을 줄 것인지를 결정해야 할 것이다. 학생들은 스크린 위의 임의의 사각형을 직접 조작하면서 그들의 학습수준이나 학습목표를 벗어

난 오목사각형이나 변이 교차된 모양을 접할 수도 있다. 그러므로, 탐구형 소프트웨어 활용의 영향을 구체적인 기하학습내용에 반영하기 위해서는 동적 환경을 고려한 학습내용의 적절한 교수학적 변환(didactical transposition)에 대한 보다 신중한 연구가 선행되어야 할 것이다. 또한 기하학습내용과 관련된 문제의 설정 시에는 동적인 환경을 고려해야만 한다. 특히 작도가 중요시되는 동적 환경에서는 작도문제의 설정 의도와 형태에 대한 보다 신중한 고려가 요구된다. 이러한 기하학습내용의 전반적인 구성 방안을 그림으로 나타내면 <그림 10>과 같다.

그리고 Galindo(1998)와 Yerushalmy(1998)의 컴퓨터를 이용한 수업의 제안에서 살펴본 것처럼 탐구형 소프트웨어는 귀납적 추론과 연역적 추론의 연결을 위한 도구가 될 수 있으므로 이러한 잠재성을 활용할 수 있는 내용구성이 필요하다고 할 수 있다. 이러한 내용구성은 Chazan(1998)의 논의에 제시된 용어로 다음과 같이 표현될 수 있다. 그는 탐구형 소프트웨어를 사용하여 논의를 이끌며 수업하는 교사들이 학생들이 탐구 작업에 대해 논의하기 위한 언어를 갖도록 하기 위해, 아직 경험적으로 시험되지 않은 아이디어를 '가설', 특별한 경우에 대한 결론적인 서술을 '관찰', 경험적 시험을 거쳤지만 연역적으로 증명이 되지 않은 일반적인 아이디어를 '추측', 연역적으로 증명되어진 것을 '이론'이라는 용어로 구별하였다고 제시하고 있다. 그러므로, 기하학습내용의 전개는 학습할 기하학적 사실이 탐구활동이 가능한 내용으로 재서술되어 제시되고, 이를 통해 가설이 세워지고, 여러 예들을 탐구형 소프트웨어를 활용하여 시험하면서 관찰이 추측이 되도록 한 후, 서로의 추측에 대한 논의의 과정 중에 연역의 필요성이 자연스럽게 유발되도록 하여 궁극적으로 이론에 이를 수 있는 전개가 필요하다고 할 수 있다.

IV. 모형단원

이 장에서는 제 3장에서 논한 기하학습내용의 구성방향을 바탕으로 교과서의 재구성 측면에서 탐구형 소프트웨어의 활용을 고려한 모형단원을 제시해보고자 한다.

제 3장에서 살펴본 바와 같이 탐구형 소프트웨어는 기하영역의 변환기하학적 접근을 보조하는 도구라고 할 수 있다. NCTM에서 제시한 <학교수학의 교육과정과 평가의 규준>(1989)에서 5 - 8학년의 학생들은 다양한 상황 내에서 1, 2, 3차원의 기하를 다룸으로서, 기하학적 도형의 변환을 탐구할 수 있어야 한다고 주장하고 있다. 우정호(1998)는 현재와 같은 기하학습에서 변환기하학적 접근으로 전개 가능한 내용은 변환, 대칭이동, 평행이동, 회전이동, 합동, 닮음, 변환을 이용한 도형의 성질 증명, 일차변환의 행렬표현, 변환군 등이라고 주장하고 있다.

본 연구에서 제시하는 모형단원은 우리 나라의 제 6차와 7차 교육과정에 제시된 기하학습 내용과 변환과 관련하여 다른 나라 교육과정에 제시된 목표를 고려하여, 변환적 접근을 바탕으로 중학교 1학년 수준에서 도형의 이동과 합동-평행이동, 회전이동, 대칭이동, 도형의 합동-에 관련된 내용을 다룬다. 그리고, 도형의 합동과 이동에 관련한 구체적인 학습내용은 우리 나라의 제 6차와 7차 교육과정에 제시된 변환과 관련한 내용과 더불어 <Proceedings of the national conference on inquiry-based geometry throughout the secondary curriculum>(1998)에 제시된 탐구형 소프트웨어를 활용한 Shouts의 '변환과 합동(Transformations and congruence)', Oxford University Press에서 출판한 중학교 수학교과서인 Oxford Mathematics(1995), Western Canadian Protocol/Alberta Program of Studies (Jnue, 1996)에 제시된 학생들의 기대수준을 설명하는 예제와 탐구형 소프트웨어와 변환에 관련한 인터넷 자료들(http://www.ucs.mun. ca/ ~mathed/ Geometry, http://www.tessellations.com 등)을 참조하였다.

이러한 자료와 3장에서 논의된 기하학습내용 구성의 방안을 토대로, 본 연구에서 는 '도형의 이동과 합동'이라는 대단원 아래 '도형의 합동과 이동', '테셀레이션' 두 단원을 중단원으로 구성하고 중단원 '도형의 합동과 이동'아래 평행이동, 회전이동, 좌표평면에서의 이동1, 좌표평면에서의 이동2, 도형의 합동을 소단원으로 구성하고 이들 내용을 바탕으로 한 연습문제를 다루었으며, 중단원 '테셀레이션'에서는 테셀레이션, 평행이동으로, 회전이동으로, 다양한 이동으로, 나도 한 번이라는 소단원을 구성하였다. 소단원 '나도 한 번'은 중단원 '테셀레이션'의 내용을 종합하고 확인할 수 있는 단원에서의 연습문제의 역할을 하도록 구성하였다.

그리고 각 단원에서는 교수-학습목표, 학생들의 선수지식과 작도능력, 학습내용간의 연계 등을 고려하여, 간단한 조작으로도 관찰이 가능한 작도된 형태의 탐구활동 또는 학습자 스스로의 작도를 통해 특성화되어질 수 있는 형태의 탐구활동을 제시한다. 또한 학습내용의 응용부분에서는 되도록 실생활과 밀접한 상황 내에서 실험적 접근이 가능하도록 '가설'을 설정하고, 질문을 통해 학습목표와 관련된 내용의 '관찰'을 유도하고 다양한 예의 관찰을 통해 '가설'과 관련된 기하학적 사실에 대한 '추측'에 이르도록 하여 이에 대한 논의가 연역에 이르도록 단원을 전개하여 나간다. 또한 단원에 따라, 탐구형 소프트웨어를 통해 기하학적 내용들을 탐구활동을 하는 학생들의 자연스러운 아이디어의 발생과 조화를 이루면서 내용을 심화시킬 수 있도록 '만약……?'이라는 문구를 삽입하여 '가설'의 조건을 바꾸거나 유사한 상황을 설정해 나간다.

V. 결론

본 연구는 교육과정과 관련하여 탐구형 소프트웨어의 특성과 활용이 기하학습내용과 구성에 미치는 영향을 기하교육에 반영하기 위한 기초 연구로, 관련자료와 연구를 분석 고찰하여 기하학습내용을 구성하기 위한 일반적인 방법을 모색하고 그에 따른 모형단원을 제시해보고자 하였다.

먼저, 탐구형 소프트웨어의 활용을 통해 교육과정과 관련하여 효과적으로 다루어질 수 있는 기하학습내용에 대한 시사점을 얻기 위하여 교육과정 내에서의 활용과 교육과정 외에서의 활용으로 나누어 분석하였다. 그리고, 전통적인 기하교육과정의 주된 학습내용인 기하학적 이론과 동적 환경에서 중요시되는 작도를 중심으로 기하학습내용과 구성에서의 변화를 고찰하였다. 작도에 관한 연구는 동적인 환경에서 작도의 역할과 의미, 문제해결 전략의 변화에 따른 작도문제의 변화, 새로운 작도문제의 형태에 관한 연구를 고찰하였다.

이를 통해 기하학습내용구성의 기본 방향을 모색하였다. 먼저, 관련 자료의 학습내용의 분석을 통해, 탐구형 소프트웨어의 활용으로 교수-학습이 가능한 기하학습내용에 대한 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

① 제 6차 기하교육과정의 내용 대부분을 탐구형 소프트웨어를 활용하여 다룰 수 있다(설정된 교수 · 학습 목표와 관련하여 학습내용의

도입방법이나 접근방법 등이 지필 환경에서와는 다를 수 있다.)

② 수학의 내·외적 연결성을 강화하는 내용들이 다루어 질 수 있다.

③ 기하교육과정 전반에 걸쳐 다양한 작도와 작도문제가 다루어질 수 있다.

④ 기하영역 가운데 변환기하학적 접근이 강조될 수 있다.

기하학습내용에 관련한 본 연구는 탐구형 소프트웨어를 활용하는 자료와 국내·외 교육과정의 단원을 비교 분석하여 그것에 대한 시사점을 제시한 것으로, 구체적인 학습내용에 대한 보다 신중한 연구가 필요할 것이다.

본 연구에서는 동적인 환경에서 기하학적 이론의 탐구활동과 기하학습내용구성에 관한 연구의 고찰을 통해, 탐구활동을 통한 학생들의 사고의 발생과 전통적인 교육과정과의 조화로운 구성의 필요성을 제시하였다. Cuoco et al.(1998)에 의하면, 일반적인 의미에서 기하학적 탐구활동이란 함수를 적용할 그림을 선택하는 방법과 더불어 도형공간에서 정의되는 함수로 이해될 수 있다. 이러한 함수는 동적인 환경에서 어떤 움직일 수 있는 대상의 위치에 따라 나타나는 자취에 의존하므로 변화요인과 관찰대상을 분명히 하여 정리를 재서술할 것을 요구한다. Goldenberg et al.(1998)에 의하면 이러한 재서술 활동은 탐구형 소프트웨어를 활용한 탐구활동의 바탕이 될 수 있고, 이를 통해 새로운 추론을 할 수 있으며, 고립된 사실을 수학적 아이디어의 총체로 이끌 수도 있다. 그러므로 기하학적 정리의 재서술을 통한 탐구활동은 기하학적 정리와 관련된 전후의 전반적인 학습내용을 고려하여 학생들에게 제시되어야할 필요성이 있을 뿐만 아니라, 새로운 추론 활동이 학생들의 학습수준을 벗어나지 않는 범위 내에서 교수학습목표와 관련하여 일관성 있게 전개될 수 있도록 기하학습내용을 구성해야할 필요가 있다.

그리고, 동적인 환경에서의 작도는 주어진 문제에 대한 시각적인 도움뿐만 아니라 분석과 연역적 증명에 대한 기초와 학생들의 창조성을 수학에 응용할 수 있는 기회를 제공하여 문제해결 도구로 인식될 수 있고, 교사에게 기하교육과정 전반에 걸쳐 작도를 통한 동적인 탐구로 해결 가능하거나 해결의 실마리를 찾을 수 있는 또는 해를 추측할 수 있는 문제를 제기할 기회를 제공할 수 있으므로, 작도는 단순한 '복사'수준에서 벗어나 기하의 전반적인 영역에 걸쳐 좀 더 복잡한 문제 내에서 다루어질 수 있다. 또한 작도문제는 동적인 환경에서의 해결전략이 지필 환경에서와는 다를 수 있음을 고려하여 문제설정 목표와 적절한 형태를 결정하여 제시할 필요가 있다. 또한, 이러한 고려하에 동적 환경에서 다루어 질 수 있는 새로운 문제에 대한 연구가 계속되어야 할 것이다. 문제란 단순한 평가의 수단이 아닌 수학학습의 또 다른 측면으로, 이미 지필 환경에서 다루어 질 수 있는 좋은 문제는 많이 축적되어 있는 반면, 동적 환경을 고려한 문제는 부족하다. 지필에서 다루어지던 구체적인 문제들의 해결전략이 동적 환경에서 어떻게 변화될 수 있으며, 이로 인해 문제설정의 목표와 형태 등은 어떻게 달라지는지에 대한 보다 신중한 연구뿐만 아니라, 작도를 통한 동적인 탐구로 해결 가능하거나 해결의 실마리를 찾을 수 있는 또는 해를 추측할 수 있는 창의적인 문제와 새로운 문제 형태 등에 관한 연구가 필요할 것이다.

참고문헌

박상호, 윤삼열(1999). 고등학교 수학에서의

GSP 활용. 수학사랑.

신양재, 심광보, 이재훈(1999). GSP를 활용한 열린 기하 수업에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육논문집 제 8집, pp303-315.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

전영국, 주미(1998). 기하문제 해결에서의 GSP를 활용한 탐구학습의 신장. 대한수학교육학 연구발표대회논문집, pp413-428.

Oxford Mathematics(중학교 수학 교과서, 1995): Oxford University Press.

Balacheff, N. (1993). Artificial intelligence and real teaching. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 131-157). Berlin; Springer Verlag.

Bennett, D. (1996). *Exploring geometry with The Geometer' Sketchpad.* Key Curriculum Press.

Bennett, D. S. & Finzer, W. F. (1995, May). From drawing to construction with the Geometer's Sketchpad. *The Mathematics Teacher,* 428-431.

Chazan, D. (1993). High school geometry students's justifications for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359-387.

Couco, A. A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space.* London: Lawrence Erlbaum Associa- tes, Inc.

Elliot, R. L., & Knuth, E. J. (1998, November). Characterizing students' understanding of mathematical proof. *The Mathematics Teacher*, 714-717.

Embse, C. V. & Engebresten, A. (1997). *Explorations for the mathematics classroom using cabri geometry II*. Texas instruments.

Finzer, W. & Jackiw, N. (1998). Dynamic manipulation of mathematical objects. http://www.keypress.com/sketchpad.

Galindo, E. (1998, January). Assessing justification and proof in geometry classes taught dynamic software. *The Mathematics Teacher,* 76-82.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry?. *International Journal of Computer for Mathematical Learning,* 169-187.

Jackiw, N. (1995). The geometer's sketchpad (Computer software). Berkeley, Calif.: Key Curriculum Press.

King, J. R.(1996). *Geometry through the circle with the geometer's sketchpad.* Key Curriculum Press.

Koedinger, K. R. (1998). Conjecturing and argumentation in high-school geometry students. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space.* London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Laborde, C. (1993). The computers as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers:*

Mathematics education and technology(pp. 48-67). Berlin; Springer Verlag.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Va.: Author.

Olive, J.(1998). Opportunities to explore and integrate mathematics with the Geometer's Sketchpad. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. London: Lawrence Erlbaum Associa- tes, Inc.

Parzysz, B. (1988). 'Knowing' vs. 'seeing': Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics.*

Shouts, J. K. (1998). Transformations and congruence: An inquiry based unit. *Proceedings of the national conference on inquiry-based geometry throughout the secondary curriculum*. Northfield, Minnesota: St. Olaf College.

Texas Instruments. (1994). Cabri Geometry II (Computer software). Dallas, Tex.: Texas Instruments.

The Ministry of Education(1996). *Mathematics in the New Zealand Curriculum.* Learning Media Limited, Box3293, Wellington, New Zealand.

Villers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Wyatt, K. W., Lawence, A., & Foletta, G. M.(1998). *Geometry Activities for the Middle School Students*. Key Curriculum Press.

참고 웹사이트

http://www.edu.geo.on.ca: The Ontario Curriculum Grades 1-8(1997)

http://www.tessellations.com/Learning.html

http://www.math.csusb.edu

http://www.geom.umn.edu/education/math5337

http://math.rice.edu/~lanius

http://www.ucs.mun.ca

http://www.worldofescher.com/contest

Construction of Geometric Learning Contents Using the Experimental Computer Software

Hee-chan Lew(Korea National University of Education)

Gong-ju Yu (Daejun Girl's Junior High School)

Min-sick Cho(Korea National University of Education)

The experimental software such as Cabri II, The Geometer's Sketchpad, etc. provides

dynamic environment which construct and explore geometric objects interactively and inductively. It has the effects on mathematics itself differently from other technologies that are used in instruction.

What is its characteristics? What are the educational implication of it for the learning of geometry? How is mental reasoning of geometric problems changed by transformation of the means of representation and the environment to manipulate them?

In this study, we answer these questions through the review of the related literatures and the analysis of textbooks, teaching materials using it and curricular materials. Also, we identify implications about how the criteria for choosing geometic content and the ways of constructing context, for orchestrating the students' exploration with the secondary geometry curriculum, can be changed.