

Kármán 경계층 유동의 안정성에 관한 연구

황 영 규[†], 이 윤 용^{*}

성균관대학교 기계공학부, ^{*}성균관대학교 대학원 기계공학과

Stability of the Kármán Boundary Layer Flow

Young-Kyu Hwang[†], Yun-Yong Lee^{*}

School of Mechanical Engineering, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea

^{*}Department of Mechanical Engineering, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea

(Received September 7, 1999; revision received June 1, 2000)

ABSTRACT: The Kármán boundary-layer, has been numerically investigated for the disturbance wave number, wave velocity, azimuth angle and radius (Reynolds number, Re). The disturbed flow over rotating disk can lead to transition at a much lower Re than that of the well-known Type I mode of instability. This early transition is due to the excitation of the Type II mode. Presented are the neutral stability results concerning these modes by solving new formulated vorticity equations with consideration of whole convective terms. When the present numerical results are compared with the previously known results, the value of critical Re corresponding to Type I is moved from $Re_{c,1}=285.3$ to 270.2 and the value corresponding to Type II is from $Re_{c,2}=69.4$ to 36.9, respectively. Also, the corresponding wave number is moved from $k_1=0.378$ to $k_1=0.389$ for Type I; from $k_2=0.279$ to $k_2=0.385$ for Type II. For Type II, the upper limit of wave number and azimuth angle is $k_U=0.5872$, $\epsilon_U=-18^\circ$, while its lower limit is $k_L=0.05$, $\epsilon_L=-27^\circ$. This implies that the disturbances will be relatively fast amplified at small Re and within narrow bands of wave number compared with the previous results.

Key words: Kármán boundary-layer flow(Kármán 경계층유동), Hydrodynamic stability(수동력학적 안정성), Rotating disk flow(회전원판 유동), Disturbance amplification(교란증폭)

기호 설명

C : $\cos \epsilon$

Co : Coriolis 수, $2-Ro-Ro^2=2$

Cp : 파속도, β/k

D : 특성 경계층 두께, $\sqrt{\nu/\omega_D}$

J : 스켈링 인자, $[O(1)]$

r : 무차원 반경, \bar{r}/D

Re : Reynolds 수, $\Delta\omega\bar{r}D/\nu$

Ro : Rossby 수, $\Delta\omega/\omega_D=-1$

(Kármán 경계층일 경우 $Ro=-1$)

S : $\sin \epsilon$

z : 무차원 축방향 길이, \bar{z}/D

[†] Corresponding author

Tel.: +82-31-290-7437; fax: +82-31-290-5849

E-mail address: ykhwang@yurim.skku.ac.kr

그리스 문자

- k : 복소 파수, $\bar{k}D$
 β : 복소 주파수, $\bar{\beta}/\omega_D$
 δ : 새로운 좌표계의 회전각, $\varepsilon + (\pi/2)$
 ε : 교란과의 방위각
 ξ : 섭동와도방정식의 반경방향 성분
 η : 섭동와도방정식의 접선방향 성분
 η_∞ : 경계치문제 구간의 끝
 ν : 동점성 계수
 $\Delta\omega$: 유체와 원판과의 상대각속도, $\omega_F - \omega_D$
 ω_F : 유체의 회전속도
 ω_D : 원판의 회전속도

상첨자

- : 유차원 변수

하첨자

- ∞ : 경계층 바깥
 1 : 제 1형 불안정성
 2 : 제 2형 불안정성

1. 서론

회전체 주위 유동장의 불안정성과 관련된 현상은 지구자전에 따라 대기유동으로 인한 일기의 변화, 태풍, 토네이도에서부터 임펠러와 같은 후향기의 선단부 부근에서의 천이, 대륙간탄도탄의 선단부 경계층 유동, 컴퓨터 하드디스크 드라이브 위의 데이터 기록 헤드 부상(levitation) 유동과 같이 규모가 큰 회전 유동으로부터 작은 유동에 이르기까지 그 형태가 다양하며, 가열 및 냉각등과 같은 열전달 문제를 포함하면 그 연구 범위가 대단히 광범위하다. 회전디스크 위의 3차원 경계층의 천이 메카니즘을 규명하기 위한 대표적인 연구는 Faller⁽¹⁾, Kobayashi et al.⁽²⁾, Lilly⁽³⁾, Malik⁽⁴⁾, Smith⁽⁵⁾를 들 수 있다.

본 연구에서는 Faller⁽¹⁾의 선형 안정성 연구를 바탕으로 교란의 성장(감소)을 파 진행방향(y)으로

가정하고, 나선형 교란의 각도를 나타내기 위하여 방위각(ε)을 고려한(Fig. 1참조) 중립안정곡선을 구하여, 교란이 불안정하기 시작하는 위치(Re), 교란파수(k), 파속도(C)등을 통하여 제 1형과 제 2형의 불안정성을 예측하고 특성을 규명하고자 한다.

1921년 von Kármán에 의해 경계층에서의 Navier-Stokes 방정식의 정상해가 구해진 이후, 회전원판을 이용한 안정성, 불안정성 및 천이에 관한 이론적 연구는 Kobayashi et al.⁽²⁾, Lilly⁽³⁾, Smith⁽⁵⁾에 의해 다양하게 수행되어 왔으며, 교란이 불안정해지기 시작하는 임계 Reynolds 수 Re_c 도 290 ± 20 으로 제시되었다.⁽⁴⁾

회전원판 주위의 Kármán 경계층 유동은 임계 Reynolds 수 Re_c 가 상대적으로 크고 교란과의 방위각 ε 이 양의 값을 가진 제 1형뿐만 아니라, 이들 값보다 상대적으로 작은 Re_c 및 ε 이 음의 값을 가진 제 2형 불안정성에서도 유동의 천이와 교란증폭이 야기될 수 있다.⁽¹⁾

최근에 Faller⁽¹⁾는 그의 안정성해석에서 Coriolis 효과와 유선곡률 효과를 고려한 제 1형 모드에 대해 $Re_{c,1} = 285.3$, 교란파수 $k_{c,1} = 0.378$ 그리고 교란방위각 $\varepsilon_{c,1} = 13.9^\circ$ 로 예측하였고, 제 2형 모드의 $Re_{c,2} = 69.4$, $k_{c,2} = 0.279$, 그리고 $\varepsilon_{c,2} = -19.0^\circ$ 를 제시하였다.

실험적 연구로는 Gregory et al.⁽⁶⁾의 china-clay 기법과, Malik et al.⁽⁷⁾, Wilkinson과 Malik⁽⁸⁾에 의한 hot-wire 실험, Faller⁽¹⁾, Wimmer⁽⁹⁾, Wilkinson et al.⁽¹⁰⁾, Kohama와 Suda⁽¹¹⁾ 그리고 Lingwood^(12,13) 등의 유동가시화 기법을 통한 유동불안정 및 천이 현상이 관찰되고 속도가 측정되었다.

국내의 연구로는 Kim et al.⁽¹⁴⁾이 회전원판 위의 유동에 관한 실험적 연구가 있으며, 일반적인 회전원판 주위 유동의 안정성 해석은 Kang et al.⁽¹⁵⁾, Hwang et al.⁽¹⁶⁾에 의해 연구가 시도되고 있다.

본 연구에서 재 유도된 선형 안정성 방정식은 Faller⁽¹⁾의 선형 안정성 방정식에서 부호 오류를 수정하고, (r, θ) 좌표계에서 (x, y) 좌표계로 변환시 r 에 의한 교란 미분항을 대개 무시하는데 비해 모두 고려함으로써 실제에 보다 더 근접한 안정성 방정식을 해석하고자 노력하였으며, 유동 교란의 중립안정성 해석을 시도하고자 하였다. 제

유도된 방정식은 orthogonal collocation 기법에 의해 두 점 경계조건을 정확히 만족하는 해이며, 그 결과 제 1형 모드에 대하여는 기존 연구자들의 결과와 잘 일치하는 해를 얻었으며, 제 2형 모드에 대하여는 다소 상이한 결과를 가지며, Faller⁽¹⁾의 연구결과에 비하여 보다 넓은 교란파수의 범위와 작은 Re_c 수에서 보다 빨리 발전(불안정)되어갈 것으로 예측된다.

2. 지배방정식 및 수치해법

2.1 기본 유동 방정식

유체는 비압축성이며 균질한 뉴턴유체라고 가정한다. 회전원판 위에 형성되는 유동형태는 원판 위 경계층 바깥 주위 유체와 원판과의 속도비에 따라 Kármán, Ekman 그리고 Bödewadt 경계층들이 있다. 즉, 주위유체의 회전각속도 ω_F 와 원판의 회전각속도를 ω_D 라 할 때, 원판만 회전하는 경우 $\omega_D, \omega_F=0$, 원판과 유체가 동시에 회전하는 경우 $\omega_F=\omega_D$, 주위유체만 회전하는 경우 $\omega_F, \omega_D=0$ 이며, 유동장의 대표특성을 표현하기 위해 식(1)과 같이 Faller⁽¹⁾가 제시한 시스템 회전을 Ω 를 사용한다.

$$\Omega = \frac{\omega_F}{2-Ro} + \frac{\omega_D}{2+Ro} \quad (1)$$

여기서, $Ro = \frac{4\omega}{\Omega}$ 는 Rossby 수, $\Delta\omega$ 는 각속도의 차이($\omega_F - \omega_D$)이다. Kármán 경계층 유동의 경우 $\Omega = \omega_D, \omega_F = 0, Ro = -1$ 이 된다.

원판 회전각속도 ω_D 로 회전하는 원통 좌표계에 서 r, θ, z 성분의 운동량 방정식은 다음과 같다

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{u} - \frac{\bar{v}^2}{r} - 2\omega_D\bar{v} \\ = -\bar{p}_r + \nu(\nabla^2\bar{u} - \frac{\bar{u}}{r^2} - \frac{2\bar{v}\theta}{r^2}), \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\bar{v}_t + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{v} - \frac{\bar{u}\bar{v}}{r} + 2\omega_D\bar{u}$$

$$= -\frac{\bar{p}_\theta}{r} + \nu(\nabla^2\bar{v} - \frac{\bar{v}}{r^2} + \frac{2\bar{u}\theta}{r^2}), \quad (2b)$$

$$\bar{w}_t + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{w} = -\bar{p}_z + \nu\nabla^2\bar{w}. \quad (2c)$$

연속방정식은

$$\frac{(r\bar{u})_r}{r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} + \bar{w}_z = 0, \quad (3)$$

여기서, 하첨자 t, r, θ 그리고 z 는 편미분을 나타낸다.

또한, $\bar{\mathbf{u}}, \bar{v}$ 그리고 \bar{w} 는 속도 $\bar{\mathbf{u}}$ 의 r, θ, z 방향성분들로써 기본유동과 교란유동으로 나타내면

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}) = (U, V, W, P) + (u, v, w, p). \quad (4)$$

무차원 상사함수 (F, G, H)로써 기본유동에 축대칭 상사해로 가정하면

$$U = \Delta\omega r F(z), V = \Delta\omega r G(z), W = \Delta\omega D H(z), \quad (5)$$

여기서, $D = (\nu/\Omega)^{1/2}$ 는 경계층두께이며, 무차원 시간 $t^* (= t/\Omega)$ 는 시간 t 를 Ω 의 역수로, $z^* (= z/D)$ 는 경계층 두께 D 로 무차원화 하였다. 그리고, 이 후 표기에서 *는 편의상 생략하였다.

무차원화 된 반경방향 기본유동 방정식은

$$\begin{aligned} F_t + Ro(F^2 + HF_z - G^2) - \frac{2\omega_D}{\Omega} G \\ = -\frac{P_r}{\Delta\omega r D \Omega} + F_{zz}, \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $2\omega_D/\Omega \equiv Co$ (Coriolis 수), $P_r/\Delta\omega r D \Omega = P_r^*$, $Co = 2 - Ro - Ro^2$ 이고, $z \rightarrow \infty$ 에서 $V = \Delta\omega r, F = F_z = F_{zz} = 0$ 이므로 $P_r^* = Ro + Co$ 이다.

축방향 운동량방정식에서 $P_z/\Delta\omega D^2\Omega = P_z^*$ 이고 연속방정식으로부터 $P_z^* = 0$ 이 된다.

따라서, 반경 및 접선방향 운동량 방정식만 표현하면

$$F_t + Ro[F^2 + HF_z - (G^2 - 1)] - Co(G - 1) - F_{zz} = 0, \quad (7a)$$

$$G_t + Ro(2FG + HG_z) + CoF - G_{zz} = 0. \quad (7b)$$

무차원화된 연속방정식은

$$H = -2 \int_0^z F(z) dz \quad (8)$$

이고, 경계조건은

$$\begin{aligned} F(0) = G(0) = H(0) = 0, \\ F(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 안정성 방정식

선형 안정성 이론을 적용하여 기본 유동의 각 속도 성분에 미소한 교란항들을 중첩시켜 교란 방정식을 유도하였다. 여기서, 기본 유동항들을 식 (5)와 같이 정상상태로 간주한다.

Fig. 1은 (r, θ) 로 부터 (x, y) 로 변환한 좌표계이며, \hat{x} 축이 접선방향과 이루는 각은 방위각 ε 이고, $\delta = \varepsilon + (\pi/2)$ 이다.

이렇게 유도한 교란방정식으로부터, 좌표계 (x, y) 에서 ε 만큼 회전한 새로운 좌표계 (\hat{x}, \hat{y}) 로 변환하면 Faller et al.⁽¹⁷⁾과 같이 새로운 교란속도 방정식을 얻게 되며, 식 (10)이 된다. 새로운 좌표계로 변환하게 되는 이유는 교란의 형태는 불안정이 발생하기 시작하는 위치에서 나선형 교란의 접선방향에 거의 평행하고 원주의 접선방향과 이루는 각을 가지게 된다. 따라서, 교란을 규명하기 위하여 이의 접선방향으로 좌표계를 회전시킨다면 1차원적인 접근이 가능하다.

$$\begin{aligned} u_t + Re[-(FC + GS)u_y + (-F_z S + G_z C)w] \\ + Ro(Hu_x + Fu - 2Gv) - Cov = u_{yy} + u_{zz}, \end{aligned} \quad (10)$$

또한, 안정성 방정식의 수를 줄이기 위하여 z 방향의 교란와도를 무시하고 r, θ 방향의 교란

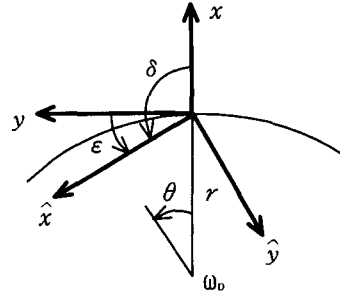


Fig. 1 Rotation System.

와도를 ξ, η 로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi_t + Re(F\xi_r + \frac{G\xi_\theta}{r} - F_z v_r + G_z u_r - wG_{zz}) \\ + Ro(H\xi_z + H_z \xi - F_z v - Fv_z - 2G_z u - 2Gu_z + \frac{Fw_\theta}{r} \\ + G_z u) - Cou_z = \nabla^2 \xi - \frac{v_z}{r^2} - \frac{2u_{\theta z}}{r^2}, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \eta_t + Re(F\eta_r + \frac{G\eta_\theta}{r} - \frac{F_z v_\theta}{r} + \frac{G_z u_\theta}{r} + wF_{zz}) \\ + Ro(H_z \eta + H\eta_z + F_z u + Fu_z - 2G_z v - 2Gv_z \\ - Fw_r - \frac{Gw_\theta}{r} - F_z u + \frac{Gw_\theta}{r}) - Cov_z \\ = \nabla^2 \eta - \frac{u_z}{r^2} - \frac{2v_{\theta z}}{r^2}. \end{aligned} \quad (11b)$$

원통 좌표계의 교란방정식을 직교 좌표계로 좌표 변환을 하고(즉, r 방향은 x 방향으로, θ 방향은 y 방향), z 방향을 회전축으로 하는 와도 전달 방정식을 유도하면, Faller et al.⁽¹⁷⁾과 같이 x, y 방향의 와도 전달 방정식 식 (12)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \xi_t + Re(F\xi_x + G\xi_y - F_z u_x + G_z u_y - G_{zz} w) \\ + Ro(H\xi_z + H_z \xi - F_z v - Fv_z - 2G_z u - 2Gu_z + G_z w) \\ - Cou_z = \nabla^2 \xi + \frac{v_z}{r^2} - \frac{2}{r} u_{yz}, \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \eta_t + Re(F\eta_x + G\eta_y - F_z v_y + G_z u_y + F_{zz} w) \\ + Ro(H_z \eta + H\eta_z + F_z u + Fu_z - 2G_z v - 2Gv_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -Fw_x - Gw_y - F_z u + Gw_y - Cov_z \\
 & = \nabla^2 \eta - \frac{u_z}{r^2} - \frac{2}{r} v_{yz} , \quad (12b)
 \end{aligned}$$

여기서, Re 는 Reynolds 수이며, $Re = \Delta \omega \bar{r} D / \nu$ 로 정의하였다. 차원을 가진 반경 \bar{r} 를 무차원화 하면 $Re = \Delta \omega r / \Omega$ 가 되어 Kármán 유동의 경우 $Re = -r$ 이 된다. 그러나 편의상 양의 Re 를 사용하여 계산하였다. 회전원판 내 유동의 불안정성을 좌표 변환한 새로운 \hat{x} 축에 독립적인 2차원 와도라 가정하면, \hat{x} 에 대한 미분치들은 모두 '0'이 된다.

교란속도방정식과 마찬가지로 ϵ 만큼 회전한 새로운 좌표계 (\hat{x} , \hat{y}) 로 변환하면 안정성방정식은 식 (13)이 된다. 여기서, $1/r = -1/Re$ 가 되므로 $1/r$, $1/r^2$ 은 모두 무시하였다.

$$\begin{aligned}
 & \xi_y + Re[-(FC + GS)\xi_y + (F_{zz}C + G_{zz}S)w] \\
 & + Ro[H\xi_z + H_z\xi - Fv_z - F_zv - 2G_zu - 2Gu_z \\
 & + (F_zC + G_zS)(uS + vC) + (FS - GC)w_yS \\
 & + (GC - FS)w_yC] - Co u_z = \xi_{yy} + \xi_{zz} . \quad (13)
 \end{aligned}$$

Faller⁽¹⁾의 방정식에 대해 추가된 항은 방위각이 커짐에 따라 무시할 수 없는 항 '(F_zC + G_zS)x(uS + vC)'과 누락항 '(FS - GC)w_yS'이며, 부호 오류항은 'GC - FS' 이다.

여기서, 연속 방정식을 교란 유선함수 ϕ 를 사용하여 다음의 식(14)로 나타낼 수 있다.

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial y} , \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial z} , \quad \xi = \nabla^2 \phi . \quad (14)$$

교란 속도 u 와 유선함수 ϕ 를 파수 k , 주파수 β 를 사용하여 식 (15)와 같이 가정하면

$$u(y, z, t) = U(z) \exp[i(ky - \beta t)] , \quad (15a)$$

$$\phi(y, z, t) = \Phi(z) \exp[i(ky - \beta t)] . \quad (15b)$$

\hat{x} 방향의 교란속도 방정식 (10)에 식 (14)와 (15)를 대입하고 실수부와 허수부로 분리하면

$$\begin{aligned}
 U_R'' & = Ro H U_R' + (Ro F + k^2)U_R \\
 & + [\beta + Re(FC + GS)k]U_I + (2Ro G + Co)\Phi_R' \\
 & - Re k(-F'S + G'C)\Phi_I , \quad (16a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_I'' & = Ro H U_I' + (Ro F + k^2)U_I \\
 & - [\beta + Re(FC + GS)k]U_R + (2Ro G + Co)\Phi_I' \\
 & + Re k(-F'S + G'C)\Phi_R . \quad (16b)
 \end{aligned}$$

\hat{x} 방향의 안정성 방정식 (13)에 식 (14)와 (15)를 대입하고 실수부와 허수부로 분리하면 복소수 6차인 비선형 4계 상미분 방정식이 된다.

$$\begin{aligned}
 \Phi_R'''' & = Ro H \Phi_R''' + (Ro H' + Ro F + 2k^2)\Phi_R'' \\
 & + Ro[F' - H k^2 - C(F'C + G'S)]\Phi_R' \\
 & - [Ro H' k^2 + Ro k^2 S(FS - GC) \\
 & + Ro k^2 C(GC - FS) + k^4]\Phi_R \\
 & + [\beta + Re(FC + GS)k]\Phi_I'' \\
 & - [\beta k^2 + Re(FC + GS)k^3 + Re(F''C \\
 & + G''S)k]\Phi_I - (2Ro G + Co)U_R' \\
 & + Ro[S(F'C + G'S) - 2G']U_R , \quad (17a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_I'''' & = Ro H \Phi_I''' + (Ro H' + Ro F + 2k^2)\Phi_I'' \\
 & + Ro[F' - H k^2 - C(F'C + G'S)]\Phi_I' \\
 & - [Ro H' k^2 + Ro k^2 S(FS - GC) \\
 & + Ro k^2 C(GC - FS) + k^4]\Phi_I \\
 & - [\beta + Re(FC + GS)k]\Phi_R'' \\
 & + [\beta k^2 + Re(FC + GS)k^3 + Re(F''C \\
 & + G''S)k]\Phi_R - (2Ro G + Co)U_I' \\
 & + Ro[S(F'C + G'S) - 2G']U_I . \quad (17b)
 \end{aligned}$$

복소수로 표현된 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 U(0) & = \Phi(0) = \Phi'(0) = 0 , \\
 U'(\infty) & = \Phi(\infty) = \Phi''(\infty) = 0 . \quad (18)
 \end{aligned}$$

2.3 수치 해석 방법

안정성 해석시 단순사격법(simple shooting)과 orthogonal collocation 기법들이 있는데, 단순사격법은 η_∞ 가 증가하게 되면 적분시 오차누적 및 과급에 의해 계산이 불가능하게 되므로, 두 점 경계치 문제를 정확하게 만족하는 수치해를 구하기 위해 orthogonal collocation 방법⁽¹⁸⁾을 이용하였으며, 이 기법을 사용한 컴퓨터 코드 COLNEW를 이용하였다.⁽¹⁹⁾

안정성 방정식과 경계 조건을 실수부와 허수부로 분리하여 12차 1계(order) 방정식으로써 계산한다. 이때, 고유값 계산을 위해 Re 와 방위각 ϵ 을 고정하고 주파수 β 와 파수 k 를 아주 조금씩 변화시키면서 두 점 경계치 문제로 푼다. 이와 유사하게, Re 를 고정시킬 경우 해의 범위를 벗어나기 쉬운 지역에서는 파수 k 와 ϵ 을 고정시키고 Re 와 β 를 찾아가는 Newton 알고리즘을 사용하였다.

또한, 경계 조건이 모두 '0'일 경우 무용해를 얻을 수 있으므로 다음과 같은 수정된 경계 조건식(19)를 사용하여 원래의 경계조건 $|\Phi_R(0)|=0$, $|\Phi_I(0)|=0$ 을 만족시키기 위해 $|\Phi_R(0)|+|\Phi_I(0)| \leq 10^{-5}$ 인 조건을 사용하고, 경계조건과는 무관하며 고유벡터의 크기를 조절해 주는 J 값을 $10^{-3} \leq J \leq 10^{-1}$ 의 범위의 '0'이 아닌 값으로 취한다.

$$\begin{aligned} U_R(0) = U_I(0) = \Phi_R(0) = \Phi_I(0) = 0, \\ \Phi_R''(0) = \Phi_I''(0) = J. \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} U_R(\infty) = U_I(\infty) = \Phi_R(\infty) = \Phi_I(\infty) = 0, \\ \Phi_R''(\infty) = \Phi_I''(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (19b)$$

이 때 고유 벡터의 스켈링을 위한 식(20)을 동시에 만족 시켜야만 한다.

$$\min_{0 \leq \eta \leq \infty} \left(\frac{|\Phi_R(0)|}{|\Phi_R(\eta)|}, \frac{|\Phi_I(0)|}{|\Phi_I(\eta)|} \right) \leq 10^{-4}, \quad (20a)$$

$$\max \left(\frac{|\Phi_R(0)|}{M}, \frac{|\Phi_I(0)|}{M} \right) \leq 10^{-7}. \quad (20b)$$

여기서, M 은 고유벡터 성분 중 가장 큰 값을 의미한다. 이 때 고유벡터들은 B-spline으로 저장하였다가 다음 계산시 이용되며, 수렴하는 고유치들을 구한다.

3. 결과 및 고찰

3.1 이론해석 결과 및 고찰

Kármán 경계층($Ro=-1$)의 정체된 교란에 대한 기존 연구자⁽¹⁾의 안정성 방정식 유도시 발생한 대류항의 부호오류와 모든 대류 관련항들을 고려하여 새로운 안정성방정식을 제시하였으며, 중립안정성계산을 재 시도하였다. 그 결과 보다 더 작은 임계 Re_c 수 및 유사한 파수, 방위각의 값을 나타내고 있는데, 유동천이는 유동이 불안정하여지는 조건으로부터 증폭, 발달되어 관찰되므로 기존 연구자들의 결과와 정성적으로 매우 잘 일치한다고 할 수 있다.

제 1형 불안정성은 제 2형 불안정성에 비해 상대적으로 파수가 높고 보다 큰 Re 수를 가지며 Fig. 1의 좌표계에서 방위각 ϵ 의 양의 값 방향으로 vortex core가 형성되는 유동형태이다. 제 2형 불안정성은 상대적으로 파수와 Re 수가 낮고 ϵ 의 음의 값 방향으로 유동불안정성이 존재한다.

즉, 제 1형 불안정성의 경우는, 제 2형 불안정성에 비해 상대적으로 높은 파수 k 에서, 그리고 절대값으로 비교했을 때 느린 교란 파속도 Cp 를 가짐을 확인할 수 있으며, 이 경향은 기존 결과와 유사하다.

제 1형 불안정성에 대한 임계값들은 Table 1에 나타나 있으며, 기존연구자의 안정성방정식에서 부호오류항을 수정하고 2점 경계치 문제로 계산한 결과(modified 해석 결과 참조) 기존의 결과와도 근사한 값을 보이며, 누락항을 모두 고려한 본 연구결과와 거의 일치한 값을 보이고 있다.

제 2형 불안정성에 관한 그것들은 Table 2에 나타내었으며, 부호 오류항을 수정한 modified 해석결과와 누락항을 모두 고려한 본 해석결과는 아주 근사한데 비해, 기존의 해석결과와는 상당한 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 본 연구의 결과를 Fig. 2의 실험결과와 직접적인 비교는 사실상 불가능하다. 제 2형 불안정과 같이 Re 값

이 상대적으로 작은 경우에는 평행류 가정의 선형안정성 방정식의 적용이 다소간에 약간의 문제점이 있을 수도 있다. 그럼에도 불구하고 방위각이 음의 값(-23.5°)을 가지며, Re 값이 상당히 증폭된 지점 ($Re=36.9 \rightarrow 352$)에서 $\epsilon = -15^\circ$ 로 관찰되므로 증폭률과 증폭과정에 따른 방위각의 변경등은 새로운 관심을 불러일으킬 수 있다.

위의 해석결과로부터, 평행유동 가정하에 보다 작은 Re 값에서 불안정하기 시작함을 예측할 수 있으며 교란방위각의 범위는 좀더 넓어지는 결과를 얻을 수 있었다.

정지된 유체에서 갑작스런 원판의 회전으로 인한 Kármán 경계층 유동의 제 2형 및 부차적 불안정성(secondary instability)의 사진 및 그 구조를 Fig. 2에 도시하였다. 이 그림은 연속 사진중의 일부로써 제 2형 불안정성은 교란과의 방위각이 약 -15° 의 각도로 중심으로부터 반경방향으로 이동하는 것을 관찰할 수 있고, 부차적 교란은 방위각이 약 40° 의 각도로 빗살무늬처럼 발생하여 난류로 천이 되는 모습을 관찰할 수 있다. 이 그림에서 좌표축 \hat{y} 의 방향이 Fig. 1과 다른 것은 Fig. 1에서 r 의 증가는 $-Re$ 를 사용하여 계산해야함에도 불구하고 편의상 Re 를 사용하여 계산하였으므로 r 이 증가하는 방향은 Fig. 2에서와 같이 중심에서 멀어지는 방향이 된다. 개략적인 스케치도(Fig. 2.b 참조)에서 교란유동이 $r=61.4\text{cm}$ ($Re=352$)에서 약 $\epsilon = -15^\circ$ 로 발달됨을 나타내고 있으며, 임계값과는 다소 차이를 보이고 있으나 방위각이 음의 값을 갖는 경향은 일치하고 있다. 보다 정확한 해석을 위해서는 교란의 시간상 또는 공간상 증폭곡선을 구하여 교란의 성장, 소멸을 설명할 필요가 있다. 부차적 교란에 관한 연구는 본 연구에서 수행되지 않았으며 추후 논의되어야 할 것이다.

기본유동에 대한 무차원 속도분포곡선은 Fig. 3에 나타나 있으며 속도분포곡선에 변곡점이 존재한다.

Kármán 경계층에 대한 제 1형, 제 2형의 4차원 중립안정곡선은 Fig. 4에 나타나 있다. 이러한 곡선들을 구하기 위해서는 Fig. 5와 7에서 나타난 곡선들의 최 외곽지점들만을 연결한 선으로써 곡선의 외부에서는 어떠한 교란조건에서도 유동이 항상 안정한 반면에, 이 곡선의 내부는 유동

Table 1 Critical values of Type I Instability

Mode	Type I		
	Faller ⁽¹⁾	Modified	Present
Re_c	285.3	270.8	270.2
k	0.378	0.389	0.389
ϵ	13.9	13.0	13.2
Cp		-4.44	-4.93

Table 2 Critical values of Type II Instability

Mode	Type II		
	Faller ⁽¹⁾	Modified	Present
Re_c	69.4	38.25	36.9
k	0.279	0.355	0.385
ϵ	-19.0	-26.0	-23.5
Cp		17.70	15.79

Table 3 Minimum values on the neutral curve of Type I Instability near 'nose'

Re_c	k	ϵ	Cp
385.19	0.6	8.5	9.74
297.69	0.5	10.1	2.50
270.61	0.4	12.8	-4.08
270.22	0.386	13.3	-5.13
288.84	0.3	16.3	-10.91
340.0	0.234	18.5	-14.67
388.36	0.2	19.1	-14.28
400.0	0.193	19.0	-63.30

이 불안정할 수 있는 불안정 영역이다.

제 1형 불안정성에 해당하는 중립안정곡선을 구하였고 '임계점 부근의 꼭지점'에서의 중립안정곡선상 최소값들은 Table 3에 표시하였는데, 유동조건에 따라 교란 파속도(Cp)의 부호가 전환하므로 이러한 조건의 사이에서 교란 파속도가 '0'이 되어 정체하는 파형이 있음을 짐작할 수 있다. 우선적으로, 제 1형 불안정성의 방위각 $\epsilon = 10^\circ$ 와 15° 에서 기존 연구자의 결과와 비교한 그림이 Fig. 5에 나타나 있다. 이 그림에서 현재

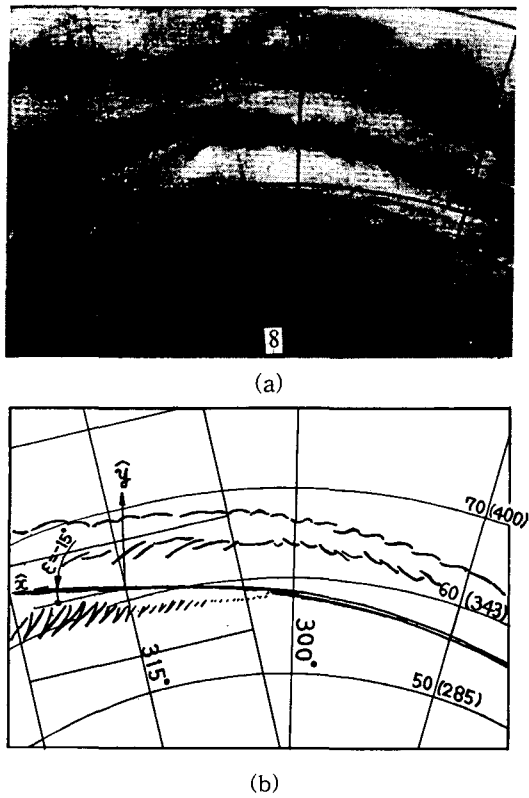


Fig. 2 Type II and secondary instability of Kármán boundary layer illustrated (a) photo from Faller(1991); (b) sketch of their structured.

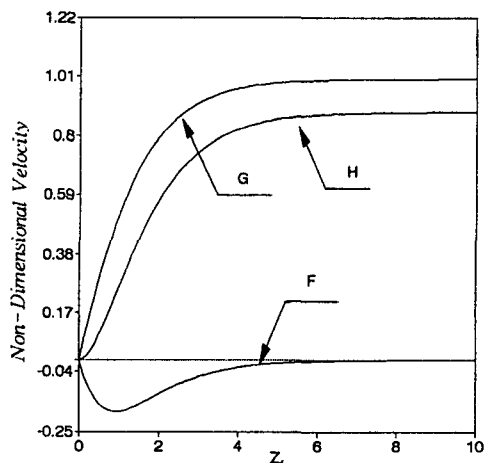


Fig. 3 Numerical solution of Base flow equations for $Ro=-1, Co=2$.

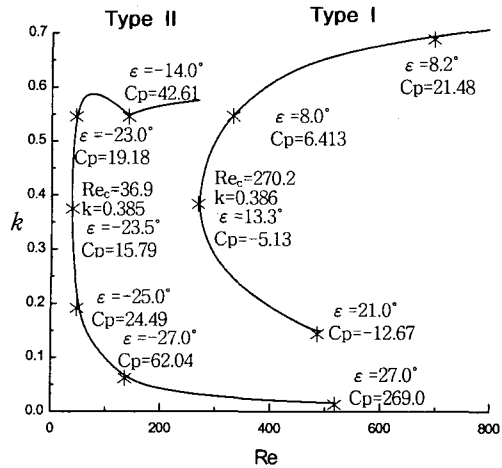


Fig. 4 4-dim. neutral stability curves for the Kármán layer, corresponding to the Type I and II instabilities.

의 연구결과는 보다 더 작은 Re 수 및 넓은 파수의 범위를 가지며, 두 방위각의 범위 내에서 정체된 교란이 나타나고 증폭 발전되어 가시적으로 관찰 될 것이다. 제 1형 불안정성에서 중립안정곡선의 꼭지점 윗쪽 부분(파수 k 가 상대적으로 큰 지역)으로 갈수록 방위각 ϵ 은 작아지는 경향($13.3^\circ \rightarrow 8.2^\circ$)이 있고, 임계점 부근의 꼭지점 아랫쪽 부분(k 가 상대적으로 작은 지역)으로 갈수록 ϵ 은 커져($13.3^\circ \rightarrow 21^\circ$) 간다(Fig. 4, Table 3 참조). 방위각 ϵ 이 양의 값을 갖는 제 1형 불안정성에 관하여는 Hwang과 Lee⁽²⁰⁾에 의해 논의되었으며, 그들은 $\epsilon=10^\circ$ 근처에서 β 의 값이 거의 '0'이 되어 유동의 정체된 파형을 관찰할 수 있을 것으로 예측하였다.

제 2형 불안정성의 중립안정곡선은 동일한 방위각에 대하여, (k, Re) 평면은 Fig. 6에, (β, Re) 평면은 Fig. 7에 도시하였다. 주파수 β 가 '양'의 값을 가짐은 교란 파속도 Cp 가 Fig. 2의 \hat{y} 에 대해 양의 방향(같은 방향)으로 진행됨을 의미한다.

3.2 기존실험결과와의 비교

Gregory et al.⁽⁶⁾은 회전원판 위에서 약 14° 의 각도로 밖으로 향한 나선구조로 약 30개의 교란

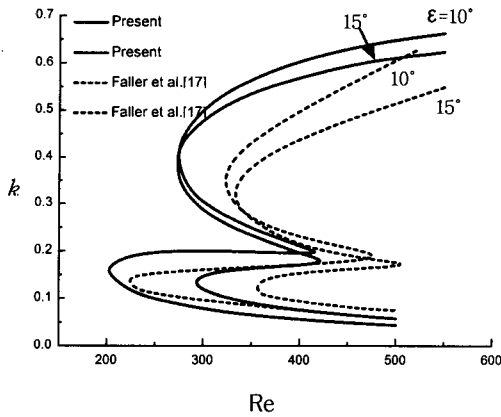


Fig. 5 Comparison of neutral stability curves in the (Re, k) -plane for $\epsilon=10^\circ$ and 15° between present and previous known results.

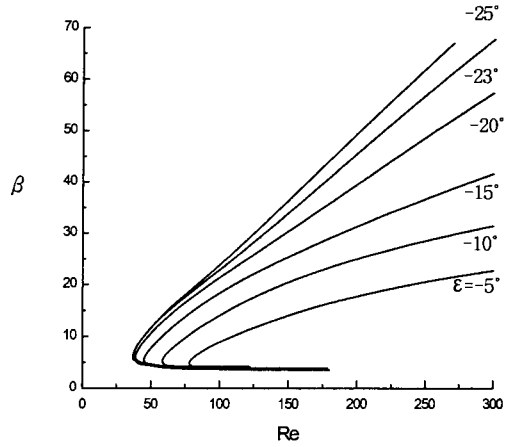


Fig. 7 Neutral stability curves in the (Re, β) -plane for $\epsilon = -25^\circ, -23^\circ, -20^\circ, -15^\circ, -10^\circ,$ and -5° .

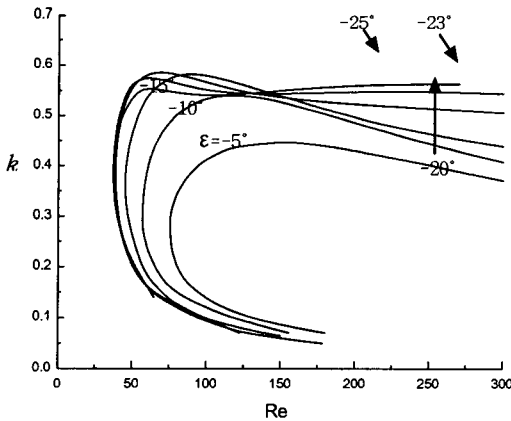


Fig. 6 Neutral stability curves in the (Re, k) -plane for $\epsilon = -25^\circ, -23^\circ, -20^\circ, -15^\circ, -10^\circ$ and -5° .

을 발견했으며, 증폭 발전된 천이 Reynolds 수는 430으로 제시하였다. Kohama와 Suda⁽¹¹⁾는 30~35개의 나선형 와를 발견했으며, Malik et al.⁽⁷⁾은 11~14°의 각도로 21개의 와를 발견했고 임계 Reynolds 수를 294로 제시하였으며, 이것은 종종 제 1형 불안정성이라고 부른다.

Faller는 그의 안정성 해석에서 임계 $Re_{c,1} = 285.3$, 파수 $k=0.378$, 방위각 $\epsilon=13.9^\circ$ 를 제시하였고⁽¹⁾, 본 연구의 안정성 해석 결과 임계 $Re_{c,1}$

$=270.2$, 파수 $k=0.386$, 방위각 $\epsilon=13.3^\circ$ 로 Malik⁽⁴⁾이 결론을 내린 임계 Reynolds 수 범위 290 ± 20 에 가장 최저의 값으로 해를 구하였으며, 여러 연구자들의 실험결과와도 잘 일치한다고 볼 수 있다.⁽²⁰⁾

제 2형 불안정성은 이론적인 결과가 많지 않으며 실험적인 결과와 비교하기는 더욱 어렵다. Faller⁽¹⁾의 유동가시화 실험은 초기 원판위에 정지한 유체에서 원판의 느린 회전($\Omega=0.325$ rad/s)에 따른 이동 교란파의 진행과정을 연속 사진에서 보여 주고 있으며, 회전하기 시작하는 아주 초기에만 Kármán 유동의 이론적인 표현과 매우 근사하다. 제 2형 불안정성은 일어난다 하더라도 빠르게 전파해 버리거나 부차적 불안정성(secondary instability)의 발달로 혼합과 확산이 급격하게 일어날 것으로 추측된다. 뿐만 아니라 방위각이 음의 방향으로 증가할수록 주파수가 증가하고 양의 방향으로 증가할수록 주파수가 감소한다. 이것은 제 2형 불안정성의 방위각이 음의 값을 가지는 것과 무관하지 않다고 판단되며, 주파수가 크기 때문에 발생, 성장, 소멸의 속도가 크므로 실험실에서 실험으로 잘 관찰되지 않는 원인이 된다. 제 2형 불안정성의 경우, Faller는 원심력 또는 Coriolis 힘에 의해 동적인 메카니즘을 가지며, 외부의 기계적인 교란이 있을 때 일정하게 나타난다고 보았다.⁽¹⁾ 제 2형 불안정성의

방위각은 Fig. 2 에서 약 -15° 로 관찰할 수 있으며, 본 연구에서 제시한 제 2형 불안정성의 임계값들($Re_{c,2}=36.9$, $k=0.385$, $\epsilon=-23.5^\circ$)과 차이를 보이고 있지만, 교란유동은 증폭 발전되어서 가시적으로 나타나게 되며, 임계선상을 지나는 유동조건으로 관찰되기 어려우며, 이론해석과 실험적인 결과에는 차이가 존재하게 된다. 따라서, 교란이 증폭 발전되는 메카니즘을 다각도로 분석하기 위한 교란증폭곡선을 구하고 유동교란의 파수, 방위각과 불안정 위치등을 설명할 필요가 있게 된다.

4. 결론

본 연구에서는 Kármán 경계층에 대한 유동 안정성방정식들을 새롭게 유도하고, 고유값 두 점 경계조건들을 정확히 만족시키는 수치 해들로부터 얻은 중립안정성 해석결과 다음과 같은 중요한 사항들을 얻을 수 있었다.

(1) 제 1형 불안정성은 기존의 결과보다 더 작은 임계 Re 수에서 일어날 수 있고, 파수 k 와 교란 방위각 ϵ 은 정성적으로 기존하는 여러 연구자들의 실험결과와 잘 일치한다고 볼 수 있으며, $\epsilon=10^\circ$ 와 $\epsilon=13^\circ$ 부근에서 교란 파속도 Cp 의 값이 부호의 전환을 가지므로 이 값 사이에서 정체된 파를 관찰할 수 있을 것으로 추측된다.

(2) 제 2형 불안정성이 일어날 수 있는 파수, 교란 방위각, 교란 파속도의 구간은 각각 $0.05 \leq k \leq 0.5872$, $-27^\circ \leq \epsilon \leq -18^\circ$, $86.99 \geq Cp \geq 26.47$ 이다. 또한, 상대적으로 제 1형 불안정성이 야기될 수 있는 파수는 제 2형 불안정성에 비해 높고, 그 교란 파속도는 상대적으로 느린 경향을 보인다.

(3) 제 2형 불안정성의 교란 파속도는 원판이 반시계 방향으로 회전할 때, 제 1형 불안정성의 교란 파속도 보다 빠르게 원판의 중심으로부터 멀어지는 방향으로 전파할 것으로 추측된다.

참고 문헌

1. Faller, A. J., 1991, Instability and Transition of Disturbed Flow over a Rotating Disk, *J. Fluid Mech.*, Vol. 230, pp. 245-269.
2. Kobayashi, R., Kohama, Y. and Takamadate, Ch., 1980, Spiral Vortices in Boundary Layer Transition Regime on a Rotating Disk, *Acta Mechanica*, Vol. 35, pp. 71-82.
3. Lilly, D. K., 1966, On the Instability of Ekman Boundary Flow, *J. of the Atmospheric Science*, Vol. 23 pp. 481-494.
4. Malik, M. R., 1986, The Neutral Curve for Stationary Disturbances in Rotating Disk Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 164, pp. 275-287.
5. Smith, N. H., 1947, Exploratory Investigation of Boundary Layer Oscillations on a Rotating Disk, NACA Tech. Note 1227.
6. Gregory, N., Stuart, J. T. and Walker, W. S., 1955, On the Stability of Three-Dimensional Boundary Layers with Application to the Flow Due to a Rotating Disk, *Phil. Trans. Roy. Soc.* Vol. 248, pp. 155-199.
7. Malik, M. R., Wilkinson, S. P. and Orszag, S. A., 1981, Instability and Transition in Rotating Disk Flow, *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 9, pp. 1131-1138.
8. Wilkinson, S. P. and Malik, M. R., 1983, Stability Experiments in the Flow over a Rotating Disk, *J. AIAA*, 23, pp. 588-595.
9. Wimmer, M., 1989, Classification of Laminar-Turbulent Transition near Rotating Bodies, Laminar-Turbulent Transition, in Proc. IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, ed. Arnal, D. and Michel, R., Springer-Verlag, pp. 545-550.
10. Wilkinson, S. P., Blanchard, A. E., Selby, G., Gaster, M., Tritz, T., and Gad-el-Hak, M., 1990, Flow Visualization of Wave-Packet in a Rotating Disk, Instability and Transition, ed. Hussaini, M. Y. and Voigt, K. G., Vol. 1, Springer-Verlag, pp. 306-318.
11. Kohama, Y. and Suda, K., 1993, Crossflow instability in a Spinning Disk Boundary Layer, *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 1, pp. 212-214.
12. Lingwood, R. J., 1996, An Experimental Study of Absolute Instability of the Rotating Disk Boundary Layer Flow, *J.*

- Fluid Mech., Vol. 314, pp. 373-405.
13. Lingwood, R. J., 1997, Absolute Instability of the Ekman layer and related rotating Flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 331, pp. 405-428.
 14. Kim, J. Y., Kang, H. S. and Yoo, J. Y., 1998, An Experimental Investigation of Flow on a Rotating Disk, *Proceedings of the KSME 1998 Fall Annual Meeting B (Korean)*, pp. 563-568.
 15. Kang, K., Kim, S. C., Hwang, Y. K., Park, E. T. and Kim, C. J., 1995, The Neutral Stability of Rotating Disk Flows, *Proceeding of the KSME Thermal and Fluid Engineering Division(Korean)*, pp. 146-150.
 16. Hwang, Y.-K., Kim, S. C., Park, E. T. and Kim, C. J., 1997, The Stability of Rotating Disk Flows, *Proceedings of the KSME 1997 Spring Annual Meeting B (Korean)*, pp. 351-356.
 17. Faller, A. J., Yang, S. T. and Piomelli, U., 1989, Instability of the KEB Boundary Layers, *Tech. Note BN-1102, Inst. Phys. Sci. and Tech., U. of Maryland.*
 18. Hwang, Y-K, 1996, Stability of Buoyancy-Induced Flows Adjacent to a Vertical Isothermal Surface in Cold Pure Water, *KSME Journal*, Vol. 10, No. 4, pp. 498-508.
 19. Bader, G. and Ascher, U., 1985, A New Basis Implementation for a Mixed Order Boundary O.D.E. Solver, *Tech. Rep. 85-11, Dept. of Computer Science, U. of British Columbia, Vancouver, Canada.*
 20. Hwang, Y.-K. and Lee, Y.-Y., 1999, A Theoretical Flow Instability of the Kármán Boundary-Layer, *Proceedings of the KSME 1999 Fall Annual Meeting B (Korean)*, pp. 737-742.