

부분적 측정데이터를 이용한 구조시스템의 동적응답 추정기법

Estimation of Structural Dynamic Responses Using Partial Response Measurements

김 학 수* 양 경 택**
Kim, Hak-Soo Yang, Kyung-Taek

요 지

측정데이터를 유한요소모델과 같은 해석적모델과 결합하여 시스템규명기법(S.I.)을 적용하는데는 많은 문제점이 수반되며 그중 주요한 요인은 해석적모델과 실측데이터간의 자유도수의 차이이다. 일반적으로 해석적모델은 많은 수의 자유도를 지니는 반면 현장에서 측정할 수 있는 자유도는 매우 제한되어 이들을 결합하는데는 많은 문제점이 발생하고 또한 회전자유도의 경우에는 매우 측정하기 힘든 현실적 문제를 야기하고 있다. 본 연구에서는 이를 해결하기 위하여 센서를 설치하기 용이한 부분의 실측데이터와 구조계의 해석적모델을 결합하여 측정하지 못한 구조계의 동적응답을 추정하는 상태추정기법을 주파수영역에서 제시하였다. 이동하중을 받는 보의 동적 거동에 대하여 부분적 변위데이터로부터 보의 중앙점에서의 동적변위 및 회전변위를 예측하는 시뮬레이션을 수행하여 제시된 방법의 타당성을 검증하였다.

핵심용어 : 유한요소모델, 상태추정, 좌표계의 축약, λ -행렬, 이동하중, 주파수 응답

Abstract

When applying a system identification technique, which incorporates an experimental model to a corresponding finite element model of a structure, one of the major problems is the large difference in the numbers of degrees of freedom (dof) between the two models. While there are large number of dofs in a finite element model, the number of measurement points is practically limited. So it is very difficult to incorporate them. Especially rotational dofs are hard to measure. In this study a method is presented for estimating structural dynamic responses at unmeasurable locations in frequency domain. The proposed method is tested numerically and the feasibility for practical application has been demonstrated through an example structure under moving loads, where translational and rotational dofs of beam at a center point are estimated from the partial measurements of responses at accessible points.

Keywords : *finite element model, state estimation, coordinate reduction, lambda matrix, moving load, frequency responses*

* 정회원 · 호남대학교 토목공학과, 조교수
** 정회원 · 대림대학 자동화과, 조교수

• 이 논문에 대한 토론을 2000년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

대형구조물의 노후도진단을 위하여 동적제하시험을 실시하고 그 결과를 유한요소모델과 같은 해석적 모델과 결합하여 구조물의 건전성을 평가하고, 현장 실측데이터와 해석적모델을 결합하려는 S.I.(system identification)분야의 연구가 오래 전부터 진행되어 왔다.^{1),2)} 또한 이분야 연구의 최근 추세는 고유치나 고유벡터와 같은 구조물의 동특성을 기초로 하여 실측치와 해석결과의 차이로부터 구조물의 변수 규명(parameter identification)을 통하여 구조물의 손상정도 및 손상위치를 파악하는데 집중되고 있는 현실이다.^{3),4)}

이와같은 S.I.기법의 연구결과를 실용화하는데 있어 항상 수반되는 문제점은 대상구조계를 정확히 묘사하기 위하여는 수백, 수천의 자유도가 필요한 반면, 현장에서 측정할 수 있는 자유도는 현실적으로 매우 제한된다는 점이다. 또한 구조물의 회전자유도의 경우에는 모멘트와 직결되는 물리량으로 많은 엔지니어들이 측정의 필요성을 절감하고 있으나 현실적으로 측정이 힘든 것이 일반적이다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여는 대상구조물의 동특성을 정확히 표현하는 축약된 해석적모델의 수립이 선결되어야 하며 또한 제한된 지점의 측정데이터로부터 회전자유도와 같이 측정이 어렵거나 센서갯수의 제한성등으로 측정하지 못한 지점의 동적응답을 추정하는 기법이 요구되어진다.⁵⁾

본 연구에서는 현장에서 측정하기 어려운 지점에 대한 구조계의 동적응답추정을 목적으로 대상구조계의 유한요소모델을 축약하여 해석적모델로 설정한 뒤, 센서를 설치하기 용이한 지점의 부분적 측정데이터와 축약된 해석적모델을 이용하여 구조계의 동적응답을 추정하는 기법을 주파수영역에서 제시하였다. 일반적으로 시간영역에서의 상태추정기법은 비선형 상태방정식의 형태로 표현되는 반면, 주파수영역에서의 상태추정식은 선형식으로 표현되어 쉽게 적용할 수 있도록 제시하였으며 또한 반복적인 역행렬의 계산에 따른 연산상의 부담을 4차의 λ -행렬을 도입함으로써 해결할 수 있었다. 제시된 기법의 타당성을 검증하기 위하여 이동하중을 받는 보의 동적거동에 대하여 변위데이터를 이용하여 보의 중앙점에 대한 회전변위를 추정하였고 또한 이에 따른 모

멘트를 산정하여 이론치와 비교 분석하였다.

2. 수학적 모델

연속체를 유한요소모델로 정확하게 표현하기 위해서는 되도록 많은 수의 자유도가 필요한데 이들은 시간영역에서 미분방정식의 형태로 기술되므로 연산의 효율성을 높이기 위해 좌표계의 축약이 필요하다. 실제 실험에서 측정할 수 있는 자유도는 극히 소수인 반면 대상시스템의 유한요소모델에는 많은 자유도가 포함되어 있고 또한 대개의 경우 측정된 응답에는 저차의 모드만이 기여하고 있으므로 상태추정의 관점에서는 전체 자유도를 측정점과 응답을 예측코자 하는 지점이 포함된 최소의 자유도로 표현하는 것이 효과적이다. 시스템공학분야에서 개발된 많은 상태추정기법들도 소수의 자유도를 지닌 축약된 모델에 효율적으로 적용되므로 시스템의 응답특성을 잘 반영하는 축약된 해석적모델의 수립이 상태추정에 필수적이다.

좌표계의 축약에는 정적 축약과 동적 축약이 있는데 정적 축약은 관심 있는 좌표 성분(master dof)에서 정적 하중에 의한 변위가 축약 전후에 같아야 한다는 제한 조건으로 좌표계를 축약시키는 방법으로 전체 좌표계와 축약된 좌표계를 연결하는 변환행렬이 강성 행렬만으로 표현된다.^{6),7)} 이 축약법은 정적인 관점에서는 의미가 있지만 축약 전후에 고유치(eigenvalue)가 달라져 동적 응답의 관점에서는 고차 모드에서 많은 오차가 발생하게 된다. 동적 축약은 임의의 주파수 성분을 가지는 입력에 대해 관심 있는 좌표 성분에서 축약 전후의 응답이 같아야 한다는 조건으로 좌표계를 축약시키게 되는데 엄밀한 의미로는 축약 전후의 주파수 응답함수가 같아야 하므로⁸⁾ 본 연구에서는 관심 있는 주파수 영역내의 모드 벡터(modal vector)를 이용하여 좌표계를 동적축약하였다.

구조시스템의 강성과 감쇠를 고려하여 n개의 자유도를 지닌 구조계에 대해 운동 방정식을 세우면 아래와 같다.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{f\} \quad (1)$$

여기서 [M], [C], [K]는 연속체의 유한요소모델이다.

효율적으로 응답을 예측하기 위한 축약된 모델 설정을 위하여 n개의 자유도 중 측정위치와 응답의 예측에 관계되는 자유도를 $\{X_m\}$ 으로 하고 제거시킬 자유도를 $\{X_s\}$ 로 구분하여 식(1)을 정리하면 식(2)와 같다.

$$\begin{bmatrix} [M_{mm}] & [M_{ms}] \\ [M_{sm}] & [M_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_m \\ \ddot{X}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{mm}] & [C_{ms}] \\ [C_{sm}] & [C_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_m \\ \dot{X}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{sm}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_m \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

식(2)를 이용해 해석적으로 고유치 문제를 풀 뒤, 관심 있는 주파수 영역 내의 r개의 모드를 고려하여 물리 좌표계(physical coordinate)를 모드 좌표계(modal coordinate)로 변환하면 식(3)과 같이 된다.

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_m \\ X_s \end{Bmatrix} = [U] \{q\} = \begin{bmatrix} [U_m] \\ [U_s] \end{bmatrix} \{q\} \quad (3)$$

여기서 [U]는 r개의 고유 벡터이며 [U_m]은 축약된 좌표계에 대한 고유 벡터 성분이고 [U_s]는 제거될 좌표계에 대한 고유 벡터 성분이다.

일반적으로 축약된 좌표계의 수(m개)가 관심 있는 모드의 수(r개)보다 많으므로 식(3)에서 $\{X_m\}$ 에 관련된 성분만을 정리하고 일반화된 역행렬(generalized inverse)을 도입하여 모드 좌표계와의 관계를 표시하면 다음과 같다.

$$\{X_m\} = [U_m] \{q\} \quad (4)$$

$$\{q\} = [[U_m]^T [U_m]]^{-1} [U_m]^T \{X_m\} \quad (5)$$

식(5)를 식(3)에 대입하여 전체 좌표계 {X}를 축약된 좌표계 $\{X_m\}$ 로 표시하면 식(6)과 같다.

$$\begin{aligned} \{X\} &= \begin{bmatrix} [U_m] \\ [U_s] \end{bmatrix} \{q\} \\ &= \begin{bmatrix} [U_m] \\ [U_s] \end{bmatrix} [[U_m]^T [U_m]]^{-1} [U_m]^T \{X_m\} \\ &= [T] \{X_m\} \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)은 관심 있는 주파수 영역내의 r개의 모드를 고려하여 전체 좌표계 {X}를 축약된 좌표계 $\{X_m\}$ 로 표시하는 식으로 변환 행렬([T])이 r개의 모드 벡터로만 표시가 되며 고려하는 모드 갯수(r개)와 축약된 좌표계의 수(m개)가 같은 경우에는 변환 행렬이 아래와 같이 표시된다.

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] \\ [U_s][U_m]^{-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

식(7)의 변환행렬과 초기의 유한요소모델로부터 에너지 등가를 적용하여 축약된 좌표계에 대한 질량, 강성, 감쇠 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} K.E &= \frac{1}{2} \{\dot{X}\}^T [M] \{\dot{X}\} \\ &= \frac{1}{2} \{[T] \{\dot{X}_m\}\}^T [M] \{[T] \{\dot{X}_m\}\} \\ P.E &= \frac{1}{2} \{X\}^T [K] \{X\} \\ &= \frac{1}{2} \{[T] \{X_m\}\}^T [K] \{[T] \{X_m\}\} \end{aligned}$$

Loss ftn

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \{\dot{X}\}^T [C] \{\dot{X}\} \\ &= \frac{1}{2} \{[T] \{\dot{X}_m\}\}^T [C] \{[T] \{\dot{X}_m\}\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$[m] = [T]^T [M] [T]$$

$$\text{즉 축약된 행렬 } [c] = [T]^T [C] [T] \quad (9)$$

$$[k] = [T]^T [K] [T]$$

이렇게 구한 축약된 모델은 고려한 r개의 모드를 포함하는 주파수 영역에서 축약 이전의 유한요소모델과 잘 일치하게 된다.

따라서 축약된 좌표계 {x}에서 식(1)은 아래와 같이 표시된다.

$$[m] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [k] \{x\} = \{f\} \quad (10)$$

여기서 [m], [c], [k]는 차수가 m인 축약된 질량, 감쇠, 강성행렬이다.

3. 동적응답추정

추약된 해석적모델인 식(10)을 푸리에변환(Fourier Transformation)하여 주파수영역에서 표현하면 식(11)과 같다.

$$[D(\omega)] \{x(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } [D(\omega)] &= [k] - \omega^2[m] + j\omega[c] \\ \{x(\omega)\} &= F\{x(t)\} \\ \{F(\omega)\} &= F\{f(t)\} \end{aligned}$$

주파수응답함수는 동강성행렬과 식(12)의 관계에 있으며

$$\begin{aligned} [H(\omega)] &= [D(\omega)]^{-1} \\ &= [[k] - \omega^2[m] + j\omega[c]]^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

주파수응답함수의 정의로부터 식(11)은 식(13)과 같이 표현된다.

$$[D(\omega)] \{h(\omega)\} = \{I\}_l \quad (13)$$

여기서 $\{I\}_l$ 은 단위행렬 $[I]$ 의 l 번째 열

$\{h(\omega)\}$ 은 주파수응답함수 $[H(\omega)]$ 의 l 번째 열

식(13)의 주파수응답함수 벡터중 측정된 응답(M)과 추정될 응답(E)을 구분하여 표시하면

$$[D_M(\omega) \ D_E(\omega)] \begin{pmatrix} h_M(\omega) \\ h_E(\omega) \end{pmatrix} = \{I\}_l \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } [D_M(\omega)] &= [k_M(\omega) + j\omega[c_M(\omega)] \\ &\quad - \omega^2[m_M(\omega)] \\ [D_E(\omega)] &= [k_E(\omega) + j\omega[c_E(\omega)] \\ &\quad - \omega^2[m_E(\omega)] \end{aligned}$$

측정된 주파수영역의 부분적인 응답 $\{h_M(\omega)\}$ 으로부터 측정하지 못한 구조계의 응답 $\{h_E(\omega)\}$ 을 추정하기 위하여 식(14)를 이용하여 식오차(equation error)를 식(15)와 같이 정의하고 식(16)의 손실함수를 구성한다.

$$\{\varepsilon(\omega)\} = \{I\}_l - [D_M(\omega) \ D_E(\omega)] \begin{pmatrix} h_M(\omega) \\ h_E(\omega) \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\text{Minimize } \sum_k \{\varepsilon(\omega_k)\}^T \{\varepsilon(\omega_k)\} \quad (16)$$

식(15)는 실험에서 측정된 주파수응답함수와 추약된 유한요소모델간의 직교성(orthogonality)을 나타내는 식으로 M개의 측정된 응답과 대상시스템에 대한 해석적모델의 정보로부터 아래의 조건에서 매 주파수마다 측정하지 못한 응답을 추정할 수 있다.

$$\text{Minimize } \{\varepsilon(\omega)\}^T \{\varepsilon(\omega)\} \quad (16)'$$

즉

$$\{h_E(\omega)\} = [D_E(\omega)]^+ \{ \{I\}_l - [D_M(\omega)] \{h_M(\omega)\} \} \quad (17)$$

여기서 $[]^+$ 는 일반화된 역행렬로 다음과 같이 표현된다.

$$[D_E(\omega)]^+ = [[D_E(\omega)]^T [D_E(\omega)]]^{-1} [D_E(\omega)]^T$$

(m-M) x (m-M) (m-M) x m

(18)

식(17)은 부분적 측정데이터를 이용하여 측정하지 못한 구조계의 응답을 추정하는 식으로 시간영역에서의 응답을 구하기 위하여는 역푸리에변환을 수행하면 된다. 주파수영역의 해석시에는 주로 FFT 알고리즘이 사용되며 측정장비 및 관련 S/W들이 1024개(2^{10})의 주파수성분에 대하여 연산을 수행하도록 설정되어 있다. 따라서 식(17)의 추정식을 실제 문제에 적용할 경우, 추약된 해석적모델을 사용한다 하더라도 일반화된 역행렬을 각 주파수마다 반복적으로 계산하여야 하므로 연산상 많은 부담이 따른다. 본 연구에서는 이를 해결하기 위하여 4차의 λ -행렬(lambda matrix)을 도입하여¹¹⁾ 반복적인 역행렬의 계산을 고차의 고유치문제(eigenvalue problem)로 변환하여 부분합으로 연산을 쉽게 하도록 하였으며 그 결과는 다음과 같다.(부록참조)

$$[D_E(\omega)]^+ = \left[\sum_{i=1}^{4(m-M)} \frac{\{r_i\}\{q_i\}}{j\omega - \lambda_i} \right] [D_E(\omega)]^T \quad (19)$$

여기서 λ_i 는 특성행렬의 특이치 (latent value)
 r_i 는 특성행렬의 우측특이벡터 (right latent vector)
 q_i 는 특성행렬의 좌측특이벡터 (left latent vector)

4. 이동하중에 의한 보의 응답추정

본 논문에서 제시된 구조계의 동적응답 추정기법을 검증하기 위하여 교량의 경우와 같이 이동하중을 받는 보에 대하여 부분적인 측정데이터를 이용하여 측정하지 못한 지점의 동적 응답을 예측하였다. 특히 보의 회전변위는 모멘트와 직결되는 물리량으로 그 특성상 센서를 이용하여 측정하기 힘들므로 변위 응답을 이용하여 회전변위를 산정한 뒤, 이에 따른 모멘트를 구하였으며 전체적인 상태추정과정을 그림 1에 도시하였다.

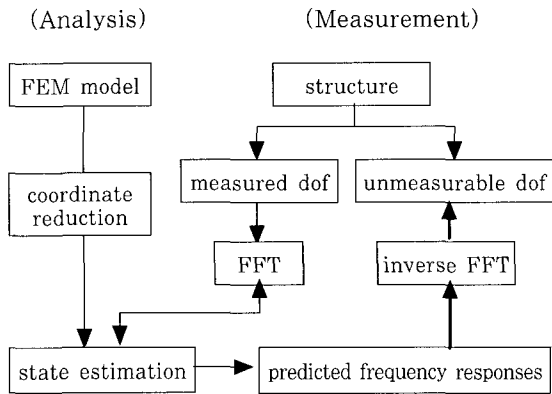


그림 1 Flow chart of state estimation

4.1 문제의 정식화

그림 2와 같이 이동하중($F_0=10N$, $u=0.5m/sec$)을 받는 보에 대하여 해석적으로 편미분방정식을 풀 뒤, $y=0.2m$ 에서의 시간에 따른 수직변위를 구하여 측정치로 가정하였으며 이 측정치와 보의 유한요소 모델을 결합하여 중앙지점에서의 변위와 회전변위를 추정하였다.

전단 변형과 회전 강성을 무시한 경우 보의 운동 방정식은 식(20)과 같다.

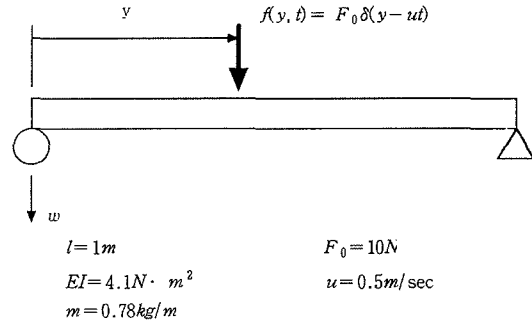


그림 2 Simply supported beam under moving load

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(y,t)}{\partial y^2} \right] + m \frac{\partial^2 w(y,t)}{\partial t^2} - f(y,t) = 0 \quad (20)$$

여기서 m 은 보의 단위길이당 질량이고 이동 하중은 Direct delta function을 사용하여 식(21)과 같이 표현할 수 있다.

$$f(y,t) = \begin{cases} F_0 \delta(y-ut) & \text{for } 0 \leq t \leq l/u \\ 0 & \text{for } t > l/u \end{cases} \quad (21)$$

양단이 단순 지지되어 있으므로 변위 및 모멘트에 대한 경계 조건은 식(22)와 같다.

$$w(0,t) = w(l,t) = 0 \quad (22-a)$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{x=0} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{x=l} = 0 \quad (22-b)$$

식(22)의 경계 조건을 지니는 식(20)의 편미분 방정식을 풀기 위해 변수 분리를 사용하여 정규화된 모드와 일반화된 좌표계로 해를 가정하면 식(23)과 같다.

$$w(y,t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_r(y) \cdot \eta_r(t) \quad (23)$$

여기서 $w_r(y)$ 는 사인함수 형태의 정규화된 r 번째 모드이고 $\eta_r(t)$ 는 일반화된 좌표계이다. 식(23)을 식(20)에 대입하고 경계조건을 고려하여 급수 형태의 해를 구한 뒤, $y=0.2m$ 에서의 수직변위를 측정치로 하여 중앙지점의 수직변위와 회전변위를 추정하였다.¹²⁾

4.2 좌표계의 축약

대상시스템을 그림 3(a)와 같이 20개의 자유도를 지니는 유한요소모델로 표시한 뒤, 측정점과 응답을 예측하고자 하는 자유도를 식(24)과 같이 주자유도로 하고 나머지 16개의 자유도를 제거한 뒤, 그림 3(b)와 같이 저차의 모드를 잘 표현할 수 있는 4개의 자유도를 지니는 모델로 축약하였다.

$$\{X_m\} = \{X_4, X_{10}, X_{11}, X_{16}\} \quad (24)$$

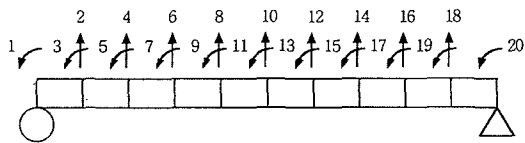
2장에서 언급한 바와 같이 전체구조계에 대한 모드 해석을 수행한 뒤, 저차의 4개 모드벡터를 이용하여 좌표계를 축약하였으며 축약된 좌표계에서 운동방정식을 구성하는 축약된 질량과 강성행렬은 다음과 같고 감쇠는 질량행렬과 비례하는 비례감쇠로 하였다.

$$[m] = \begin{bmatrix} 0.161 & 0.030 & -0.001 & 0.004 \\ 0.030 & 0.206 & 0.000 & 0.030 \\ -0.001 & 0.000 & 0.002 & 0.001 \\ 0.004 & 0.030 & 0.001 & 0.161 \end{bmatrix} \text{ kg}$$

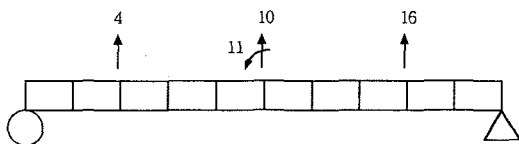
$$[k] = \begin{bmatrix} 4.297 & -1.965 & 0.574 & 0.843 \\ -1.965 & 2.434 & 0.000 & -1.965 \\ 0.574 & 0.000 & 0.193 & -0.574 \\ -0.843 & -1.965 & -0.574 & 4.297 \end{bmatrix} 1000N/m$$

$$[c] = 0.03 \times [m]$$

좌표계의 축약에는 4개의 저차 모드를 이용하였으므로 그림 4와 같이 축약된 모델의 주파수응답함수는 축약이전의 주파수응답함수와 4개의 모드에 대하여 잘 일치하고 있으며 그 이상의 고주파영역에



(a) finite element representation (20 dof)



(b) reduced model (4 dof)

그림 3 Finite element and reduced models

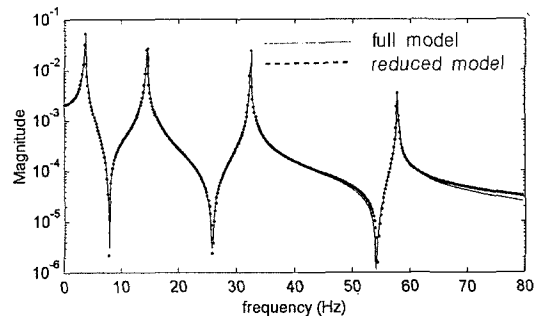
표 1 Natural frequencies of full and reduced models (Hz)

mode	1st	2nd	3rd	4th
full model	3.6014	14.4069	32.4294	57.7107
reduced model	3.6014	14.4069	32.4310	57.7106

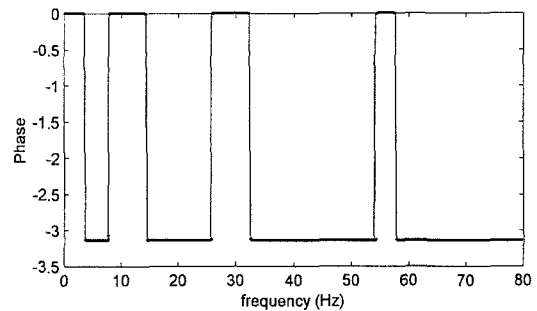
서는 약간의 오차가 발생하고 있다. 축약 전후의 모드 매개변수는 표 1과 같고 축약된 모델은 원래의 구조계를 잘 묘사하고 있다.

4.3 상태추정

이동하중문제의 해석적 결과로부터 4개의 모드를 고려하여 자유도4(y=0.2m)의 동적응답을 구한 뒤, 이를 측정치로 가정하고 주파수영역으로 변환하여 주파수응답함수를 구하면 그림 4와 같은 결과를 얻을 수 있다. 주파수영역으로의 변환에는 FFT알고리즘이 사용되었으며 2¹⁰개의 데이터를 기준으로 하였다.

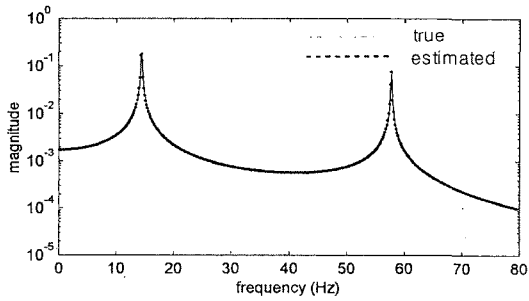


(a) magnitude

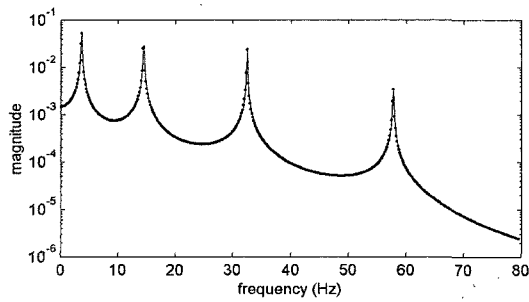


(b) phase

그림 4 Frequency response functions of the full and reduced models



(a) FRF of dof 11



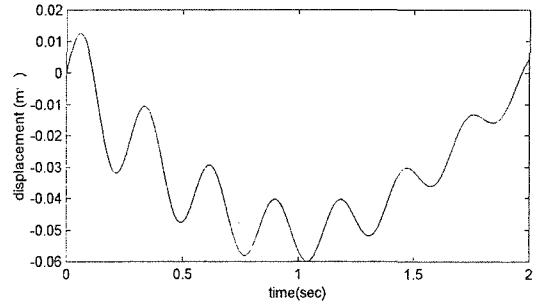
(b) FRF of dof 16

그림 5 Comparisons of true and estimated frequency response functions

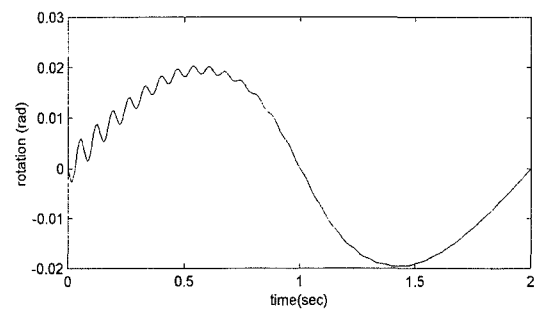
자유도4의 주파수응답함수와 축약된 유한요소모델을 결합하여 식(16)과 식(17)로부터 자유도 10, 11, 16의 주파수응답함수를 예측하면 그림 5와 같이 참값을 잘 묘사하고 있으며 특히 중앙지점의 회전자유도인 자유도11의 경우에는 동적응답에 2, 4 번째의 모드만이 반영되고 1, 3번째 모드는 영향을 미치지 않고 있음을 알 수 있다. 이는 보의 좌우대칭으로 인하여 보의 중앙점에서의 회전자유도가 홀수번째 모드에서는 정체점(node of mode)이 되기 때문으로 판단된다. 추정된 주파수응답을 역 후리에 변환하여 하중의 이동에 따른 중앙점에서의 수직변위와 회전변위인 자유도 10과 자유도 11의 응답을 구하면 그림 6과 같이 이론치와 잘 일치하고 있으며 추정된 중앙점의 회전변위로부터 다음식을 이용하여 보의 모멘트를 산정할 수 있다.

$$\frac{M(y, t)}{EI} = \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial y} \quad (25)$$

추정된 중앙점의 회전변위를 식(25)를 이용하여



(a) displacement



(b) rotation

그림 6 Estimated vertical displacement and rotation at y=0.5m

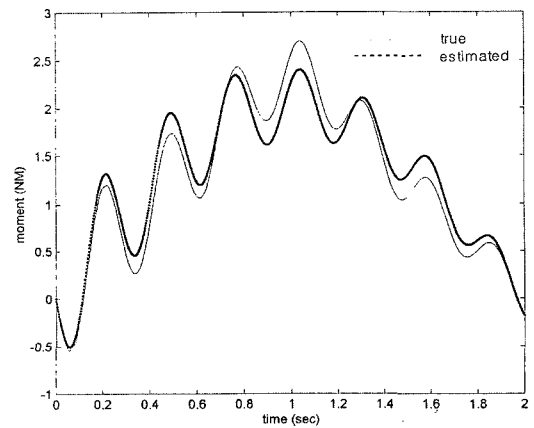


그림 7 Estimated moment of a beam due to moving load at y=0.5m

미분하면 보의 중앙점에서 시간에 따른 모멘트의 변화를 그림 7과 같이 도시할 수 있으며 이론치와 거의 일치하는 경향을 보이고 있으며 부분적으로 오차가 발생되고 있다. 이는 동적응답의 산정에 있어서

이론치에는 거의 무한대의 모드가 반영되는 반면, 상태추정시 사용되는 모델에는 4개의 모드만이 기여하기 때문에 판단된다. 보의 경우에 있어서 모멘트는 구조적 성능을 평가하는 중요한 지표로서 이동하중을 받는 경우에는 정적성분 및 하중의 이동에 따른 동적효과에 의한 영향으로 그림 7과 같이 모멘트에는 이 두가지 성분이 혼재하여 나타나게 된다.

4.4 오차해석

앞서 기술한 이동하중문제에서는 1개 지점의 측정데이터를 이용하여 보의 중앙부의 연직변위와 회전 변위를 정확히 추정하고 이로부터 하중의 이동에 따른 보의 중앙부에서의 모멘트를 구하였다. 그러나 본 기법을 실제문제에 적용할 경우, 크게 두가지의 문제점이 발생할 수 있는데 그 첫 번째가 측정잡음의 영향이다. 대개의 경우 현장측정데이터에는 랜덤한 성분의 측정잡음이 발생하게 되는데 이 측정잡음이 상태추정에 미치는 영향을 평가하기 위하여 측정치로 가정한 자유도 4의 응답에 인위적으로 5%의 잡음을 첨가하여 자유도 11과 자유도 16의 주파수 응답함수를 추정하여 그림 8에 그 결과를 도시하였으며 잡음비의 정의는 아래와 같이 하였다.

$$\text{잡음비(N/S ratio)} = \sqrt{\frac{\sum(x_M(t) - x_0(t))^2}{\sum x_0^2(t)}} * 100(\%) \quad (26)$$

여기서 $x_0(t)$ 는 잡음이 없는 신호이며 $x_M(t)$ 는 랜덤

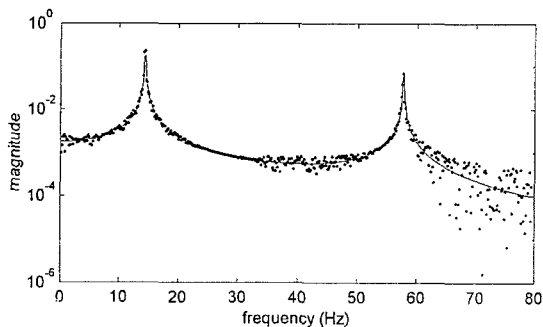
한 잡음이 포함된 신호이다. 그림에서처럼 측정잡음의 영향은 주로 고주파영역이나 반공진영역(anti-resonance region)에서 주로 나타나고 있으며 구조물의 응답과 관계되는 각 모드에서는 그 영향이 상대적으로 적음을 알 수 있다.

상태추정에서 발생가능한 또 하나의 문제점은 상태추정에 사용되는 해석적모델이 대상 구조계를 정확히 묘사하고 있는지의 여부이다. 대개의 경우 해석적모델로 유한요소모델이 많이 사용되고 있으나 물성치, 경계조건, 연결부의 특성등과 같이 불확실성(uncertainty)을 내재하고 있는 경우가 많아 질량, 감쇠, 강성행렬에 필연적으로 오차를 수반하게 되며 이로 인해 상태추정결과에 오차가 따르게 된다. 일반적으로 질량행렬보다는 강성 및 감쇠행렬에 불확실성이 상대적으로 많다고 알려져 있으므로²⁾, 본 연구에서는 다음과 같이 해석적모델의 오차를 정의한 뒤, 해석적모델의 오차가 상태추정에 미치는 영향을 평가하였다.

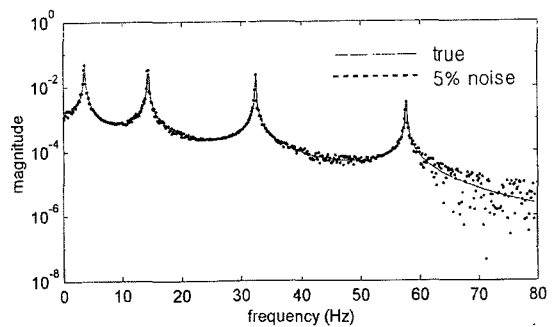
$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{\sum \sum | \Delta k_{ij} |}{\sum \sum | k_{ij} |} \times 100(\%), \\ \Delta C &= \frac{\sum \sum | \Delta c_{ij} |}{\sum \sum | c_{ij} |} \times 100(\%) \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 k_{ij} , c_{ij} 는 추약된 모델의 강성과 감쇠행렬 성분이고 Δk_{ij} , Δc_{ij} 는 인위적으로 첨가한 랜덤한 성분의 모델링오차이다.

측정잡음과 해석적모델의 오차를 변화시키면서 이동하중에 의한 보의 중앙점의 수직변위를 추정하여



(a) FRF of dof 11



(b) FRF of dof 16

그림 8 Effects of measurement noise on state estimation

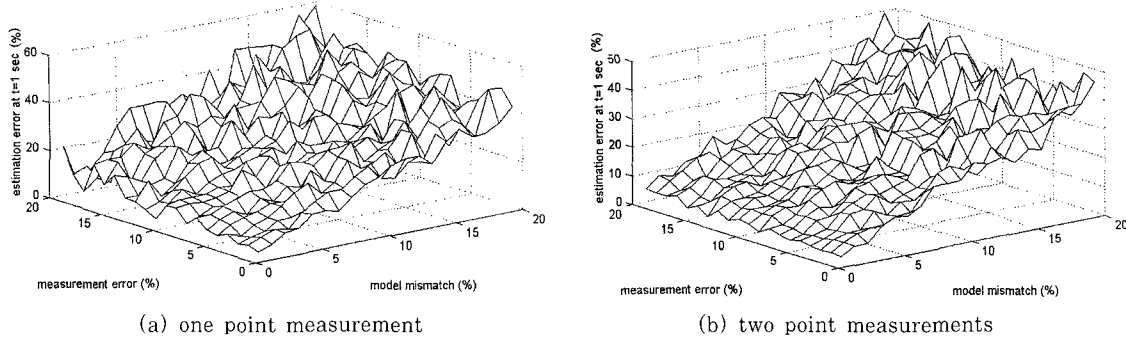


그림 9 Effects of model mismatch on state estimation

보의 최대 수직변위가 발생하는 시간, 즉 이동하중이 보의 중앙에 위치하는 시간에서의 오차를 그림 9(a)에 도시하였다. 그림에서처럼 수직변위의 추정오차는 측정잡음보다 해석적모델의 오차에 더 민감하며 해석적모델에 약 10%의 오차가 존재할 경우 응답의 추정오차는 약 20% 이상 됨을 알 수 있다. 이는 해석적모델의 오차로 인하여 해석적모델의 고유진동수가 대상구조계와 달라지기 때문으로 평가된다.

상태추정의 신뢰도를 높이기 위하여는 해석적모델의 신뢰도를 높이는 것과 더불어 측정점의 수를 늘리는 것이 중요한데 이는 주파수영역의 상태추정식인 식(17)이 최소자승법을 사용하기때문에 늘어난 측정점의 수에 의해 측정잡음의 영향이 상대적으로 감소할 수 있기 때문이다. 보의 중앙부의 상태추정을 위하여 자유도 4와 자유도 16의 측정데이터를 이용한 경우의 상태추정오차를 그림 9(b)에 도시하였으며 그림에서처럼 측정점의 수를 증가함으로써 측정잡음에 의한 영향은 줄고 있으나 해석적모델의 오차에 의한 영향은 큰 변화가 없으며 이로부터 상태추정에 사용되는 해석적모델은 대상구조계의 동적특성을 잘 묘사할 수 있는 축약된 모델이어야 함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 현장에서 측정하기 어려운 지점에 대한 구조계의 동적응답추정을 목적으로 대상구조계의 유한요소모델을 축약하여 해석적모델로 설정한 뒤, 센서를 설치하기 용이한 지점의 부분적 측정데이터와 축약된 해석적모델을 이용하여 구조계의 동적응답을 추정하는 기법을 주파수영역에서 제시하였

다. 제시된 기법을 이동하중을 받는 보의 거동에 적용하여 추정된 결과를 이론치와 비교하였으며 이로부터 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

1) 일반적으로 동적응답 추정문제는 비선형 상태방정식의 상태추정문제가 되고 이를 주파수영역에서 구현하면 선형문제로 귀착되는 반면 주파수응답을 예측할 때, 매 주파수마다 일반화된 역행렬을 반복적으로 구해야 되는 연산상 문제점이 발생되는데 본 연구에서는 4차의 s -행렬을 이용하여 이를 극복하였다.

2) 본 연구에서 제시된 선택된 고유벡터를 이용한 축약된 모델은 축약에 사용된 모드의 주파수범위 내에서는 축약이전의 대상 시스템을 정확히 묘사하고 있으며 축약전후의 동적특성이 일치하고 있다.

3) 구조계의 회전변위는 특별한 센서를 사용한다 할지라도 그 특성상 측정이 어려운 것이 현실이나 본 연구에서 제시된 상태추정기법을 적용한 결과 비교적 정확히 회전자유도에 대한 동적응답을 예측할 수 있었으며 이로부터 수치미분을 통하여 시간에 따른 모멘트를 구할 수 있었다.

4) 추정된 응답의 신뢰도는 측정잡음의 크기 및 응답추정에 사용된 해석적모델의 정확도에 좌우되며 측정잡음의 영향은 측정점의 수를 증가시키므로써 줄일 수 있으나 해석적모델의 오차에 의한 영향은 측정점의 수와 무관하므로 본 기법을 실제 문제에 적용하기 위하여는 대상시스템의 동적 거동을 정확히 묘사하는 해석적 모델의 수립이 필수적이다. 또

한 제시된 방법을 좀 더 효율적으로 적용하기 위하여는 측정위치에 따라 각 모드의 민감도에 대한 정보가 상태 추정 알고리즘에 반영될 필요성이 있으며 이에 대한 추가 연구가 진행 중이다.

부록 : λ -행렬을 이용한 반복적 역행렬의 연산

측정하지 못한 주파수응답함수의 추정식인 식(18)의 연산을 효율적으로 수행하기 위하여 λ -행렬을 이용하여 일반화된 역행렬을 구하였다.

식(18)의 일반화된 역행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$[D_E(\omega)]^+ = \text{inv}([D_E(\omega)]^T [D_E(\omega)]) [D_E(\omega)]^T \quad (A-1)$$

여기서

$$[D_E(\omega)] = [k_E(\omega)] + j\omega [c_E(\omega)] - \omega^2 [m_E(\omega)].$$

매 주파수마다 차수가 M인 행렬의 역행렬을 구하는 과정을 피하기 위하여 차수가 4인 λ -행렬을 아래와 같이 정의한 뒤,

$$[L_E(\omega)] = [D_E(\omega)]^T [D_E(\omega)]. \quad (A-2)$$

$j\omega$ 를 λ 로 치환하면 식(A-2)는 다음과 같다.¹¹⁾

$$[L(\lambda)] = [A_4]\lambda^4 + [A_3]\lambda^3 + [A_2]\lambda^2 + [A_1]\lambda^1 + [A_0] \quad (A-3)$$

여기서 $[A_4] = [m_E]^T [m_E]$,

$$[A_3] = [m_E]^T [c_E] - [c_E]^T [m_E],$$

$$[A_2] = [m_E]^T [k_E] - [c_E]^T [c_E] + [k_E]^T [m_E],$$

$$[A_1] = [k_E]^T [c_E] - [c_E]^T [k_E],$$

$$[A_0] = [k_E]^T [k_E].$$

$[A_k]$ 는 $(m-M) \times (m-M)$ 의 실계수행렬이고 λ -행렬과 관계된 latent value problem과 adjoint problem는 다음과 같다.

$$[L(\lambda)]\{r\} = \{0\}, \quad [L(\lambda)]^T\{q\} = \{0\}, \quad (A-4, A-5)$$

여기서 λ 는 latent value이고 $\{r\}$ 와 $\{q\}$ 는 각각 right and left latent vector이다.

일반적으로 질량행렬로 구성되는 $[A_4]$ 가 singular가 아니므로 식(A-4)와 (A-5)는 다음과 같이 분리된 형태(partitioned matrix equation)로 쓸 수 있으며

$$([A]\lambda + [B])\{R\} = \{0\}, \quad ([A]^T\lambda + [B]^T)\{Q\} = \{0\} \quad (A-6, A-7)$$

여기서

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [A_4] \\ [0] & [0] & [A_4] & [A_3] \\ [0] & [A_4] & [A_3] & [A_2] \\ [A_4] & [A_3] & [A_2] & [A_1] \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & -[A_4] & [0] \\ [0] & -[A_4] & -[A_3] & [0] \\ -[A_4] & -[A_3] & [A_2] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [A_0] \end{bmatrix}$$

$$\{R\}^T = [\lambda^3\{r\}^T \quad \lambda^2\{r\}^T \quad \lambda\{r\}^T],$$

$$\{Q\}^T = [\lambda^3\{q\}^T \quad \lambda^2\{q\}^T \quad \lambda\{q\}^T].$$

$[A_4]$ 가 singular가 아닌 조건하에서 $(\lambda[A] + [B])$ 은 행렬의 regular pencil이 되며 식(A-6)과 식(A-7)은 식(A-4)와 식(A-5)의 등가형태이다. 이러한 고유치문제를 푼 뒤, 식(A-2)의 역행렬을 다음과 같이 구할 수 있으며

$$[L(\lambda)]^{-1} = \sum_{i=1}^{4 \times (m-M)} \frac{\{r\}_i \{q\}_i^T}{\lambda - \lambda_i} \quad (A-8)$$

식(A-8)을 식(A-1)에 대입하면 식(A-1)은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$[D_E(\omega)]^+ = \left[\sum_{i=1}^{4 \times (m-M)} \frac{\{r\}_i \{q\}_i^T}{j\omega - \lambda_i} \right] [D_E(\omega)]^T \quad (A-9)$$

따라서 (A-6, A-7)의 고유치문제를 한 번 풀면 식(A-1)의 주파수별 반복적인 역행렬의 연산을 부분

함으로 쉽게 해결할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 학술진흥재단의 연구비지원(과제번호 1998-001-E01896)으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고 문헌

1. J. K. Vandiver, "Structural Damage Detection by Measurement of Dynamic Responses", *The Spring Meeting/STAR Symposium*, San Francisco, Cal, May 25-27, 1977
2. Jon D. Collins, Gary C. Hart, "Statistical Identification of Structures", *AIAA Journal*, Vol. 12, 1974, pp.185~192
3. P. Davies and J. K. Hammond, "A Comparison of Fourier and parametric Methods for Structural System Identification", *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. 106, 1984, pp.40~48
4. S. R. Ibrahim, "Time domain quasi-linear identification of nonlinear dynamic systems", *AIAA Journal*, Vol. 22(6), 1984, pp.817~823
5. Daniel C. Kammer, "Estimation of Structural Responses Using Remote Sensor Locations", *17th International Modal Analysis Conference*, vol. 2, 1998, pp.1379~1385
6. Robert J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", *AIAA Journal*, vol. 3(2), 1965, pp.380
7. Bruce, IRons, "Structural Eigenvalue Problems : Elimination of Unwanted Variables" *AIAA Journal*, Vol. 3(5), 1965, pp.961~962
8. A. J. Fricker, "A New Approach to the Dynamic Analysis of Structures using Fixed Frequency Dynamic Stiffness Matrices", *Inter. J. of Num. Meth. in Engineering*, Vol. 19, 1983, pp.1111~1129
9. Detchmندی, D. M., and Sridhar, r., "Sequential Estimation of States and Parameters in Noisy Nonlinear Dynamic Systems", *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 88, 1966, pp.362~368
10. 양경택, "S.I. 기법을 이용한 유한요소모델의 신뢰도 제고에 관한 연구", 한국전산구조공학회는 문집, Vol. 10(2), 1997, pp.149~160
11. Peter, Lancaster, *Lambda-matrices and Vibrating Systems*, Chapter 3, PERGAMON PRESS, 1966
12. Leonard, Meirovitch, *Analytical Method in Vibrations*, Chapter 7, THE MACMILLAN COMPANY, 1967
13. Pieter, Eykhoff, *SYSTEM IDENTIFICATION*, chapter 13, JOHN WILEY & SONS, 1974
(접수일자 : 1999. 7. 21)