

탄성 지지된 판구조 해석을 위한 매크로 요소의 개발

Development of Macro-Element for the Analysis of Elastically Supported Plates

강 영 종* 박 남 회** 양 기 재*** 최 진 유****
Kang, Young-Jong Park, Nam-Hoi Yang, Gi-Jae Choi, Jin-Yu

요 지

일반적으로 보에 의해서 탄성 지지된 등방성 판은 슬래브교(Slab Bridge)나 거더교(Slab on Girder Bridge)와 같은 교량의 상부구조를 형성하게 된다. 그러나 이러한 탄성 지지된 등방성 판에 대한 해석은 주로 고정 지지된 경계 조건만을 이용하여 이루어 졌으며, 근래에 제시된 해석방법에서도 판 경계의 처짐 형상을 가정하거나 하중 위치를 고정한 상태에서 정해를 유도하므로 탄성지점인 보와 판의 상호관계를 정확하게 묘사하지 못하고 있다. 또한 유한 요소법을 이용한 해석은 정확한 결과를 얻을 수 있는 반면, 많은 해석시간을 요하는 문제점을 안고 있다. 따라서, 본 연구에서는 조화해석법을 적용하여 보와 등방성 판의 매크로 요소(Macro Element)의 변위 함수를 구성하고, 이를 판의 탄성 지점에서의 평형방정식을 이용해 계산함으로써 단시간 내에 전체 시스템의 응답을 결정할 수 있는 해석법을 개발하고 이를 프로그래밍하였다. 또한, 본 해석법의 타당성을 검증하기 위해서 다양한 하중 조건과 판의 형상비, 탄성 지점 조건 등을 가진 교량 바닥판에 대한 해석을 수행하였으며, 해석법의 단순성과 해석시간의 단축으로 교량 바닥판과 거더에 대한 매개변수 분석 등에 사용될 수 있을 것이다.

핵심용어 : 매크로 요소, 조화해석법, 처짐각법, 탄성 지지된 판

Abstract

The superstructure of general bridge like slab bridge and slab on girder bridge is composed of elastically supported isotropic plate. The objective of this study is to develop the new analysis method for elastically supported plate with general edge beam or girder(boundaries) under arbitrary out of plane loading. The displacement solutions for the macro-element of plate and beam are obtained by solving for the unknown interactive forces and moments at the beam or nodal line locations after satisfying equilibrium equation along the nodal line. The displacement functions for macro-elements are proposed in single Fourier series using harmonic analysis, and the equilibrium equations of nodal line are composed by using slope-deflection method. The proposed analysis method is programmed by MS-Fortran and can be applied to all types of isotropic decks with bridge-type boundaries. Numerical examples involving elastically supported plates with various aspect ratio, loading cases, and bridge-type boundary conditions are presented to demonstrate the accuracy of this program. The major advantage of this new analysis method is the development of a simple solution algorithm, leads to obtain rapidly responses of bridge deck system. This proposed method can be used in parametric study of behavior of bridge decks.

Keywords : macro element, harmonic analysis, slope-deflection method, elastically supported plates

* 정회원 · 고려대학교 토목환경공학과, 부교수

** 고려대학교 토목환경공학과, 박사과정

*** 만영엔지니어링 부설연구소, 연구원

**** 학생회원 · 고려대학교 부설 방재과학기술 연구센터, 선임연구원

• 이 논문에 대한 토론을 2000년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

슬래브교나 거더교의 교량 바닥판은 Edge Stiffening과 거더에 의해 탄성 지지된 등방성 판으로 모델링될 수 있으며, 이러한 등방성 판의 해석에 기초한 바닥판의 설계 휨모멘트가 제시되고 있다. 따라서, 지지조건에 따른 등방성 판의 응답을 정확히 계산하기 위한 연구가 계속되어 왔다.

Westergaard(1930)는 양단이 단순지지된 종방향 무한판의 처짐방정식과 휨모멘트를 Nádidi의 해법에 근거하여 계산하였으며, 이식은 AASHTO에 도입되어 교량 바닥판의 설계 휨모멘트를 계산하는데 사용되어 왔다.³⁾ 그러나 이는 보의 탄성지점 효과를 고려하지 못하므로 실제 교량 상부구조의 거동을 정확히 묘사하지 못하고 있다. Timoshenko와 Woinowsky-Krieger(1959)는 Levi의 해법을 적용하여 양단이 단순 지지되어 있고 나머지 양단은 탄성 지지되어 있는 등방성 판의 처짐방정식을 유도했다. 이 식은 판에 등분포 하중이 작용할 경우의 수식적인 정해를 유도한 것으로, 단순판의 탄성 지점 효과는 고려하였으나 보의 비틀림 강성을 고려치 못한 단점이 있다. 교량 바닥판의 탄성 지점 효과를 고려하기 위해서 판의 거동을 보의 처짐이 구속된 경우와 보의 탄성지점 효과를 중첩하여 해석하는 방법이 제시되었다. Bakht와 Jeager (1985)는 보의 처짐이 구속된 경우는 등방성 판이론을 이용해 응답을 계산하고 탄성지점 효과는 탄성지점인 보의 강성을 횡방향으로 등분포시킨 직교이방성판의 거동을 중첩하여 해석하였다.⁶⁾ 그러나 직교이방성판 이론에 의한 해석은 해석방법이 어렵고 보의 간격이 증가함에 따라 직교이방성판으로의 치환에 따른 오차가 크게 발생하므로 정확성이 떨어지게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 Cao(1996)는 탄성지점의 처짐량을 직교이방성 판이론을 통해 계산하고 그 값을 다시 등방성 판에 대입하여 탄성지점의 처짐에 의해 발생하는 판의 응답을 결정하였으나⁴⁾, 이 방법은 3거더로 구성된 바닥판에 하중이 각 거더의 중앙에 재하될 때만을 기준으로 산정한 식이며, 4거더 이상으로 구성된 바닥판이나, 상대처짐을 제어하기 위해 설치되는 가로보 등에 대해서는 연구가 수행되지 않아 일반적이지 못하다고 볼 수 있다.

이상과 같이 탄성 지점을 가진 연속판에 대한 해

석은 아직까지 탄성지점인 보와 판의 상호관계를 정확히 묘사하고 있지 못하며 실제 교량 바닥판의 거동을 분석할 수 있는 일반적이고 단순화된 해석방법을 제시하지 못하고 있는 실정이다. 따라서 본 연구에서는 탄성지지된 연속판의 해석을 위해 1차원 Fourier급수를 이용한 조화해석법으로 매크로 요소의 응답을 결정하고 판과 보의 상호관계를 변위법인 처짐각법의 원리를 이용해 결정함으로써 단시간내에 탄성지점에 의한 판의 응답과 보 자체의 응답을 계산할 수 있는 방법을 개발하여 프로그램화하였다. 또한 탄성 지점 효과를 구속하는 교량 상부구조의 가로보나 수직브레이싱 등의 효과와 연속교와 같이 탄성지점에 내부지점이 있는 경우도 고려하여 수식을 유도하였다. 본 해석법의 타당성을 검증하기 위해서 다양한 하중 조건과 판의 형상비, 탄성 지점 조건 등을 가진 교량 바닥판에 대한 해석을 수행하였으며, 해석법의 단순성과 해석시간의 단축으로 교량 바닥판과 거더에 대한 매개변수 분석 등에 사용될 수 있을 것이다.

2. 조화해석법을 적용한 매크로 요소의 응답 결정

조화해석법은 구조물에 작용하는 하중을 Fourier 변환(Fourier Transform)에 의해 조화함수의 합으로 표현함으로써, 각 조화함수에 따라 구조물의 거동을 분리시켜 해석하는 방법이다.⁶⁾ 평판에 작용하는 하중이 조화함수의 합으로 표현될 경우, 각 하중에 따른 판과 보의 매크로 요소의 응답도 하중과 같은 주기를 갖는 조화함수로 표현되며, 각 하중에 의한 응답을 중첩시키면 각 요소의 최종적인 응답을 결정할 수 있다.

그림 1과 같이 y축과 평행한 양단이 단순지지되어 있고, x축과 평행한 양단(A, B)은 보로 지지되어 있거나 어떤 임의의 지지조건을 가지고 있는 판이 x축 방향의 조화하중을 받고 있는 경우, 판의 처짐은 식(1)과 같이 표현할 수 있다. 이를 판이론에 따라 정리하면 식(2)와 같이 하중과 같은 주기를 갖는 조화함수의 응답형태를 얻을 수 있다.

판의 지점이 되는 보에도 마찬가지로 같은 주기의 조화하중이 작용하게 되며 그에 따라 보에 발생하는 휨모멘트와 비틀림 모멘트 등을 계산하면 식

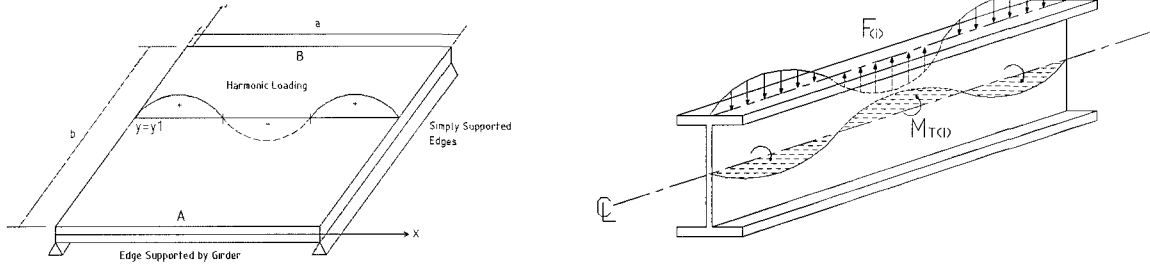


그림 1 조화하중이 작용하는 판과 보의 매크로 요소

(3)과 같다.

$$w = Y_n \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \quad (1)$$

$$\text{처짐각} : \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{n\pi}{a} Y' \sin \xi$$

$$\text{모멘트} : M_y = D \frac{n^2 \pi^2}{a^2} (-Y'' + \nu Y) \sin \xi$$

$$\text{전단력} : V_y = D \frac{n^3 \pi^3}{a^3} (Y' - Y''') \sin \xi$$

$$\text{반력} : R_y = D \frac{n^3 \pi^3}{a^3} [(2 - \nu) Y' - Y'''] \sin \xi$$

$$\text{여기서, } \eta = \frac{n\pi y}{a}, \quad \xi = \frac{n\pi x}{a}, \quad D = \frac{E_s t^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2)$$

$$F_{(i)} = U_{(i)} \Delta_{(i)} = \frac{n^4 \pi^4}{a^4} E_g I_{(i)} \Delta_{(i)0} \sin \xi$$

$$M_{(i)} = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} E_g I_{(i)} \Delta_{(i)0} \sin \xi$$

$$V_{(i)} = \frac{n^3 \pi^3}{a^3} E_g I_{(i)} \Delta_{(i)0} \cos \xi$$

$$\Phi_{(i)} = \Phi_{(i)0} \sin \xi$$

$$M_{T(i)} = GJ_{(i)} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \Phi_{(i)0} \sin \xi$$

$$M_{T(i)} = L_{(i)} \Phi_{(i)0} \sin \xi, \quad L_{(i)} = GJ_{(i)} \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

여기서, (i) : 탄성 지점 번호

Φ : 판의 처짐 각

GJ : 거더의 비틀림 강성

E_g : 보의 탄성계수

I : 단면 2차모멘트

(3)

3. 처짐각법을 이용한 탄성 지지된 판의 해석

3.1 개요

그림 2는 조화하중을 받는 탄성 지지된 판을 처짐각법을 이용해 해석하는 과정을 도식적으로 보여주고 있다. 보에 의해 연속 지지된 판은 라멘 구조물과 같이 묘사할 수 있으며, 판의 각 지점은 라멘의 절점(A,B,C,D)과 같이 생각할 수 있다. 따라서 판의 지점모멘트는 라멘의 절점모멘트와 같이 처짐각과 처짐에 일정한 강성계수(Stiffness Factor)가 곱해진 형태로 표현할 수 있으며, 지점의 처짐현상은 라멘 구조물의 가로흔들이(Sidesway)와 같이 묘사할 수 있다. 그림 2에서 가로흔들이가 있는 라멘 구조물은 가로흔들이가 구속된 상태에 하중이 작용하는 경우(a)와 구조물에 가로흔들이만 작용하는 경우(b)를 중첩시켜 해석할 수 있으며, 가로흔들의 크기는 수평력의 평형방정식을 이용해 계산하게 된다. 탄성 지지된 판에서도 라멘과 같이 거동을 분리하여 해석할 수 있다. 즉, 보의 처짐이 구속된 상태에서 조화하중만 작용하는 경우(a)와 하중과 같은 주기를 갖는 조화함수 형태의 지점 변위가 발생하는 경우(b)로 구분할 수 있다. 이 경우, 보의 변위는 보에 작용하는 수직력의 평형식을 이용해 계산할 수 있다.

따라서, 처짐각법을 이용해 탄성지지된 판을 해석하기 위해서는 조화하중이 작용할 경우의 판의 고정단 모멘트(Fixed End Moment)와 조화함수의 단위처짐각, 단위처짐이 발생할 경우의 강성계수(Stiffness Factor)를 미리 결정해 둘 필요가 있다.

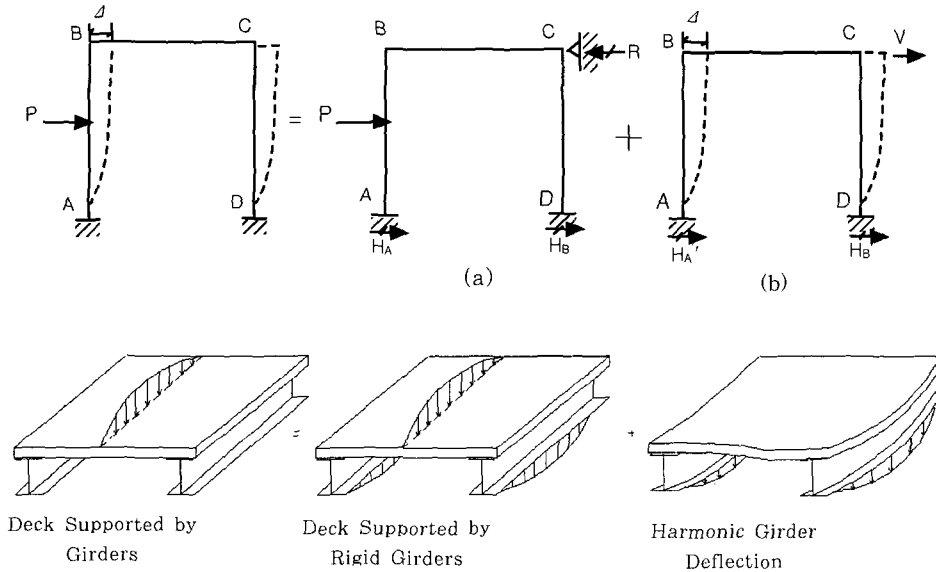


그림 2 처짐각법을 이용한 탄성지지된 판의 해석

3.2 판의 강성계수(Stiffness Factor of Plate)

3.2.1 지점에 조화함수의 처짐각이 발생하는 경우

그림 1과 같이 양단이 단순 지지된 판의 지점 B에 $\phi = \phi_0 \sin \xi$ 의 처짐각이 발생하고, 지점 A는 처짐과 처짐각이 구속된 고정단(Fixed Support)인 경우 판의 경계조건은 식(4)와 같고, 이 경계 조건을 이용하여 양 지점의 모멘트와 반력을 계산하면 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$y=0 \text{에서 } \phi = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \Delta = w = 0$$

$$y=b \text{에서 } \phi = -\frac{\partial w}{\partial y} = \phi_0 \sin \xi, \Delta = w = 0 \quad (4)$$

$$y=0 \text{에서 } M = M_y = -kK\phi_0 \sin \xi$$

$$R = R_y = -qQ\phi_0 \sin \xi$$

$$K = 2\beta \left[\frac{\sinh \beta \cosh \beta - \beta}{\sinh^2 \beta - \beta^2} \right] \frac{D}{b}$$

$$k = \frac{\beta \cosh \beta - \sinh \beta}{\sinh \beta \cosh \beta - \beta}$$

$$y=b \text{에서 } M = M_y = K\phi_0 \sin \xi$$

$$R = R_y = Q\phi_0 \sin \xi$$

$$Q = \beta^2 \left[\frac{\sinh^2 \beta + \beta^2}{\sinh^2 \beta - \beta^2} + \nu \right] \frac{D}{b^2}$$

$$q = \frac{2\beta \sinh \beta}{[\sinh^2 \beta + \beta^2 + \nu(\sinh^2 \beta - \beta^2)]} \quad (5)$$

식(5)에서 K, Q는 판의 형상을 결정하는 a, b와 횡방향 휨강성 D에 의해서 결정되는 강성계수로 지점에 단위처짐각이 발생하게 하는 모멘트와 반력을 나타낸다. 반면에 k, q는 판의 형상에 의해서만 결정되는 계수로 지점모멘트와 반력을 다른 지점으로 전달시키는 비율을 나타낸다.

3.2.2 지점에 조화함수의 처짐이 발생하는 경우

그림 1과 같이 양단이 단순 지지된 판의 지점 B에 $\Delta = \Delta_0 \sin \xi$ 의 처짐이 발생하고, 지점 A는 처짐과 처짐각이 구속된 고정단인 경우 판의 경계조건은 식(6)과 같고, 이 경계 조건을 이용하여 양 지점의 모멘트와 반력을 계산하면 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=0 \text{에서 } \phi = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \Delta = w = 0$$

$$y=b \text{에서 } \phi = -\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \Delta = w = \Delta_0 \sin \xi \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 y=0 \text{에서 } M &= M_y = -qQ\Delta_0 \sin \xi \\
 R &= -R_y = -tT\Delta_0 \sin \xi \\
 T &= 2\beta^3 \left[\frac{\sinh \beta \cosh \beta + \beta}{\sinh^2 \beta - \beta^2} \right] \frac{D}{b^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y=b \text{에서 } M &= M_y = Q\Delta_0 \sin \xi \\
 R &= R_y = T\Delta_0 \sin \xi \\
 t &= \frac{\beta \cosh \beta + \sinh \beta}{\sinh \beta \cosh \beta + \beta} \quad (7)
 \end{aligned}$$

위 식에서, T, Q는 판의 형상비와 휨강성에 의해서 결정되는 강성계수로 단위처짐이 발생하게 하는 반력과 모멘트를 나타낸다. 또한, q, t는 한 지점에 처짐에 의해서 모멘트와 반력이 작용할 경우 다른 지점으로 그 값이 전달되는 비율을 나타내는 전달계수(carry-over factor)역할을 하고 있다. 그림 3은 판의 강성계수를 도식적으로 표현하고 있다.

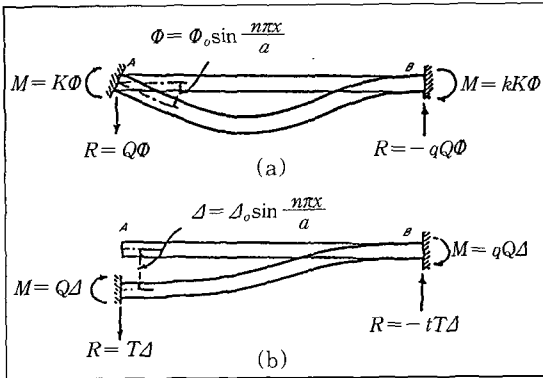


그림 3 판의 강성계수

3.3 판의 고정단 모멘트 및 반력

처짐각법을 적용하기 위해서는 조화하중이 작용할 경우 판 양 지점의 고정단 모멘트(Fixed-End Moment)와 고정단 반력(Fixed-End Reaction)을 결정해야 한다.

교량 바닥판에는 실제로 트럭하중에 의한 집중하중과 차선의 등분포 재하하중, 바닥판 자체의 사하중 등이 작용하므로 이를 조화하중으로 표현할 경우, 조화함수의 선하중과 분포하중으로 분류할 수 있다. 따라서, 이 절에서는 조화함수 형태의 선하중

과 분포하중이 작용할 경우에 판의 양단의 고정단 모멘트와 고정단 반력을 산정하고자 한다.

3.3.1 조화함수의 선하중이 작용하는 경우

그림 1과 같이 교축직각 방향의 양단(변A,B)은 처짐과 처짐각이 구속된 고정지점이고 교축방향의 양단은 단순지지되어 있는 바닥판에 $F = F_0 \sin \xi$ 의 선하중이 $y = y_1$ 에 작용할 경우, 고정단에 작용하는 모멘트는 영향선의 개념과 식(8)과 같은 상반처짐의 법칙(Reciprocal Deflection Theorem)을 이용하여 계산할 수 있다.

$$\begin{cases} \Phi = \Phi_0 \sin \xi = -F = -F_0 \sin \xi \\ w = w_0 \sin \xi = M^F = M_0^F \sin \xi \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \Delta = \Delta_0 \sin \xi = -F = -F_0 \sin \xi \\ w = w_0 \sin \xi = R^F = R_0^F \sin \xi \end{cases} \quad (9)$$

식(8)에 의해서 판에 작용하는 고정단 모멘트는 지점에 $\Phi = \Phi_0 \sin \xi$ 의 처짐각이 발생할 경우 판의 처짐(w)을 구하는 문제로 단순화 되며, 이에 따라 각 고정단에 발생하는 모멘트는 식(10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 y=0 \text{에서 } M^F &= M_0^F \sin \xi \\
 M_0^F &= -\frac{F_0 a}{n\pi} \frac{\sinh \beta (\eta_1 \sinh a) - \beta a \sinh \eta_1}{\sinh^2 \beta - \beta^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y=b \text{에서 } M^F &= M_0^F \sin \xi \\
 M_0^F &= -\frac{F_0 a}{n\pi} \frac{\alpha \sinh \beta \sinh \eta_1 - \beta \eta_1 \sinh \alpha}{\sinh^2 \beta - \beta^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{여기서, } \alpha &= \beta - \eta_1 = n \frac{\pi}{a} (b - y_1) \\
 y_1 &= \text{선하중작용위치} \quad (10)
 \end{aligned}$$

선하중에 의해 고정단에 발생하는 반력은 식(9)의 상반관계에 의해서 지점에 $\Delta = \Delta_0 \sin \xi$ 의 처짐이 발생할 경우 판의 처짐(w)을 구하는 문제로 단순화되며, 이에 따라 각 고정단에 발생하는 반력은 식

(11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$y=0 \text{에서 } R^F = R_0^F \sin \xi$$

$$R_0^F = -\frac{F_0}{\sinh^2 \beta - \beta^2} \left\{ \sinh \beta (\sinh \alpha + \eta_1 \cosh \alpha) - \beta (\sinh \eta_1 + \alpha \cosh \eta_1) \right\}$$

$$y=b \text{에서 } R^F = R_0^F \sin \xi$$

$$R_0^F = -\frac{F_0}{\sinh^2 \beta - \beta^2} \left\{ \sinh \beta (\sinh \eta_1 + \alpha \cosh \eta_1) - \beta (\sinh \alpha + \eta_1 \cosh \alpha) \right\}$$

여기서, $\alpha = \beta - \eta_1 = n \frac{\pi}{a} (b - y_1)$ (11)

3.3.2 조화함수의 분포하중이 작용하는 경우

판전체에 $p = p_0 \sin \xi$ 의 분포하중이 작용할 경우, 특별해 w_p 는 판의 지배미분방정식에 의해서 $w_p = (p_0 a^4 / Dn^4 \pi^4) \sin \xi$ 로 표현된다. 이 처짐에 의해서 판이 고정단 변 A, B ($y=0, y=b$)에서는 아래와 같은 처짐과 모멘트 등이 발생하게 된다.

$$\begin{cases} w_p = \frac{p_0 a^4}{Dn^4 \pi^4} \\ \phi = -\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases} \begin{cases} M_y = \nu \frac{p_0 a^2}{n^2 \pi^2} \sin \xi \\ R_y = 0 \end{cases} \quad (12)$$

그러나, 고정지점에서의 처짐은 구속되어 있으므로 경계조건을 나타내는 일반해 w_h 는 $y=0, y=b$ 에서 w_p 의 처짐을 상쇄하는 만큼 작용해야 한다. 따라서 판의 양 고정단에 발생하는 지점 모멘트는 w_p 에 의한 것과 양 지점에 $w_p = -(p_0 a^4 / Dn^4 \pi^4) \sin \xi$ 의 처짐이 발생할 경우 지점 모멘트의 합으로 표현된다. 이에 따라 판 전체에 조화함수의 분포하중이 작용할 경우 고정단 모멘트와 반력은 식(13)과 같이 표현할 수 있다.

$$M^F = -(Q - qQ) p_0 \frac{a^4}{Dn^4 \pi^4} \sin \xi + \nu \frac{p_0 a^2}{n^2 \pi^2} \sin \xi$$

$$R^F = -(T - tT) \frac{p_0 a^4}{Dn^4 \pi^4} \sin \xi \quad (13)$$

3.4 처짐각법의 적용

3.4.1 부호 및 기호 정의

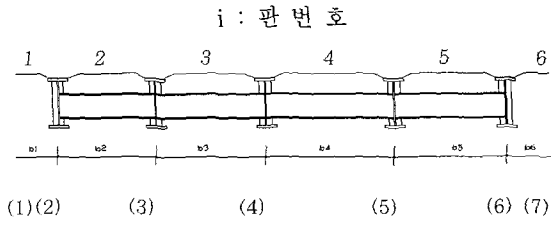


그림 4 탄성 지지된 등방성판의 부호 및 기호정의

3.4.2 처짐이 구속된 보에 연속 지지된 판의 거동

탄성지점인 보의 처짐이 구속된 경우, 처짐각법을 적용하여 판의 지점부에 작용하는 모멘트와 반력을 계산하면 각 지점의 조화함수의 처짐각과 조화하중에 의한 고정단 반력의 합으로 표현할 수 있다. 따라서 i 번 판의 양단의 모멘트와 반력을 계산하면, 식(14)와 같이 나타낼 수 있다.

- i 번 판의 양단의 모멘트

$$M_{(i)}^i = [M_{(i)0}^{Fi} + K_i \phi_{(i)0} + k_i K_i \phi_{(i+1)0}] \sin \xi$$

$$M_{(i+1)}^i = [M_{(i+1)0}^{Fi} + K_i \phi_{(i+1)0} + k_i K_i \phi_{(i)0}] \sin \xi \quad (14)$$

- i 번 판의 양단의 모멘트-

$$R_{(i)}^i = [R_{(i)0}^{Fi} + Q_i \phi_{(i)0} + q_i Q_i \phi_{(i+1)0}] \sin \xi$$

$$R_{(i+1)}^i = [R_{(i+1)0}^{Fi} - Q_i \phi_{(i+1)0} - q_i Q_i \phi_{(i)0}] \sin \xi \quad (15)$$

그림 5와 같은 탄성 지지된 판에서 각 지점의 모멘트 평형을 이용하여 평형방정식을 구성할 수 있으며, 각 평형방정식을 조합하여 식(16)과 같은 행렬

식을 구성할 수 있다. 이 식에서 각 지점의 처짐각을 계산하고 식(14),(15)에 재대입하면 보의 처짐이 구속된 경우 판의 지점부 모멘트와 수직반력을 계산할 수 있다.

$$M_{(i)}^{i-1} + M_{(i)}^i + M_{T(i)} = 0 \Leftrightarrow [K]\{\phi_{(i)}\} = \{-M_{(i)S}^F\} \quad (16)$$

3.4.3 탄성 지점의 처짐에 의한 판과 보의 거동

탄성지점인 보의 처짐이 발생할 경우 처짐각법을 적용하면, 판의 지점부 모멘트와 반력은 지점의 처짐과 처짐각에 판의 강성계수가 곱해진 형태로 식(17),(18)과 같이 나타낼 수 있다.

- i 번 슬래브 양단의 모멘트-

$$M_{(i)}^{di} = [Q_i \Delta_{(i)} - a_i Q_i \Delta_{(i+1)} + K_i \phi_{(i)}^d + k_i K_i \phi_{(i+1)}^d] \sin \xi$$

$$M_{(i+1)}^{di} = [-Q_i \Delta_{(i+1)} + a_i Q_i \Delta_{(i)} + K_i \phi_{(i+1)} + k_i K_i \phi_{(i)}] \sin \xi \quad (17)$$

- i 번 슬래브 양단의 수직반력-

$$R_{(i)}^{di} = [T_i \Delta_{(i)} - t_i T_i \Delta_{(i+1)} + Q_i \phi_{(i)}^d + a_i Q_i \phi_{(i+1)}^d] \sin \xi$$

$$R_{(i+1)}^{di} = [T_i \Delta_{(i+1)} - t_i T_i \Delta_{(i)} - Q_i \phi_{(i+1)}^d - a_i Q_i \phi_{(i)}^d] \sin \xi \quad (18)$$

보의 처짐이 발생할 경우에는 각 지점에 처짐(Δ)

와 처짐각(ϕ)의 두 개의 미지수를 갖게 되므로 그림 5, 그림 6과 같이 지점의 모멘트 평형과 보의 수직력 평형식을 모두 사용하여야 하며, 각 지점의 평형 방정식을 조합하여 식(19)와 같은 행렬식을 구성할 수 있다. 이 식을 이용하여 각 지점의 처짐과 처짐각을 계산할 수 있으며, 식(17),(18)에 재대입함으로써 보의 처짐이 발생할 경우 각 지점의 모멘트와 수직 반력을 계산할 수 있다.

$$M_{(i)}^{di-1} + M_{(i)}^{di} + M_{T(i)}^d = 0$$

$$R_{(i)}^{\tau} + R_{(i)}^{di-1} + R_{(i)}^{di} + F_{(i)} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} [Q^d] & [K] \\ [T] & [Q^0] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta_{(i)}\} \\ \{\phi_{(i)}^d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{-R_{(i)}^{\tau}\} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

또한 보의 처짐과 회전각을 식(16)과 식(19)를 이용해 결정할 수 있으므로, 이를 식(3)에 대입하여 탄성지점의 응답을 결정할 수 있다.

3.4.4 가로보 및 내부지점의 효과

그림 4와 같이 판과 합성작용을 하지 않는 가로보와 탄성 지점인 종방향 보의 수직 변위만을 구속하는 내부지점의 효과를 고려하기 위해서, 유연도법(Flexibility Method)을 사용하여 가로보와 내부지점의 반력을 계산한 후, 가로보와 내부지점이 없는 판 구조에 외부하중과 내부 반력을 같이 작용시키는 방법을 사용하였다.

판의 유연도 행렬 $[W]$ 은 각 가로보와 내부지점 위치에 단위하중을 순차적으로 재하하여 계산할 수 있으며, 가로보와 내부지점의 반력 $\{R_c\}$ 에 의해 그

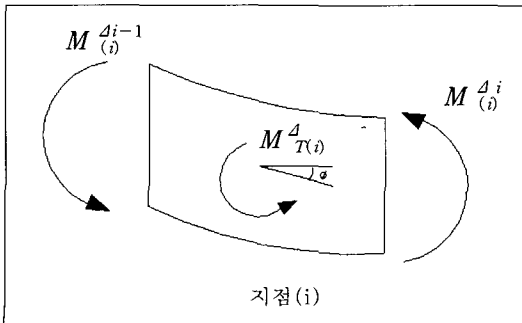


그림 5 지점의 모멘트 평형

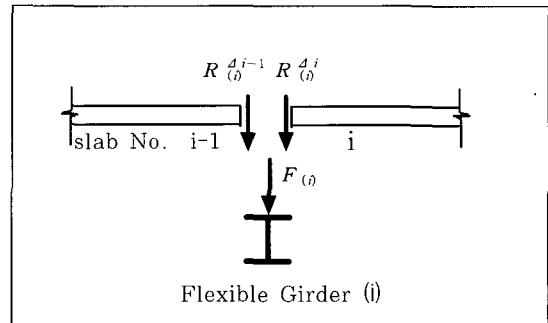


그림 6 지점의 수직력 평형

위치에 발생하는 변위 $\{D\}$ 는 $[W]\{R_c\}=\{D\}$ 와 같이 결정할 수 있다. 가로보와 내부지점 등에 의한 내부반력이 존재하지 않는 탄성 지지된 판에 외부하중이 작용할 경우 변위를 $\{dp\}$ 로 나타낸다면, 가로보 등의 내부 지점이 설치된 판의 외부하중에 의한 변위 $\{\delta\}$ 는 $\{dp\}+\{D\}$ 로 나타낼 수 있으며, 이를 가로보 자체의 평형 방정식 $\{R_c\}=[K]_{(s)}\{\delta\}_{(s)}$ 에 대입하여 식(20)을 유도할 수 있다.

$$\{R_c\}=-[[I]+[[K]_{(s)} \cdot [W]]^{-1} \cdot [[K]_{(s)} \cdot \{dp\} \quad (20)$$

4. 프로그램의 작성 및 검증

이상과 같이 조화해석법을 이용하여 판구조의 매크로 요소(판과 보)의 응답을 결정하고, 처짐각법을 적용하여 각 조화함수의 증폭계수를 결정하는 방법을 사용하여 탄성 지지된 판의 지점부 횡방향 모멘트와 보의 휨모멘트, 전단력 등을 결정할 수 있는 해석법을 개발하였으며, 이를 바탕으로 탄성 지지된 판구조 해석 프로그램인 ASGB를 작성하였다. 프로그램은 판에 작용하는 하중을 종방향의 Fourier급수로 전환시키고, 각 조화하중에 해당하는 판과 보의 강성계수를 결정하여, 탄성지점인 보의 처짐이

표 1 사하중 재하시 바닥판 모멘트검증(t·m/m)

| Y | LUSAS | ASGB |
|-------|-----------|-----------|
| 0 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 0.333 | -2.97E-02 | -2.95E-02 |
| 0.666 | -1.26E-01 | -1.25E-01 |
| 1 | -2.87E-01 | -2.87E-01 |
| 1.333 | -6.22E-02 | -5.82E-02 |
| 1.666 | 4.40E-02 | 4.82E-02 |
| 2 | 8.41E-02 | 8.83E-02 |
| 2.333 | 5.80E-02 | 6.21E-02 |
| 2.666 | -3.45E-02 | -3.03E-02 |
| 3 | -1.93E-01 | -1.89E-01 |
| 3.333 | -3.45E-02 | -3.03E-02 |
| 3.666 | 5.80E-02 | 6.21E-02 |
| 4 | 8.41E-02 | 8.83E-02 |
| 4.333 | 4.40E-02 | 4.82E-02 |
| 4.666 | -6.22E-02 | -5.82E-02 |
| 5 | -2.87E-01 | -2.87E-01 |
| 5.333 | -1.26E-01 | -1.25E-01 |
| 5.666 | -2.97E-02 | -2.95E-02 |
| 6 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |

구속된 경우 하중에 의한 판의 응답과 보의 처짐만 발생할 경우의 판의 응답을 중첩하여 판구조 전체의 응답을 계산하게 된다. 또한 조화하중의 차수를 계속 증가시켜 나가면서 판의 횡방향 모멘트와 보의 응답이 수렴도를 만족할 때까지 반복작업을 수행하게 되며, 가로보와 내부지점의 반력은 바닥판에 단위하중을 가하면서 유연도 행렬을 구성하고, 가로보와 내부지점의 강성행렬을 구성하여 계산하게 된다.

작성된 프로그램의 타당성을 검증하기 위해서 일반적인 거더교를 대상으로 범용유한요소해석 프로그램인 LUSAS와 해석 결과를 비교하였다. 바닥판은 8절점 쉘(shell)요소를 사용하였으며, 보는 3절점의 두꺼운 보(thick beam)요소를 사용하여 모델링하였다.

4.1 3거더 단순교 사하중 재하시 (L=10m)

그림 7과 같은 단면을 가진 3거더교 바닥판에 사하중을 재하했을 경우 바닥판 지점부의 횡방향 모멘트 분포에 대한 해석을 수행하였으며, 표 1과 그림 8과 같이 유한요소해석과 차이를 보이지 않고 있다.

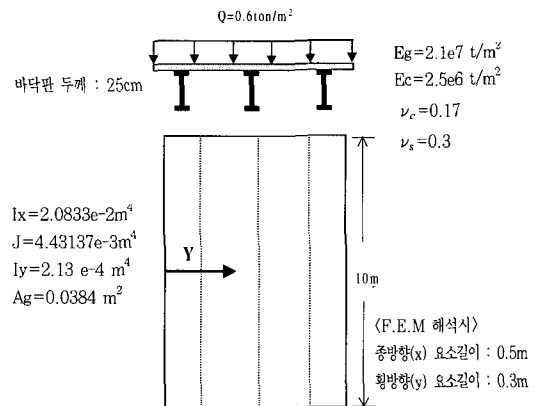


그림 7 3거더 단순교

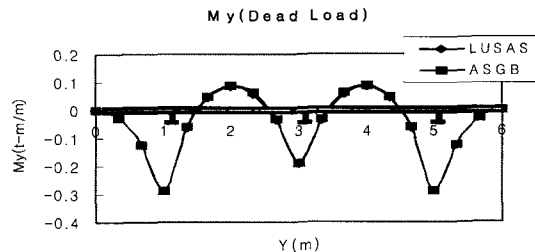
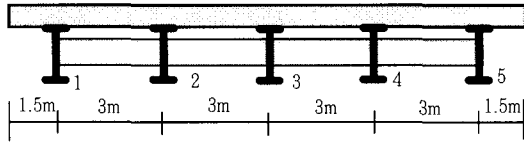


그림 8 내측지점 바닥판 모멘트의 횡방향 분포

4.2 5거더 연속교 DB-24 트럭하중 재하시(5m 간격의 가로보가 배치되는 경우)



바닥판 두께 : 25cm

$$I_x = 0.003 \text{ m}^4 \quad I_y = 0.000031 \text{ m}^4$$

$$J = 0.00015 \text{ m}^4 \quad I_{cross \ beam} = 0.0015 \text{ m}^4$$

$$L = 30 \text{ m} \quad E_g = 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$E_c = 2.5 \times 10^6 \text{ t/m}^2 \quad \nu_s = 0.3 \quad \nu_c = 0.17$$

<F.E.M 해석시>

종방향(x) 요소길이 : 1.00m

횡방향(y) 요소길이 : 0.75m

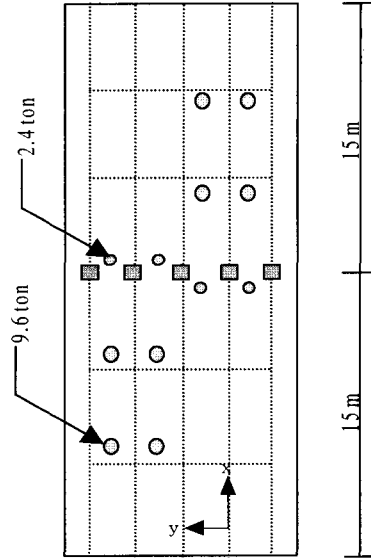
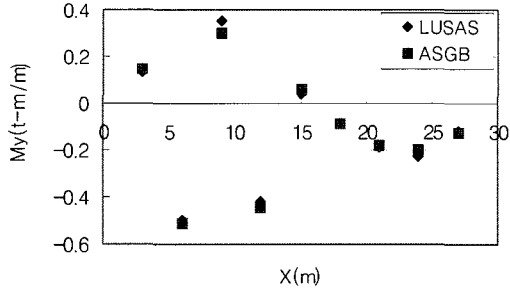


그림 9 5거더 연속교 단면 및 하중 재하위치(평면도)

My (1번 거더 상단)



My (2번 거더 상단)

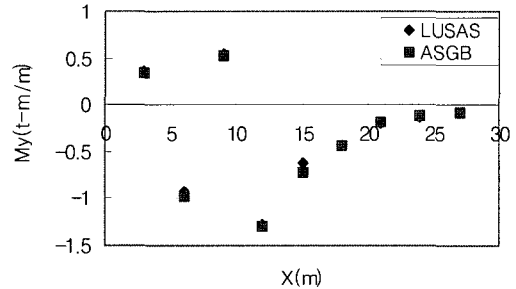
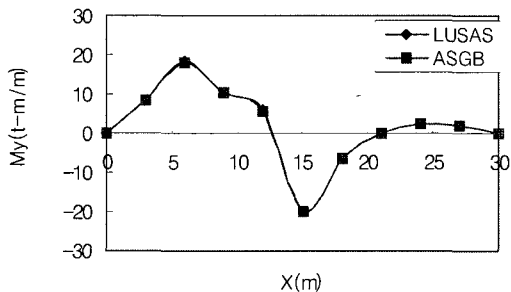


그림 10 종방향 위치에 따른 바닥판 지점부의 횡방향 모멘트

Girder Moment (No.2)



Shear Force of Girder 2

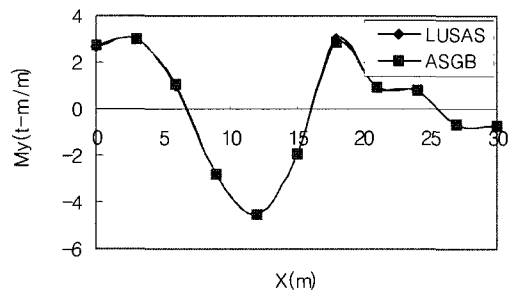


그림 11 2번 거더의 휨모멘트 및 전단력 분포

표 2 5거더 연속교의 바닥판 모멘트의 검증(t · m/m)

| X | 1번 거더 상단 | | 2번 거더 상단 | | 3번 거더 상단 | |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | LUSAS | ASGB | LUSAS | ASGB | LUSAS | ASGB |
| 3 | 1.35E-01 | 1.47E-01 | 3.56E-01 | 3.39E-01 | 1.70E-01 | 1.58E-01 |
| 6 | -4.97E-01 | -5.14E-01 | -9.30E-01 | -9.68E-01 | -5.04E-01 | -5.90E-01 |
| 9 | 3.54E-01 | 2.98E-01 | 5.44E-01 | 5.22E-01 | 2.31E-01 | 1.85E-01 |
| 12 | -4.19E-01 | -4.49E-01 | -1.27E+00 | -1.30E+00 | -8.28E-01 | -8.64E-01 |
| 15 | 4.25E-02 | 5.77E-02 | -6.15E-01 | -7.15E-01 | -4.76E-01 | -5.19E-01 |
| 18 | -8.91E-02 | -8.69E-02 | -4.34E-01 | -4.29E-01 | -8.28E-01 | -8.64E-01 |
| 21 | -1.90E-01 | -1.82E-01 | -2.05E-01 | -1.90E-01 | 2.31E-01 | 1.85E-01 |
| 24 | -2.28E-01 | -2.00E-01 | -1.37E-01 | -1.20E-01 | -5.04E-01 | -5.90E-01 |
| 27 | -1.21E-01 | -1.26E-01 | -8.39E-02 | -8.12E-02 | 1.70E-01 | 1.58E-01 |

해석 결과, 바닥판에 사하중이 작용하는 경우와 집중하중이 작용하는 경우 모두 바닥판 지점부의 휨 방향 모멘트와 거더의 모멘트 및 전단력이 유한요소 해석과 10%미만의 차이를 보여 주고 있으며, 5m 간격의 가로보가 배치된 5거더 연속교의 경우도 바닥판 모멘트와 거더의 응답이 유한요소해석과 같은 결과를 나타내고 있으므로, 본 연구에서 개발된 탄성 지지된 판구조 해석 프로그램의 타당성을 검증해 주고 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 교량 바닥 슬래브와 같은 탄성 지지된 판구조의 정확하고 빠른 해석을 위해, 조화해석법을 적용한 보와 등방성 판의 매크로 요소(Macro Element)의 변위 함수를 구성하고, 이를 판의 탄성 지점에서의 평형방정식을 이용해 계산함으로써 단시간 내에 전체 시스템의 응답을 결정할 수 있는 해석법을 개발하여 프로그램화 하였다. 본 해석법은 등방성 판과 탄성 지점인 보의 상호관계를 변위법을 이용해 결정함으로써 탄성지점 효과를 묘사하였고, 이를 통해 보의 휨강성 뿐만 아니라 비틀림 강성도 고려할 수 있었다. 또한 가로보와 같은 탄성지점 구속효과도 묘사할 수 있으므로 일반적인 교량의 상부구조의 탄성 응답을 쉽게 결정할 수 있다. 이를 위해 본 해석법을 교량의 상부구조와 같은 경계조건을 갖는 판구조에 대한 해석을 수행하였으며, 유한요소 해석과 비교한 결과, 보와 판의 해석 결과가 모두

빠른 시간내에 FEM 해석값에 수렴하는 것을 알 수 있었다.

이 연구 결과는 교량 바닥판의 거동에 영향을 미치는 여러 가지 변수들에 대한 분석에 사용될 수 있을 뿐만 아니라, 바닥틀과 바닥판의 하중분배 메커니즘을 분석하는데도 사용될 수 있으며, 이를 바탕으로 경제성과 내구성이 향상된 합리적인 교량의 상부구조 설계 방법을 개발할 수 있을 것이다.

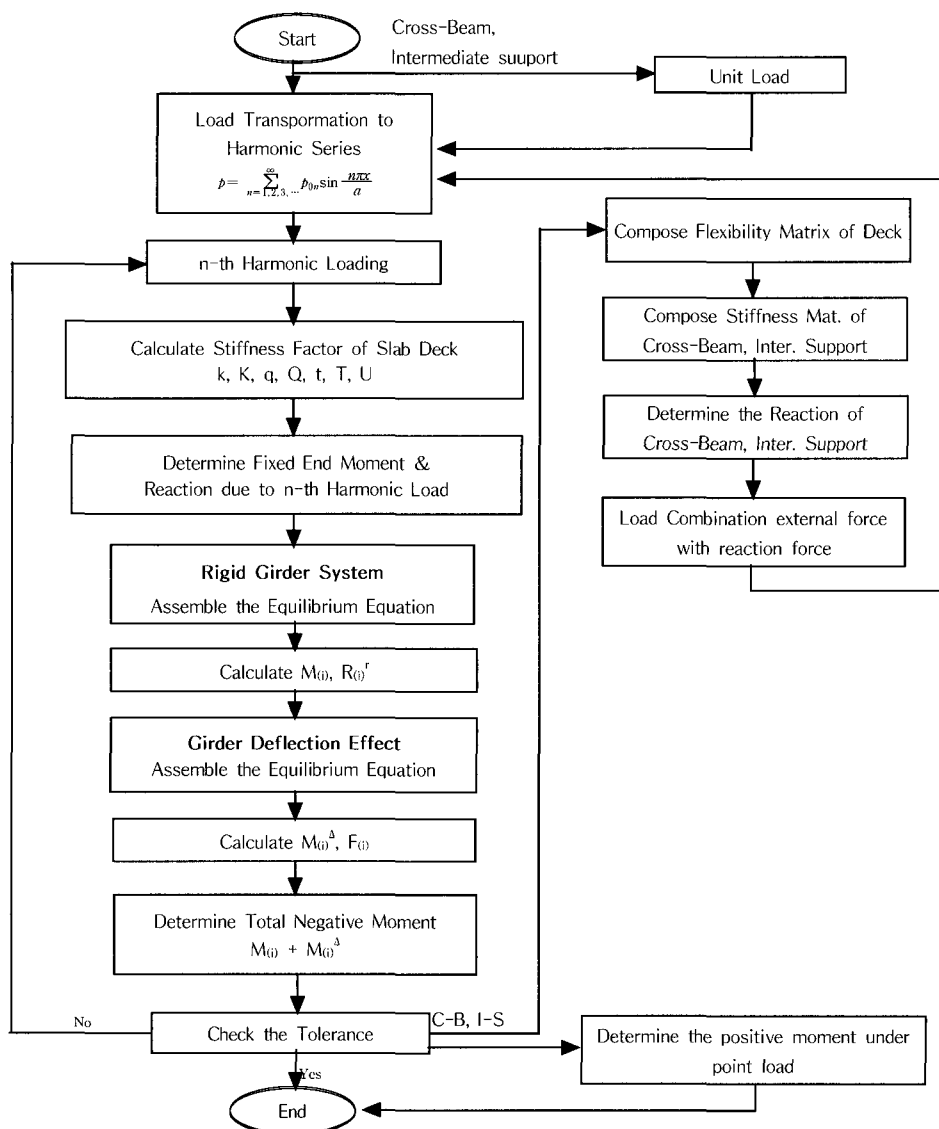
감사의 글

본 연구는 1996년도 건설교통부 국책과제 '상부철근이 부분 제거된 판형교 바닥판의 개발'의 연구를 바탕으로 작성되었으며, 연구비 지원에 깊은 감사의 뜻을 표합니다.

참 고 문 헌

1. 양기재, 최진유, 강영중, 유철수, "거더간 상대치짐을 고려한 바닥판의 해석", 한국전산구조공학회 봄 학술발표논문집, 1998, pp.141~148
2. 박남희, "탄성지점을 고려한 슬래브의 거동에 관한 연구", 석사학위 논문, 고려대학교, 1997
3. Westergaard, H. M., *Computation of Stresses in Bridge Slabs due to Wheel Loads*, Public Roads (Mar.), 1930, pp.1~23
4. Cao, L., and Shing, P. B., "Behavior of RC Bridge Decks with Flexible Girders", *Journal*

- of Structural Engineering, ASCE, 122(1), 1996, pp.11~19
5. Newmark, N. M., "Design of I-beam bridge", *Symp. of Hwy. Bridge Floors*, ASCE Trans., 114, 1949, pp.979~1072
 6. Bakht, B. and Jaeger, L.G. *Bridge Analysis by MicroComputer*, McGrawHill, Inc., 1987
 7. Roberto Lopez-Anido et al., "Macroapproach Closed-Form Series Solution for Orthotropic Plates", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 121(3), 1995, pp.420~432
 8. Rudolph Szilard, *Theory and Analysis of Plates*, Prentice Hall., Inc, 1974
- (접수일자 : 1999. 3. 15)



부 록 ASGB 프로그램 흐름도