

## 비점성 정체 유동 응고 문제에 대한 이론적 해석

### A theoretical analysis on the inviscid stagnation-flow solidification problem

유 주 식\*  
J.-S. Yoo

**Key words:** Inviscid stagnation flow(비점성 정체 유동), Phase change(상변화), Solidification(응고)  
Growth rate of solid(고체의 성장 속도), Heat transfer(열전달)

#### ABSTRACT

This study investigates the problem of phase change from liquid to solid in the inviscid stagnation flow. The solution of dimensionless governing equations is determined by the three dimensionless parameters of (temperature ratio/conductivity ratio), Stefan number, and diffusivity ratio. The solution at the initial stage of freezing is obtained by expanding it in powers of time, and the final equilibrium state is determined from the steady-state governing equations. The equilibrium state is dependent on (temperature ratio/conductivity ratio), but is independent of Stefan number and diffusivity ratio. The effect of fluid flow on the pure conduction problem can be clearly seen from the solution of the initial stage and the final equilibrium state, and the characteristics of the solidification process for all the dimensionless parameters are elucidated.

#### 기 호 설 명

$A$  : 포텐셜 흐름 변형률(potential flow strain rate)  
 $C_S$  : 고체의 비열  
 $erf(x)$  : 에러 함수(error function)  
 $erfc(x)$  : 보충 에러 함수(complementary error function),  $1 - erf(x)$   
 $K$  : 열전도도  
 $K_R$  : 고체와 액체의 열전도도 비,  $\frac{K_S}{K_L}$   
 $L$  : 잠열

$\text{Log}(x)$ :  $\text{Log}_{10}(x)$   
 $Q_L(t)$  : 고체-액체 경계면의 액체 쪽에서의 열유속,  $-K_L[\partial T_L(y, t)/\partial y]$  at  $y = X(t)$   
 $Q_{steady}$  : 정상 상태의 열유속,  $Q_L(t) = Q_{steady}$  at  $t \rightarrow \infty$   
 $Ste$  : Stefan 수,  $\frac{C_S(T_F - T_C)}{L}$   
 $T$  : 온도  
 $T_C$  : 기판의 온도  
 $T_H$  : 유체의 초기 온도,  
 $T_F$  : 응고 온도  
 $t$  : 시간

\* 안동대학교, 기계공학 교육과

$X(t)$  : 고체의 성장 길이  
 $y$  : 수직 방향의 좌표

### 그리스 문자

$\alpha$  : 열 확산 계수  
 $\alpha_R$  : 고체와 액체의 열 확산 계수비,  $\alpha_S/\alpha_L$   
 $\delta(\tau)$  : 무차원화된 고체의 두께  
 $\delta_{eq}$  : 평형 상태에서의 무차원 고체 두께  
 $\zeta$  : 무차원 좌표,  $\sqrt{A/\alpha_L} y$   
 $\eta$  : 치환된 변수,  $\zeta/\delta(\tau)$   
 $\theta_L$  : 액체 영역에서의 무차원 온도,  
 $(T_L - T_H)/(T_F - T_H)$   
 $\theta_S$  : 고체 영역에서의 무차원 온도,  
 $(T_S - T_C)/(T_F - T_C)$   
 $\theta_R$  : 온도 비,  $(T_H - T_F)/(T_F - T_C)$   
 $\rho$  : 밀도  
 $\sigma$  : Neumann 문제에서의 고체의 성장계수  
 $\tau$  : 무차원화된 시간,  $At$

### 하첨자

$L$  : 액체  
 $S$  : 고체  
 $\infty$  : 무한대

## 1. 서 론

액체와 고체 사이에서 일어나는 응고 혹은 용해 등의 상변화 현상은, 금속의 주조, 음식의 냉동, 얼음의 생성, 열에너지 저장 시스템 등과 같은 넓은 산업적인 응용 분야로 인해 많은 관심을 받아왔다. 이 분야에 대한 첫 연구는 Stefan에 의해 수행된 극지의 얼음 두께에 대한 연구이며, 이러한 이유로 인하여 액체의 응고 문제는 종종 "Stefan 문제"로 불리어지기도 한다.<sup>(1)</sup> 그 이후 많은 연구가 수행되었는데, 초기의 연구는 액체의 유동을 전혀 고려하지 않고 주로 정지해 있는 액체와 고체에 사이의 순수한 전도에 의한 열전

달만을 고려하여 온도 분포와 응고 혹은 용해 과정을 조사하였다.<sup>(2)</sup> 그 이후 액체 내에서 유체의 흐름, 즉, 강제대류<sup>(3,4)</sup> 혹은 자연대류<sup>(5,6)</sup>가 있는 경우의 상변화 문제에 대한 연구도 역시 많이 수행되어 왔다.

강제대류가 있을 때의 상변화에 대한 거의 대부분의 연구들은, 고체와 액체의 경계면에서의 액체 쪽의 대류 열전달률을 주어진 일정한 값으로 놓고서 고체에서의 온도 분포와 경계면의 위치를 결정하였다.<sup>(3,4)</sup> 즉, 액체에서의 온도분포의 시간적인 변화는 전혀 고려하지 않았다. 그러나 응고 과정과 액체에서의 온도 분포는 서로 영향을 받을 수가 있지만 액체 영역에서의 비정상 온도 분포를 고려한 연구<sup>(7-9)</sup>는 아주 적다. 비교적 근래에 Yoo<sup>(7)</sup>는 고체와 액체에서의 온도분포의 시간적인 변화를 모두 고려하여 무한히 큰 평면 원반의 회전에 의해 일어나는 유동장 하에서의 유체의 상변화 문제를 연구하였다. Yoo<sup>(7)</sup>의 연구는, 강제 대류 하에서의 상변화 문제에 있어서 고체와 액체의 비정상 거동을 모두 고려한 최초의 연구라는 데에 큰 의미를 갖고 있다. Yoo<sup>(7)</sup>는 특히 고체의 회전( $\Omega$ )이 유체의 응고에 미치는 영향에 대해 큰 관심을 두었는데, 원반의 회전은 고체의 성장을 강하게 억제한다는 것을 보였다. 그리고 최근 Yoo<sup>(8)</sup>는 회전 원반 시스템에서의 열전달 현상<sup>(10-13)</sup>에 관심을 두고서, 응고가 일어나고 있는 경우에 있어서의 고체표면과 고체-액체 경계면의 열전달 특성을 조사하였다.

강제적인 유체 유동 하에서 운동하고 있는 액체의 응고와 관련된 또 하나의 중요한 문제는 금속입자의 분무과정에서 일어나는 응고 현상이다. 높은 온도의 액체 금속방울을 응고온도보다 낮은 온도로 유지되고 있는 차가운 기판(cold substrate)에 분사시키면 액체 방울이 변형되면서 기판의 표면에서 액체 금속의 응고가 일어난다. 이와 같은 액체 방울의 변형과정 동안의 상변화 매커니즘(phase-change mechanism)을 연구하는 하나의 방법은, Stefan 모델의 Neumann 해를 이용하여 액체와 고체의 경계면의 위치를 결정하는 방법이 있다.<sup>(14,15)</sup> 그런데 이 접근방법의 가장 큰 결점은, 액체의 운동이 응고과정에 미치는 영향이 전혀 고려되지 않는다는 것이다. 최근에 Rangel and Bian<sup>(16,17)</sup>은 비점성 정체 유동(inviscid stagnation flow)에 대한 응고 모델을 만들어서 액체

의 운동이 응고 거동에 미치는 영향에 대해 조사하였다. 또한 Bian and Rangel<sup>(18)</sup>은 점성 정체 유동(viscous stagnation flow)에 대한 응고 과정을 조사하여 유체 유동이 있는 경우의 응고에서는 Neumann 해와 달리 응고면의 위치의 점근적인 한계(asymptotic limit)가 있다는 것을 보였다. 이들 모델들은, 분무 용착(spray deposition)에서 유체의 흐름이 액적의 응고에 미치는 영향을 보여준다는 데에 의미가 있다. 그리고 최근 Yoo<sup>(19)</sup>는 평면 점성 정체 유동 문제를 이론적으로 해석하였다.

회전 원반 시스템이나 정체 유동 시스템의 두 경우 모두에 있어서 응고가 진행되고 있는 고체-액체 경계면을 향하는 강제적인 유체의 흐름이 있다. 따라서 두 경우는 지배 방정식이나 물리적인 현상에서 서로 비슷한 특성을 많이 보여준다.

본 연구에서는 비점성 정체 유동에서의 응고 현상을 조사한다. 일정 온도  $T_C (< T_F)$ 로 유지되고 있는 차가운 기판을 향하여 유체가 흘러간다. 초기상태에 있어서 유체의 온도는  $T_H$ 로 일정하게 유지되고 있으며  $T_H$ 는 유체의 응고온도  $T_F$ 보다 높다. 따뜻한 유체가 차가운 기판을 향해 흐르게 되면 자연스럽게 고체와 액체의 경계면에서 액체의 응고가 일어나게 된다. 유체의 흐름이 없으면 이 문제는 잘 알려진 Neumann의 해를 갖는 Stefan 문제가 된다. 최근 Rangel and Bian<sup>(16,17)</sup>은 수치적인 방법<sup>(16)</sup>과 instantaneous similarity 방법 및 준정상 상태 근사<sup>(17)</sup>를 통하여 이 문제를 연구하였다. 그들은 긴 시간 동안 지배 방정식을 수치적으로 적분하여 응고 면의 위치가 점근적인 한계값으로 접근함을 보였다.

본 연구에서는 응고 과정의 초기 단계와 최종

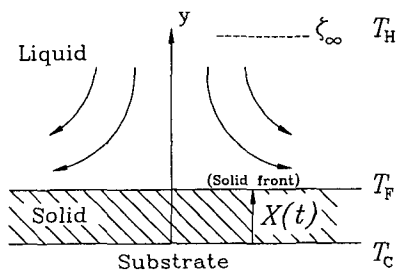


Fig. 1 Stagnation flow ahead of a solidifying interface.

단계에 대한 해석적인 해를 구하여 유체의 유동이 응고 현상에 미치는 영향에 대해 조사한다. 응고의 초기 단계인  $\tau \ll 1$ 에서는 해를 시간에 대한 급수로 전개하여 구하고, 최종 평형상태는 정상상태의 지배 방정식으로부터 결정한다. 본 연구에서 구한 초기 단계의 온도분포와 고체의 두께에 대한 표현식은 유체 흐름이 없는 Neumann의 해와 유체 유동에 의해 생성된 항을 분리하여 나타낸다. 따라서 이 해들로부터 유체 유동이 Neumann의 순수한 전도 문제에 미치는 영향을 분명하게 알 수 있다.

본 문제에서 나타나는 중요한 물리량은 고체의 성장 속도와 고체면에서의 열전달률 및 고체-액체 경계면의 액체 쪽에서의 열전달률이다. 지배 방정식을 무차원화시키면  $Ste, \theta_R, \alpha_R, K_R$ 의 4개의 무차원 변수가 나타난다. 그러나 방정식의 해는 3개의 변수  $\theta_R/K_R, Ste, \alpha_R$ 에 의해 결정됨을 보이고 이들 변수들에 대한 응고 현상의 특성을 조사한다.

## 2. 해 석

### 2.1 지배 방정식

고려하고 있는 문제의 물리적인 구조는 Fig. 1과 같다. 일정한 온도  $T_C$ 로 유지되고 있는 있는 차가운 기판을 향하여 따뜻한 유체가 흘러간다. 초기상태에 있어서 유체의 온도는  $T_H$ 로 일정하게 유지되고 있으며  $T_H$ 는 유체의 응고온도  $T_F$ 보다 높다. 그리고 기판의 온도  $T_C$ 는 응고온도  $T_F$ 보다 낮다. 기판의 온도가 유체의 응고온도보다 낮으면 고체-액체 경계면에서 응고가 일어나게 되고 고체층의 두께는 점점 커지게 된다. 지배 방정식과 경계조건은 다음과 같다.<sup>(7,17)</sup>

$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = \alpha_S \frac{\partial^2 T_S}{\partial y^2} \quad \text{at } 0 < y < X(t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_L}{\partial t} - 2A[y - X(t)] \frac{\partial T_L}{\partial y} = \alpha_L \frac{\partial^2 T_L}{\partial y^2} \quad \text{at } y > X(t) \quad (2)$$

$$K_S \frac{\partial T_S}{\partial y} - K_L \frac{\partial T_L}{\partial y} = \rho L \frac{dX}{dt} \quad (3)$$

at  $y > X(t)$

$$\begin{aligned} T_S &= T_C & \text{at } y=0 \\ T_S &= T_L = T_F & \text{at } y=X(t) \\ T_L &= T_H & \text{at } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4)$$

응고가 일어나기 바로 직전의 액체의 온도는 균일하며  $T_H$ 와 같다. 고체와 액체의 경계면의 액체 쪽에서의 열유속  $Q_L$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$Q_L(t) = -K_L \left[ \frac{\partial T_L(y, t)}{\partial y} \right] \quad \text{at } y=X(t) \quad (5)$$

정상 상태, 즉  $t \rightarrow \infty$ 에서는  $Q_L(\infty) = Q_{steady}$ 이다.

다음과 같은 무차원 변수를 도입하면

$$\begin{aligned} \theta_S &= \frac{T_S - T_C}{T_F - T_C}, \quad \theta_L = \frac{T_L - T_H}{T_F - T_H}, \quad \tau = At \\ \zeta &= \sqrt{\frac{A}{\alpha_L}} y, \quad K_R = K_S/K_L, \quad \alpha_R = \alpha_S/\alpha_L \\ \theta_R &= \frac{T_H - T_F}{T_F - T_C}, \quad Ste = \frac{C_S(T_F - T_C)}{L} \end{aligned} \quad (6)$$

식(1)-(4)는 다음과 같이 변환된다.

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \tau} = \alpha_R \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \zeta^2} \quad \text{at } 0 < \zeta < \delta \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial \tau} - 2(\zeta - \delta) \frac{\partial \theta_L}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \zeta^2} \quad \text{at } \zeta > \delta \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \zeta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{\partial \theta_L}{\partial \zeta} = \frac{1}{\alpha_R Ste} \frac{d\delta}{d\tau} \quad \text{at } \zeta = \delta \quad (9)$$

$$\theta_S = 0 \quad \text{at } \zeta = 0$$

$$\theta_S = \theta_L = 1 \quad \text{at } \zeta = \delta(\tau) \quad (10)$$

$$\theta_L = 0 \quad \text{at } \zeta \rightarrow \infty$$

여기에서

$$\delta(\tau) = \sqrt{\frac{A}{\alpha_L}} X(t) \quad (11)$$

는 무차원화된 응고층의 두께를 나타낸다.

무차원화된 지배 방정식 (7)-(10)에서  $\theta_R/K_R$ 이 하나의 변수로 표현된다는 것에 주의할 필요가 있다. 이것은 열전달이 Fourier의 열전도법칙에 의해 일어나기 때문이다. Rangel and Bian<sup>(16,17)</sup>과 Bian and Rangel<sup>(18)</sup>은 온도비  $\theta_R$ 과 열전도계수의 비  $K_R$ 을 독립된 변수로 취급하였는데 그렇게 할 필요가 없음을 말해 준다. 반면 Yoo<sup>(7)</sup>는 이 두 변수들을 단일 변수  $\theta_R/K_R$ 로 표현하여 조사하였다.

다음과 같은 좌표 변환을 하여 움직이는 경계면의 위치  $\zeta = \delta(\tau)$ 를  $\eta = 1$ 에 고정시킨다.

$$\eta = \frac{\zeta}{\delta(\tau)} \quad (12)$$

식 (7)-(10)은 다음과 같이 변환된다 :

$$\delta^2 \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \tau^2} - \frac{\eta}{2} \frac{d\delta^2}{d\tau} \frac{\partial \theta_S}{\partial \eta} = \alpha_R \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \eta^2} \quad (13)$$

at  $0 < \eta < 1$

$$\delta^2 \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \tau^2} - \frac{\eta}{2} \frac{d\delta^2}{d\tau} \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} \quad (14)$$

$$-2(\eta - 1) \delta^2 \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \eta^2} \quad \text{at } \eta > 1$$

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \eta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} = \frac{1}{2\alpha_R Ste} \frac{d\delta^2}{d\tau} \quad (15)$$

at  $\eta > 1$

$$\theta_S = 0 \quad \text{at } \eta = 0$$

$$\theta_S = \theta_L = 1 \quad \text{at } \eta = \delta(\tau) \quad (16)$$

$$\theta_L = 0 \quad \text{at } \eta \rightarrow \infty$$

변환된 좌표계에서 열유속은 다음과 같이 표현된다 :

$$\frac{Q_L(A\tau)}{Q_{steady}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\delta} \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} \quad \text{at } \eta=1 \quad (17)$$

## 2.2 응고의 초기단계

응고의 초기단계( $\tau \ll 1$ )에서는  $\theta_S(\tau, \eta)$ ,  $\theta_L(\tau, \eta)$  과  $\delta(\tau)$ 를 다음과 같이 전개할 수 있다.<sup>(7,19)</sup>

$$\theta_S(\tau, \eta) = \theta_S^0(\eta) + \theta_S^1(\eta)\tau + \dots \quad (18)$$

$$\theta_L(\tau, \eta) = \theta_L^0(\eta) + \theta_L^1(\eta)\tau + \dots \quad (19)$$

$$\delta^2(\tau) = b_0\tau + b_1\tau^2 + \dots \quad (20)$$

식(18)-(20)을 식(13)-(16)에 대입하면 다음과 같은  $O(\tau^0)$ 에 대한 방정식과 경계조건이 구해진다.

$$\frac{d^2\theta_S^0}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2a_R}\eta \frac{d\theta_S^0}{d\eta} = 0 \quad \text{at } 0 < \eta < 1 \quad (21)$$

$$\frac{d^2\theta_L^0}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2}\eta \frac{d\theta_L^0}{d\eta} = 0 \quad \text{at } \eta > 1 \quad (22)$$

$$\frac{d\theta_S^0}{d\eta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{d\theta_L^0}{d\eta} = \frac{b_0}{2a_R Ste} \quad \text{at } \eta=1 \quad (23)$$

$$\theta_S^0(0) = 0, \quad \theta_S^0(1) = \theta_L^0(1) = 1, \quad \theta_L^0(\infty) = 0 \quad (24)$$

그리고  $O(\tau)$ 에 대한 방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_S^1}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2a_R}\eta \frac{d\theta_S^1}{d\eta} - \frac{b_0}{a_R}\theta_S^1 \\ = -\frac{b_1}{a_R}\eta \frac{d\theta_S^0}{d\eta} \quad \text{at } 0 < \eta < 1 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_L^1}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2}\eta \frac{d\theta_L^1}{d\eta} - b_0\theta_L^1 \\ = -[2(\eta-1)b_0 + b_1\eta] \frac{d\theta_L^0}{d\eta} \quad \text{at } \eta > 1 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{d\theta_S^1}{d\eta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{d\theta_L^1}{d\eta} = \frac{b_1}{a_R Ste} \quad \text{at } \eta=1 \quad (27)$$

$$\theta_S^1(0) = \theta_S^1(1) = \theta_L^1(1) = \theta_L^1(\infty) = 0 \quad (28)$$

식(21)-(24)의  $O(\tau^0)$ 의 식에 대한 해는 잘 알려진 Neumann 해이다.<sup>(1)</sup>

$$\theta_S^0(\eta) = \frac{\text{erf}(\sigma\eta)}{\text{erf}(\sigma)} \quad (29)$$

$$\theta_L^0(\eta) = \frac{\text{erfc}(\sigma\sqrt{a_R}\eta)}{\text{erfc}(\sigma\sqrt{a_R})} \quad (30)$$

$$\frac{\exp(-\sigma^2)}{\text{erf}(\sigma)} - \frac{\theta_R\sqrt{a_R}\exp(-\sigma^2 a_R)}{K_R \text{erfc}(\sigma\sqrt{a_R})} = \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{Ste} \quad (31)$$

$$b_0 = 4\sigma^2 a_R \quad (32)$$

식(25)-(28)의  $O(\tau)$ 의 식에 대한 해는 다음과 같은 Homogeneous solution을 이용하여 구한다.

$$u_S(\eta) = \eta^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \quad (33)$$

$$u_L(\eta) = \eta^2 + \frac{1}{2\sigma^2 a_R} \quad (34)$$

해는 다음과 같다 :

$$\theta_S^1(\eta) = -u_S(\eta) \quad (35)$$

$$\int_{\eta}^1 \frac{b_1 C_1 \left( \frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2} + C_5 \right)}{\exp(\sigma^2 \eta^2) u_S^2(\eta)} d\eta$$

$$\theta_L^1(\eta) = u_L(\eta) \quad (36)$$

$$\int_1^{\eta} \frac{C_3 f(\eta) + b_1 C_2 \left( \frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2 a_R} \right) + C_4}{\exp(\sigma^2 a_R \eta^2) u_L^2(\eta)} d\eta$$

여기에서

$$C_1 = -\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi} a_R \text{erf}(\sigma)}$$

$$C_2 = \frac{2\sigma\sqrt{a_R}}{\sqrt{\pi} \text{erfc}(\sigma\sqrt{a_R})}$$

$$C_3 = \frac{16\sigma^3 a_R^{3/2}}{\sqrt{\pi} \text{erfc}(\sigma\sqrt{a_R})}$$

$$C_4 = -\frac{K_3}{K_1} C_3 - \frac{K_2}{K_1} C_2 b_1$$

$$C_5 = -\frac{G_2}{G_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{S} \frac{\theta_R}{K_R} C_3 \left( \frac{K_3}{K_1} R_1 - R_3 \right)$$

이고

$$G_1 = \int_0^1 \frac{1}{\exp(\sigma^2 \eta^2) u_S^2(\eta)} d\eta$$

$$G_2 = \int_0^1 \frac{(\frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2})}{\exp(\sigma^2 \eta^2) u_S^2(\eta)} d\eta$$

$$K_1 = \int_1^\infty g(\eta) d\eta$$

$$K_2 = \int_1^\infty g(\eta) \left( \frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2 a_R} \right) d\eta$$

$$K_3 = \int_1^\infty g(\eta) f(\eta) d\eta$$

$$R_1 = u_L(1) g(1)$$

$$R_2 = u_L(1) g(1) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sigma^2 a_R} \right)$$

$$R_3 = u_L(1) g(1) f(1)$$

$$S = \frac{C_1 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sigma^2} - \frac{G_2}{G_1} \right)}{\exp(\sigma^2) u_S(1)} + \frac{\theta_R}{K_R} C_2 \left( R_2 - \frac{K_2}{K_1} R_1 \right) - \frac{1}{a_R Ste}$$

이며 함수  $f(\eta)$ 와  $g(\eta)$ 는 다음과 같이 정의된다 :

$$f(\eta) = \frac{\eta^4}{4} - \frac{\eta^3}{3} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2 a_R} - \frac{\eta}{2\sigma^2 a_R}$$

$$g(\eta) = \frac{1}{\exp(\sigma^2 a_R \eta^2) u_L^2(\eta)}$$

### 2.3 최종 평형 상태

유체유동이 없는 순수한 전도만에 의한 응고 (Neumann 문제<sup>(1)</sup>)에 있어서는, 시간이 지남에 따라 액체 영역 내에서 온도 경계면 ( $T_L = T_H$  인 면)이 계속 전파되며 고체는  $X(t) = 2\sigma\sqrt{\alpha_S t}$  의

관계식에 따라 계속 자라나게 된다. Neumann 문제에 있어서는 온도면의 전파를 막을 물리적인 메커니즘이 없으므로 고체가 계속 자라게 되지만 본 문제에 있어서는 경계면을 향해 흐르고 있는 유체 유동이 온도 경계면의 전파를 억제하므로 시간이 지남에 따라 최종 평형 상태에 도달하게 된다. 식(7)-(10)에서  $\partial/\partial\tau = 0$ 로 하면 다음과 같은 평형 상태의 방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \zeta^2} = 0 \quad \text{at } 0 < \zeta < \delta \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \zeta^2} + 2(\zeta - \delta) \frac{\partial \theta_L}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{at } \zeta > \delta \quad (38)$$

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \zeta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{\partial \theta_L}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{at } \zeta = \delta \quad (39)$$

$$\theta_S = 0 \quad \text{at } \zeta = 0$$

$$\theta_S = \theta_L = 1 \quad \text{at } \zeta = \delta_{eq} \quad (40)$$

$$\theta_L = 0 \quad \text{at } \zeta \rightarrow \infty$$

식(37)-(40)의 해는 다음과 같다.

$$\theta_S(\zeta) = \frac{\zeta}{\delta_{eq}}$$

$$\theta_L(\zeta) = \text{erfc}(\zeta - \delta_{eq}) \quad (41)$$

$$\delta_{eq} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{K_R}{\theta_R}$$

### 3. 결과 및 논의

기판의 온도를 응고점 이하로 내리면 액체에서 고체로의 상변화가 일어나며 고체는 계속 자라나서 최종 평형 상태로 접근해 간다. 고체의 두께  $\delta(\tau)$ 는 시간에 따라 단조적으로 증가하여 최종 평형 상태에 도달하기 때문에 초기 과정과 최종 평형 상태의 해들로부터 유체 유동과 여러 가지의 변수들, ( $\theta_R/K_R$ ,  $Ste$ ,  $a_R$ )이 응고과정에 미치는 영향을 조사할 수 있다.

응고과정의 초기 단계에서의 고체층의 두께에 대한 표현식  $\delta^2(\tau) = b_0\tau + b_1\tau^2$ 에서, 첫번째 항은 Neumann의 순수한 전도 상태의 해를 나타내고,

두번째 항은 유체 유동에 의해 생성된 해를 나타낸다. 계산 결과는, 모든 경우에 있어서  $b_1$ 이 음의 값을 가짐으로써 기관을 향한 유체의 흐름은 언제나 고체의 성장을 방해한다는 것을 보여주었다. 그리고 유체 유동이 고체의 성장에 미치는 영향은 다음의 식

$$X^2(t) = 4\sigma^2 \alpha_S t [1 - |b_1/b_0|(At)] \quad (42)$$

으로부터 알 수 있다. 이 식에서  $-|b_1/b_0|(At)$ 은 유체 유동이 순수한 전도 문제에 미치는 영향력의 크기를 나타낸다.  $b_0, -b_1, -(b_1/b_0)$ 의 값들을  $\theta_R/K_R, Ste, \alpha_R$ 의 함수로써 조사하여 Figs. 2-4에 도시하였다.

먼저 Fig. 2에 온도비  $\theta_R$ 과 열전도도비  $K_R$ 에 의한 영향을 나타내었다. Fig. 2를 보면,  $\theta_R/K_R$ 이 증가하면  $b_0$ 는 감소한다는 것을 알 수 있다. 즉, 순수한 전도 상태에서 고체의 성장 속도는 느려진다. 그러나  $-(b_1/b_0)$ 는  $\theta_R/K_R$ 이 증가하

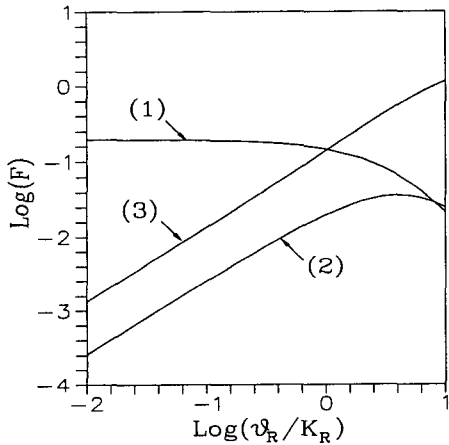


Fig. 2 Effect of temperature ratio and conductivity ratio on the growth rate of solid  $\delta^2(\tau) = b_0\tau[1 + (b_1/b_0)\tau]$  with  $\alpha_R = 1$  and  $Ste = 0.1$ . The curves (1), (2), and (3) represent the values of  $b_0, -b_1,$  and  $-b_1/b_0,$  respectively.

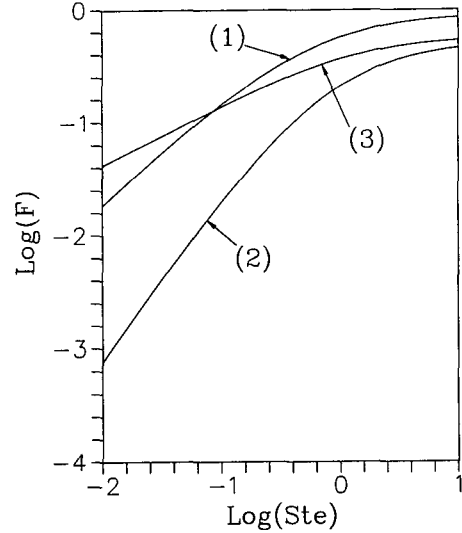


Fig. 3 Effect of  $Ste$  on the growth rate of solid  $\delta^2(\tau) = b_0\tau[1 + (b_1/b_0)\tau]$  with  $\alpha_R = \theta_R/K_R = 1$ . The curves (1), (2), and (3) represent the values of  $b_0, -b_1,$  and  $-b_1/b_0,$  respectively.

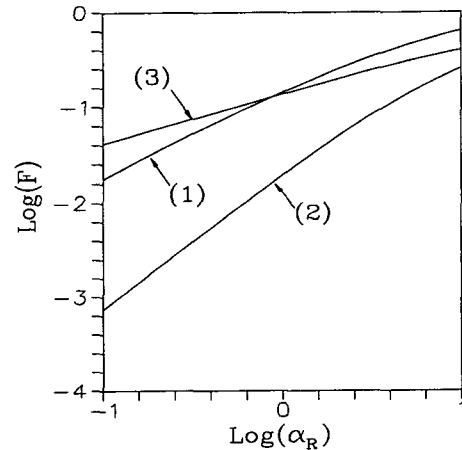


Fig. 4 Effect of diffusivity ratio on the growth rate of solid  $\delta^2(\tau) = b_0\tau[1 + (b_1/b_0)\tau]$  with  $\theta_R/K_R = 1$  and  $Ste = 0.1$ . The curves (1), (2), and (3) represent the values of  $b_0, -b_1,$  and  $-b_1/b_0,$  respectively.

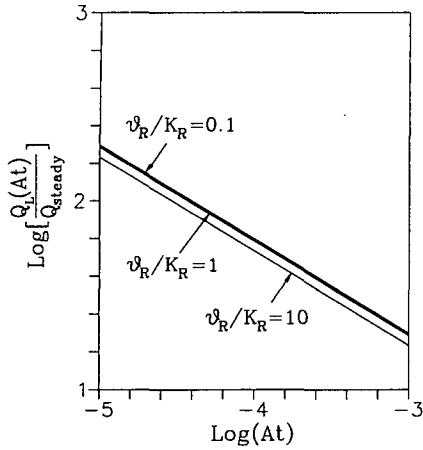


Fig. 5 Transient heat fluxes at the liquid side of solid-liquid interface( $Q_L$ ) for several values of  $\theta_R/K_R$  with  $\alpha_R=1$  and  $Ste=0.1$ .

면 같이 증가한다. 즉, 유체 유동의 영향력이 증대된다. 이것은 유체의 온도가 높아지거나 열전도도가 증가하면 응고과정은 유체 유동에 의해 그만큼 더 방해받는다라는 것을 말하고 있다. 그리고 Stefan수가 작은 경우( $Ste < 0.1$ )에 있어서는  $(b_1/b_0)$ 의 크기가  $\theta_R/K_R$ 에 거의 선형적으로 비례한다는 것을 관찰하였다.

Fig. 2에서  $-(b_1/b_0) \approx 0.133(\theta_R/K_R)$ 이다.

Fig. 3과 Fig. 4는 Stefan수와  $\alpha_R$ 이 유체의 응고 속도에 미치는 영향을 나타낸다.  $Ste$ 와  $\alpha_R$ 이 증가하면,  $b_0$ 와  $-(b_1/b_0)$ 의 값들이 모두 증가된다. 즉, 순수한 전도에 의한 응고 속도는 빨라지며, 아울러 유체유동이 미치는 영향도 함께 증대된다.

다음에는 유체 유동과 응고과정에 관련된 여러 변수들이 고체와 액체의 경계면에서의 열전달 특성에 미치는 영향을 조사해 보기로 하겠다.

먼저 Fig. 5에  $\theta_R/K_R$ 에 따른  $Q_L(\tau)/Q_{steady}$ 의 거동을 도시하였다.  $\theta_R/K_R$ 이 증가하면  $Q_L(\tau)/Q_{steady}$ 는 감소한다. 즉, 반응시간은 감소하는데 이러한 경향은 회전 원판에서의 특성<sup>(8)</sup>과 일치한다. 이것은 성장할 수 있는 고체의 최대 두께

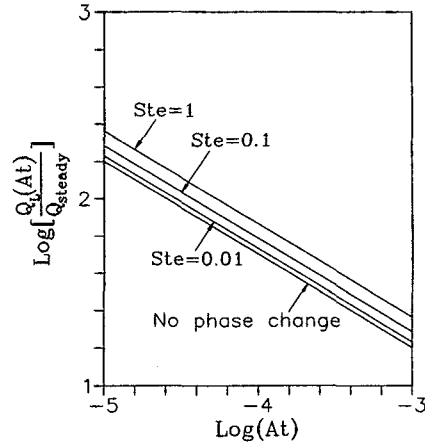


Fig. 6 Transient heat fluxes at the liquid side of solid-liquid interface( $Q_L$ ) for several Stefan numbers with  $\alpha_R=1$  and  $\theta_R/K_R=1$ , and  $Q_L$  for the case with no phase change in the inviscid stagnation flow.

( $\delta_{eq}$ )는  $\theta_R/K_R$ 에 반비례하기 때문이다.

Fig. 6에는 Stefan 수에 따른  $Q_L(\tau)/Q_{steady}$ 의 거동을 도시하였다. Chao and Jeng<sup>(20)</sup>와 Sano<sup>(21)</sup> 등은 상변화가 없는 경우에 있어서의 점성 정체 유동 하에서의 비정상 열전달을 조사하였다. 그러나 고체 표면의 온도가 응고 온도보다 낮으면 자연스럽게 액체는 응고되기 시작할 것이다. 여기에서는 비점성 유체에서 상변화가 있는 경우와 없는 경우 모두에 대해 비정상 열전달을 구하여 Fig. 6에 도시하였다. 상변화가 일어나는 경우의  $Q_L(\tau)/Q_{steady}$ 는 상변화가 없는 경우보다 항상 크며 그 차이는 Stefan 수가 증가할수록 함께 커진다. 유체 내에서는 경계면으로부터 액체 영역으로의 일종의 온도 경계면( $T=T_H$ )의 전파가 있다. Stefan 수가 커지면, 고체는 더 빨리 자라게 되고 따라서 이 온도 경계면의 전파가 더 크게 방해받게 되므로  $Q_L(\tau)/Q_{steady}$ 는 증가하게 된다.

Stefan 수의 경우와 같이 최종 평형 상태는  $\alpha_R$ 과 무관하며 [식(41)] 고체의 성장속도는  $\alpha_R$ 이 증가할수록 함께 증대된다(Fig. 3, Fig. 4). 따라



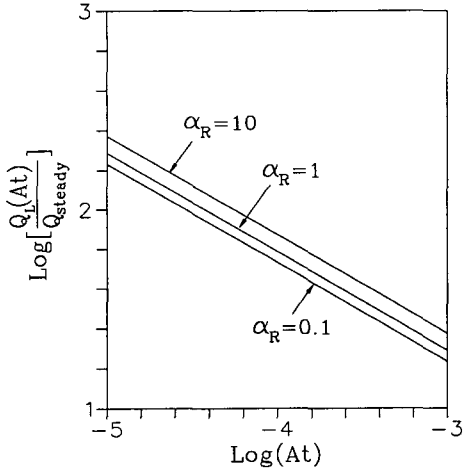


Fig. 7 Transient heat fluxes at the liquid side of solid-liquid interface ( $Q_L$ ) for several values of  $\alpha_R$  with  $\theta_R/K_R=1$  and  $Ste=0.1$ .

서 Fig. 7에서 볼 수 있듯이  $\alpha_R$ 에 따른 열유속의 의존성은 Stefan 수의 경우와 같은 특성을 가지고 있음을 알 수 있다. 그리고 Fig. 6과 Fig. 7을 비교해 보면 비점성 열유속  $Q_L(\tau)$ 는  $\alpha_R Ste = constant$  이면  $\alpha_R$ 과  $Ste$ 를 바꾸어도 거의 변화하지 않음을 알 수 있다. 즉,  $Q_L(\tau)$ 는 대략적으로 변수  $\alpha_R Ste$ 의 함수이다.

Rangel and Bian<sup>(17)</sup>은 instantaneous similarity 방법과 준-정상 상태 근사를 사용하여 본 문제와 같은 비점성 정체 유동 응고 문제를 해석하였는데, 그들은 네 개의 변수들 ( $Ste, \theta_R, 1/\alpha_R, 1/K_R$ )으로써 parametric study를 하였다. 그들은 작은 시간에 대해 유용한 instantaneous similarity 해로부터 고체의 두께를 다음과 같이 구하였다:

$X(t) = \lambda \sqrt{a_s t}$ . 여기에서  $\lambda$ 는 각각의 시간에 대해 수치적으로 결정되는 값이다. 그리고 주어진 시간들에 대해  $\lambda$ 들을 계산하여 시간이 증가할수록  $\lambda$ 가 감소함을 관찰하였다. 본 연구의 해 [식 (42)]와 비교하면  $\lambda$ 는  $2\sigma\sqrt{1 - |b_1/b_0|\tau}$ 에 대응된다. 여기에서  $\lambda$ 가  $\tau$ 에 대해 감소하는 함수라는

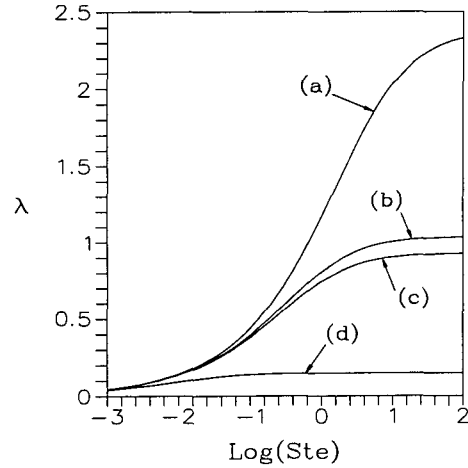


Fig. 8 Variation of  $\lambda = 2\sigma\sqrt{1 - |b_1/b_0|\tau}$  with Stefan number for  $\tau=0.1$ : (a)  $\alpha_R=1$  and  $\theta_R/K_R=0.1$ ; (b)  $\alpha_R=2$  and  $\theta_R/K_R=0.5$ ; (c)  $\alpha_R=1$  and  $\theta_R/K_R=1$ ; (d)  $\alpha_R=1$  and  $\theta_R/K_R=10$ .

사실은 식  $\lambda(\tau) = 2\sigma\sqrt{1 - |b_1/b_0|\tau}$ 로부터 쉽게 알 수 있다.

그리고 Rangel and Bian<sup>(17)</sup>은 아주 큰 시간 ( $\tau \rightarrow \infty$ )에서의 온도분포와 고체의 두께는  $Ste$ 와 무관하고, 변수  $\theta_R, 1/\alpha_R, 1/K_R$ 들은 해의 긴 시간 거동에 영향을 미친다고 결론지었다. 그러나, 식 (41)의 정상상태의 해를 보면, 평형 상태는 단지  $\theta_R/K_R$ 에 의존되고  $Ste$ 와  $\alpha_R$ 과는 무관하다는 것을 알 수 있다. 즉,  $Ste$ 뿐만 아니라  $\alpha_R$ 도 응고의 시간적인 과정을 지배하는 변수일 뿐이고 최종 평형 상태에는 영향을 미치지 않는다. Fig. 8에는 Stefan 수에 따른  $\lambda$ 의 변화를 도시하였는데 이 결과는 Stefan 수가 증가하면  $\lambda$ 도 함께 증가함을 보여주고 있다.

이상에서 관찰한 결과로부터 우리는 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 비점성 정체 유동 응고 문제에는 4개의 무차원변수들 ( $Ste, \theta_R, \alpha_R, K_R$ )이 나타난다. 그러나 이 시스템의 특성은 3개의 변수들 ( $Ste, \theta_R/K_R, \alpha_R$ )에 의해 결정된다. 그런

데 변수  $\alpha_R$ 에 대한 특성은  $Ste$ 에 대한 것과 유사하므로 2개의 변수  $Ste$ 와  $\theta_R/K_R$ 에 대해 조사함으로써 이 시스템에 대한 연구를 효율적으로 수행할 수 있다. 이와 같은 결과는, 수치계산을 할 때나 다른 초기조건 혹은 경계조건을 갖고 있는 문제에 대한 parametric study를 할 때 매우 도움을 줄 것으로 생각된다.

#### 4. 결 론

비점성 정체 유동 하에서의 응고 현상을 이론적으로 해석하였다. 지배 방정식에는 4개의 무차원변수들( $Ste$ ,  $\theta_R$ ,  $\alpha_R$ ,  $K_R$ )이 나타난다. 그러나 이 방정식의 해는 3개의 변수( $Ste$ ,  $\theta_R/K_R$ ,  $\alpha_R$ )에 의해 결정된다. 응고 과정의 초기 단계와 최종 단계에 대한 해석적인 해를 구하여 유체의 유동이 응고 현상에 미치는 영향에 대해 조사하였다. 초기 상태의 해는 시간에 대한 급수로써 전개하여 구하고 평형 상태는 정상상태의 지배 방정식으로부터 구하였다. 기판을 향한 유체의 흐름은 따뜻한 유체를 응고가 진행되고 있는 고체-액체 경계면으로 흐르게 함으로써 고체의 성장을 방해한다. 유체의 온도가 높아지거나 열전도도가 증가하면 응고과정은 유체의 유동에 의해 더 방해를 받는다. Stefan 수가 커질수록 순수한 전도에 의한 응고 속도는 빨라지며, 아울러 유체유동이 미치는 영향도 함께 증대된다. 과도기에서 상변화가 있는 경우의 열유속은 상변화가 없는 경우보다 항상 크다. 그리고 그 차이는  $Ste$ 가 증가할수록 함께 증가한다. 평형 상태는 하나의 변수  $\theta_R/K_R$ 에 의해 결정된다.  $Ste$ 와  $\alpha_R$ 은 최종 평형 상태에 영향을 미치지 않는다.

#### 참고문헌

1. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, Conduction of heat in solids, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, pp. 282-296.
2. Muehlbauer, J. C. and Sunderland, J. E., 1965, Heat conduction with freezing or melting, App. Mech. Rev., Vol. 18, pp. 951-959.
3. Beaubouef, R. T. and Chapman, A. J., 1967, Freezing of fluids in forced flow, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 10, pp. 1581-1587.
4. Epstein, M., 1976, The growth and decay of a frozen layer in forced flow, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 19, pp. 1281-1288.
5. Sparrow, E. M., Patankar, S. V. and Ramadhyani, S., 1977, Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region, J. Heat Transfer, Vol. 99, pp. 520-526.
6. Benard, C., Gobin, D. and Zanoli, A., 1986, Moving boundary problem: heat conduction in the solid phase of a phase-change material during melting driven by natural convection in the liquid, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 29, pp. 1669-1681.
7. Yoo, J.-S., 1991, Effect of fluid flow induced by a rotating disk on the freezing of fluid, Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 12, pp. 257-262.
8. Yoo, J.-S., 1997, Unsteady heat transfer from a rotating disk with solidification, Numerical Heat Transfer Part A, Vol. 31, pp. 765-781.
9. 유주식, 1996, von-Kármán 회전 유동 하에서의 물의 결빙, 공기조화 냉동공학 논문집 제8권 제3호, pp. 413-422.
10. Sparrow, E. M. and Gregg, J. L., 1959, Heat transfer from a rotating disk to fluids of any Prandtl number, J. Heat Transfer, Vol. 81, pp. 249-251.
11. Hartnett, J. P. and Deland, E. C., 1961, The influence of Prandtl number on the heat transfer from rotating nonisothermal disks and cones, J. Heat Transfer, Vol. 83, pp. 95-96.
12. Olander, D. R., 1961, Unsteady-state heat and mass transfer in the rotating-disk-revolving-fluid system, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 5, pp. 825-836.
13. Homsy, G. M. and Hudson, J. L., 1969, Un-

- steady heat transfer from a rotating disk, *J. Heat Transfer*, Vol. 91, pp. 162-163.
14. Watanabe, T., Kuribayashi, I., Honda, T. and Kanzawa, A., 1992, Deformation and solidification of a droplet on a cold substrate, *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 47, pp. 3059-3065.
  15. Liu, H., Lavernia, E. J. and Rangel, R. H., 1993, Numerical simulation of substrate impact and freezing of droplets in plasma spray processes, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 26, pp. 1900-1908.
  16. Rangel, R. H. and Bian, X., 1995, Numerical solution of the inviscid stagnation-flow solidification problem, *Numerical Heat transfer Part A*, Vol. 28, pp. 589-603.
  17. Rangel, R. H. and Bian, X., 1996, The inviscid stagnation-flow solidification problem, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 1591-1602.
  18. Bian, X. and Rangel, R. H., 1996, The viscous stagnation-flow solidification problem, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 3581-3594.
  19. 유주식, 1998, 평면 점성 정체 유동 응고 문제에 대한 이론적 해석, *공기조화 냉동공학 논문집 제10권 제3호*, pp. 260-270.
  20. Chao, B. T. and Jeng, D. R., 1965, Unsteady stagnation point heat transfer, *J. Heat Transfer*, Vol. 87, pp. 221-230.
  21. Sano, T., 1981, Unsteady stagnation point heat transfer with blowing or suction, *J. Heat Transfer*, Vol. 103, pp. 448-452.