

비축대칭 하중을 받는 원통형 쉘의 단순화 해석

A Simple Analysis of the Cylindrical Shell Subjected to a Nonaxisymmetric Load

남 문 희* 이 관 희**
Nam, Moon-Hee Lee, Kwan-Hee

요 지

비축대칭 하중을 받는 축대칭 쉘의 해석시 구조의 축대칭성을 고려하면 시간과 노력을 절약할 수 있다. 하중과 변위에 대하여 원주방향으로 Fourier 급수전개를 고려함으로써 비축대칭하중을 받는 축대칭 쉘의 해석은 뼈대요소처럼 취급할 수 있다.

본 논문에서는 Fourier 급수전개를 이용한 통상의 유한요소법에 의하여 비축대칭 하중을 받는 원형탱크의 강성행렬을 유도하고, 이 강성행렬을 행렬의 조작에 의해 전달행렬로 전환하여 전달행렬법을 적용하였다. 이 논문은 비축대칭하중을 받는 축대칭 쉘의 해석을 위한 연립방정식의 수를 최소화하는데 그 목적이 있다. 제안된 방법에 의한 풍하중과 물하중을 받는 원형탱크의 해석결과는 타 방법에 의한 해석결과와 잘 일치하고 있다.

핵심용어 : 푸리에 급수, 비축대칭 하중, 전달행렬법

Abstract

When one considers the property of the axisymmetry, an analysis of an axisymmetric shell subjected to nonaxisymmetric loading can be employed to save time and computer memory space. If one considers the Fourier series of the circumference direction of loads and displacements, an axisymmetric tank subjected to a nonaxisymmetric load can be treated as a frame element.

Using the Fourier series, the authors derived the stiffness matrix of the cylindrical shell subjected to nonaxisymmetric loading by the usual finite element method, and converted the stiffness matrix of a frame element into a transfer matrix by rearranging the stiffness matrix to apply the transfer matrix method. Here the most significant purpose of this paper is to achieve the fewest number of simultaneous equations for analysing an axisymmetric shell subjected to a nonaxisymmetric load.

The results of the proposed method of the analysis of the cylindrical shell subjected to a wind load and a water load show no differences when compared to the other methods.

Keywords : *Fourier series, nonaxisymmetric load, the transfer matrix method*

1. 서 론

축대칭 쉘을 해석함에 있어서 임의 형상의 쉘 구조 해석에 사용되는 곡면판 요소를 사용하는 것은

축대칭성을 전혀 고려하지 않게 되므로 모델링에 많은 시간과 노력이 소요되고, 기억용량 및 계산시간도 많이 요구되며 출력치의 분석에도 번거로움이 많은 등 비경제적인 해석이 된다. 따라서 축대칭 쉘

* 정회원 · 경상대학교 토목공학과, 교수

** 정회원 · 거창전문대학 토목과, 조교수

· 이 논문에 대한 토론을 2000년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

은 구조의 축대칭성을 고려하면 시간과 노력을 절약할 수 있는데 이러한 관점에서 많은 연구가 되어 왔다^{1)~2)}.

축대칭 셸 구조에 축대칭 하중이 작용하는 경우는 원주방향의 변위를 무시할 수 있으므로 회전체 전체의 강성에 전체의 하중을 고려하여 해석하거나, 단위 폭 단일요소의 탄성지반상 휨부재로 전환하여 해석할 수 있는데³⁾, 이러한 유사탄성지반모 개념을 원통형 셸, 반구형 셸, 원추형 셸 등의 해석에 적용하여 좋은 결과를 얻은바 있다⁴⁾.

그러나 축대칭 셸에 비축대칭 하중이 작용하는 경우는 원주방향 변위를 고려해야 하는데 외력 및 변위를 원주방향으로 Fourier 급수 전개함에 따라 원주방향 각도에 대해서 변수분리된 평형식이 얻어 진다⁵⁾. 유한요소법을 적용할 경우 회전단면상에서 만 요소분할을 행하므로 원주방향 절선은 회전단면상의 절점이 되어 3차원요소가 아닌 1차원요소로 취급할 수 있으므로 비축대칭 하중을 받는 셸 구조를 뼈대 구조화하여 자유도를 대폭적으로 줄일 수 있다.

그리고 임의 절점의 벡터량은 다른 절점으로 벡터량이 전달된다는 전달행렬의 개념을 뼈대화된 비축대칭 하중을 받는 셸에 적용하여 연립방정식의 수를 더욱 최소화 할 수 있는데, 이때 전달행렬은 유한요소의 강성행렬로부터 간단하게 전환할 수 있다^{6)~7)}.

따라서 비축대칭 하중을 받는 축대칭 셸해석은 Fourier 급수를 도입하여 3차원요소를 2차원요소화하여 유한요소의 강성행렬을 구하고 이를 전달행렬로 전환하여 전달행렬법을 적용시킴으로써 8×8의 행렬의 곱셈만으로 절점력 및 절점변위를 구하는 것이다.

2. 비축대칭하중을 받는 셸의 강성행렬

2.1 하중과 변위

그림 1과 같이 경선(s 또는 ξ), 원주(θ), 법선(η)방향의 변위 u, v, w 및 경선방향의 회전변위 β는 식(1)과 같이 θ방향의 Fourier 급수로 표시된다.

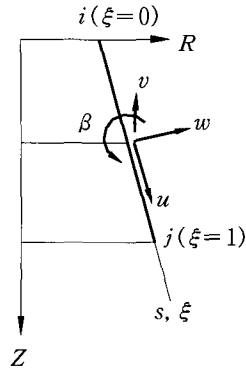
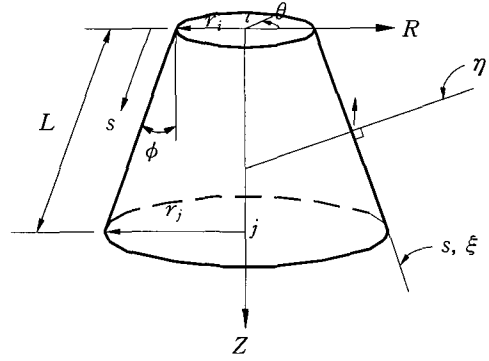


그림 1 셸의 기하 및 변위

$$\begin{aligned}
 u(s, \theta) &= \sum_{n=0}^m u_n(s) \cos n\theta \\
 v(s, \theta) &= \sum_{n=0}^m v_n(s) \sin n\theta \\
 w(s, \theta) &= \sum_{n=0}^m w_n(s) \cos n\theta \\
 \beta(s, \theta) &= \sum_{n=0}^m \beta_n(s) \cos n\theta
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 n은 Fourier 급수의 조화성분이고 u_n(s), v_n(s), w_n(s), β_n(s)는 각 n에 대응하는 변위 및 회전각으로 s만의 함수이다.

셸요소의 절선에 작용하는 하중에 대해서도 변위의 경우와 같이 Fourier 급수를 전개한다.

즉, V_i, T_i, H_i는 각각 i절점의 단위길이당의 Z, θ, r방향의 합력이고, M_i는 절선 둘레의 합모멘트로서 하중벡터 f_i를 식(2)와 같이 정의한다.

$$f_i = \begin{pmatrix} V_i(\theta) \\ T_i(\theta) \\ H_i(\theta) \\ M_i(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} V_{0i} + \sum_{n=1}^m V_{ni} \cos n\theta \\ \sum_{n=1}^m T_{ni} \sin n\theta \\ \frac{1}{2} H_{0i} + \sum_{n=1}^m H_{ni} \cos n\theta \\ \frac{1}{2} M_{0i} + \sum_{n=1}^m M_{ni} \cos n\theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

여기서, V_{ni} , T_{ni} , H_{ni} , M_{ni} ($n=0, 1, 2, \dots, m$)는 각 n 에 대한 요소의 절선력 및 절선 모멘트이다.

2.2 쉘의 변형도와 응력

축대칭 쉘의 중앙면의 변형도-변위 관계식은 쉘에 대한 선형이론으로부터 주어지며, 조화성분 n 에 대한 변형벡터의 각 성분은 식(3)으로 표시된다.

$$\{\epsilon_n\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{sn} \\ \epsilon_{\theta n} \\ \gamma_{s\theta n} \\ \kappa_{sn} \\ \kappa_{\theta n} \\ \kappa_{s\theta n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du_n}{ds} \\ \frac{1}{r}(nv_n + u_n \sin \phi + w_n \cos \phi) \\ \frac{1}{r}(-nu_n - v_n \sin \phi + r \frac{dv_n}{ds}) - \left(\frac{d^2 w_n}{ds^2}\right) \\ -\frac{1}{r}\left(-\frac{n^2}{r}w_n - n \frac{\cos \phi}{r}v_n + \frac{dw_n}{ds} \sin \phi\right) \\ -\frac{2}{r}\left[-n \frac{dw_n}{ds} - \frac{\sin \phi}{r}(-nw_n - v_n \cos \phi) - \frac{dv_n}{ds} \cos \phi\right] \end{pmatrix} \quad (3)$$

N_{sn} , $N_{\theta n}$, $N_{s\theta n}$ 및 M_{sn} , $M_{\theta n}$, $M_{s\theta n}$ 는 각각 조화성분 n 에 대응하는 응력 및 모멘트이며, 식(4)와 같은 변형 성분으로 표시된다.

$$\{\sigma_n\} = \begin{pmatrix} N_{sn} \\ N_{\theta n} \\ N_{s\theta n} \\ M_{sn} \\ M_{\theta n} \\ M_{s\theta n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_s & B_{s\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & B_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & G_{s\theta} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_s & D_{s\theta} & 0 \\ & & & & D_\theta & 0 \\ & & & & & K_{s\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{sn} \\ \epsilon_{\theta n} \\ \gamma_{s\theta n} \\ \kappa_{sn} \\ \kappa_{\theta n} \\ \kappa_{s\theta n} \end{pmatrix} = [D]\{\epsilon_n\} \quad (4)$$

여기서,

$$B_s = \frac{E_s}{1-\nu_s \nu_\theta} t(\xi), \quad B_\theta = \frac{E_\theta}{1-\nu_s \nu_\theta} t(\xi),$$

$$B_{s\theta} = \nu_\theta B_s = \nu_s B_\theta, \quad D_\theta = \frac{t^2(\xi)}{12} B_\theta,$$

$$D_s = \frac{t^2(\xi)}{12} B_s, \quad D_{s\theta} = \frac{t^2(\xi)}{12} B_{s\theta},$$

$$G_{s\theta} = G t(\xi), \quad K_{s\theta} = \frac{t^2(\xi)}{12} G_{s\theta}$$

또한, 식(4)에서 E_s , E_θ 및 ν_s , ν_θ 는 각각 직교이방성재료의 s , θ 방향의 영계수 및 포아송비이며, G 는 전단탄성계수이다. 등방성재료의 경우는 식(4)에서 $E_s = E_\theta = E$ 및 $\nu_s = \nu_\theta = \nu$ 로 한다. 또한 쉘의 두께 $t(\xi) = t$ 로 일정한 것으로 가정한다.

2.3 요소의 변위함수

요소의 변위함수는 식(5)와 같이 축방향 변위(u) 및 원주방향 변위(v)는 1차식으로 가정하고, 법선 방향 변위(w)는 3차 다항식으로 가정하였다.

$$u_n = C_1 + C_2 \xi$$

$$v_n = C_3 + C_4 \xi$$

$$w_n = C_5 + C_6 \xi + C_7 \xi^2 + C_8 \xi^3$$

$$\beta_n = \frac{1}{L} (C_6 + 2 C_7 \xi + 3 C_8 \xi^2) \quad (5)$$

여기서, $\xi = s/L$ 이다.

요소의 경계조건을 적용하여 미정계수를 결정하고 변위식을 정리하면 식(6)과 같다.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3) & L(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ 0 & 0 & \frac{1}{L}(-6\xi+6\xi^2) & (1-4\xi+3\xi^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{ni} \\ v_{ni} \\ w_{ni} \\ \beta_{ni} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3\xi^2-2\xi^3) & L(-\xi^2+\xi^3) \\ 0 & 0 & \frac{1}{L}(6\xi-6\xi^2) & -2\xi+3\xi^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{nj} \\ v_{nj} \\ w_{nj} \\ \beta_{nj} \end{pmatrix} \quad (6)$$

2.4 쉘요소의 강성행렬

조화성분 n 에 대한 변위식 식(5)를 식(3)에 대입하면 요소의 변형벡터는 다음의 식(7)과 같다.

$$\{\epsilon_n\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{sn} \\ \epsilon_{\theta n} \\ \gamma_{s\theta n} \\ \kappa_{sn} \\ \kappa_{\theta n} \\ \kappa_{s\theta n} \end{pmatrix} = [B_{ni}] \begin{pmatrix} u_{ni} \\ v_{ni} \\ w_{ni} \\ \beta_{ni} \end{pmatrix} + [B_{nj}] \begin{pmatrix} u_{nj} \\ v_{nj} \\ w_{nj} \\ \beta_{nj} \end{pmatrix} \quad (7)$$

식(7)의 $[B_{ni}]$ 및 $[B_{nj}]$ 는 $[6 \times 4]$ 의 변형행렬이다.

절점변위($\{d_n\}$)을 나타내는 식(1), 하중벡터($\{f_n\}$)를 나타내는 식(2), 변형도($\{\varepsilon_n\}$)를 나타내는 식(3) 및 응력($\{\sigma_n\}$)을 나타내는 식(4)를 이용하여 변위와 변형에 대한 가상일의 원리를 적용하면 조화함수 n 에 따른 평형방정식은 식(8)과 같다.

$$\int_0^{2\pi} d_n^T f_n dL = \int_0^{2\pi} \int_s \varepsilon_n^T \sigma_n ds dL \quad (8)$$

식(8)은 조화함수 n 에 따라 식(8a) 및 식(8b)로 표시된다.

$n=0$ 인 경우

$$2\pi r \{f_n\} = 2\pi r L \int_0^1 [B_{ni}]^T [D] [B_{ni}] d\xi \{d_n\} \quad (8a)$$

$n=1 \sim \infty$ 인 경우

$$\pi r \{f_n\} = \pi r L \int_0^1 [B_{ni}]^T [D] [B_{ni}] d\xi \{d_n\} \quad (8b)$$

식(8)의 평형방정식으로부터 비축대칭 하중을 받는 i 절점 및 j 절점이 포함된 셸 요소 강성행렬은 식(9)와 같이 $[8 \times 8]$ 의 행렬식으로 표현된다.

$$[K] = \int_A \begin{bmatrix} [\lambda]^T [B_{ni}]^T [D] [B_{ni}] [\lambda] & [\lambda]^T [B_{ni}]^T [D] [B_{nj}] [\lambda] \\ [\lambda]^T [B_{nj}]^T [D] [B_{ni}] [\lambda] & [\lambda]^T [B_{nj}]^T [D] [B_{nj}] [\lambda] \end{bmatrix} dA \\ = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, K_{ii} , K_{ij} , K_{ji} , K_{jj} 는 각각 $[4 \times 4]$ 의 행렬식이고, $[\lambda]$ 는 좌표변환행렬로서 식(9a)와 같다.

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9a)$$

3. 전달행렬법

3.1 전달행렬의 유도

비축대칭 하중을 받는 셸문제를 Fourier 급수전개를

이용하여 1차원 모델화하여 유한요소법을 적용함으로써 미지수를 대폭적으로 줄여 해석할 수 있는 것에 대해 언급하였다. 이 유한요소법을 이용한 해가 충분한 정밀도를 갖기 위해서는 많은 수의 요소 분할을 요구하게 되고 이에 따라 구조물의 전체강성행렬은 방대한 크기가 된다. 미지수인 변위를 구하는 방법은 여러 가지가 있으나, 모두 무수히 많은 횟수의 행렬곱셈이 이루어지므로 많은 계산시간과 방대한 컴퓨터 용량을 요구하게 된다. 이러한 문제점을 개선하기 위해서 유한요소법에 전달행렬을 도입하여 최소의 미지수로서 비축대칭 하중을 받는 셸을 해석하고자 하였다.

어떤 구조체의 임의 요소에 힘이 가해지면 임의 요소는 변형되면서 힘의 일부를 흡수한 후 이웃한 요소로 힘을 전달하게 될 것이다. 이러한 관계를 수식으로 표현하면 식(10)과 같다.

$$\{\dot{V}\}^R = [\dot{T}] \{\dot{V}\}^L \quad (10)$$

여기서,

$\{\dot{V}\}^R$: 요소우측의 변위 및 절점력 (벡터량)

$\{\dot{V}\}^L$: 요소좌측의 변위 및 절점력 (벡터량)

$[\dot{T}]$: 전달행렬

전달행렬은 처짐식 혹은 에너지 이론으로 유도될 수 있고, 또한 유한요소법의 강성행렬로부터 유도될 수 있는데 여기서는 강성행렬로부터 전달행렬을 유도하고자 한다. 유한요소법에서는 요소의 양단의 절점력은 강성행렬과 변위의 함수관계로 표시하는데 이를 행렬식으로 표현하면 식(11)과 같다.

$$\{P\} = [K] \{d\} \quad (11)$$

여기서,

$\{P\}$: 양단 절점의 절점력

$[K]$: 강성행렬

$\{d\}$: 양단의 절점 변위

식(11)은 식(12)와 같이 i, j 절점의 절점력과 i, j 절점의 변위항으로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \{P_i\} \\ \{P_j\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_i\} \\ \{d_j\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서,

- $\{P_i\}$: i 절점의 절점력 $\{V_i \ T_i \ H_i \ M_i\}^T$
- $\{P_j\}$: j 절점의 절점력 $\{V_j \ T_j \ H_j \ M_j\}^T$
- $\{d_i\}$: i 절점의 절점변위 $\{u_i \ v_i \ w_i \ \beta_i\}^T$
- $\{d_j\}$: j 절점의 절점변위 $\{u_j \ v_j \ w_j \ \beta_j\}^T$

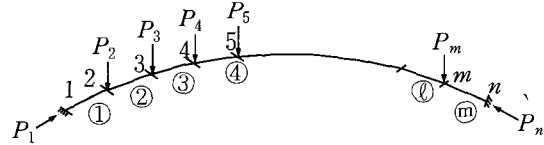


그림 2 아치 해석 모델

강성행렬은 i, j 절점의 절점력과 i, j 절점의 변위와의 관계를 나타내지만 전달행렬은 i 절점의 벡터량과 j 절점의 벡터량과의 관계를 나타내는 것이므로 식(10)을 이용하여 전달행렬을 구할 수 있는데 식(12)으로부터 식(13)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \{P_i\} &= [K_{ii}]\{d_i\} + [K_{ij}]\{d_j\} \\ \{P_j\} &= [K_{ji}]\{d_i\} + [K_{jj}]\{d_j\} \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)을 $\{d_j\}$ 와 $\{P_j\}$ 항으로 정리하면 다음 식(14)과 같다.

$$\begin{aligned} \{d_j\} &= [-K_{ij}]^{-1}[K_{ii}] + \{d_i\}[K_{ij}]^{-1}\{P_i\} \\ \{P_j\} &= [[K_{ji}] - [K_{jj}][K_{ij}]^{-1}[K_{ii}]]\{d_i\} \\ &\quad + [K_{jj}][K_{ij}]^{-1}\{P_i\} \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)를 행렬식으로 정리하면 식(15)과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \{d_i\} \\ \{P_j\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [-K_{ij}]^{-1}[K_{ii}] & -[K_{ij}]^{-1} \\ [K_{ji}] - [K_{jj}][K_{ij}]^{-1}[K_{ii}] & [K_{jj}][K_{ij}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_i\} \\ \{P_i\} \end{Bmatrix} \quad (15a)$$

또는,

$$\{\bar{V}\}^j = [\check{T}]\{\bar{V}\}^i \quad (15b)$$

강성행렬과 관련된 연립방정식인 식(12)로부터 유도된 식(15)은 전달행렬식을 나타내고, $\{\bar{V}\}^i$ 는 i 절점의 벡터량이고 $\{\bar{V}\}^j$ 는 j 절점의 벡터량이며, $[\check{T}]$ 은 전달행렬이다.

3.2 전달행렬법의 적용

그림 2와 같은 구조물에 전달행렬법을 이용하여 해석하고자 하면 우선 유한요소로 분할한 후 전체좌표

계의 요소강성행렬을 유도하고 이 강성행렬로부터 식(15)를 이용하여 전달행렬을 구한다.

이러한 방법으로 구한 \textcircled{m} 번째 요소의 전달행렬은 $[\check{T}_{\textcircled{m}}]$ 이 되고, 그림 2의 1절점의 벡터량만 구하면 1절점의 벡터량에 $\textcircled{1}$ 요소의 전달행렬 $[\check{T}_{\textcircled{1}}]$ 을 곱하여 2절점의 벡터량을 구할 수 있다. 1절점의 벡터량을 구하기 위해서는 각 절점에 작용하는 모든 외력을 고려하여 식(16)과 같이 절점 n 의 벡터량으로 표시해야 한다.

$$\begin{aligned} \{\bar{V}_{\textcircled{m}n}\} &= \{[\check{T}_{\textcircled{m}}] [\check{T}_{\textcircled{1}}] \\ &\quad \cdots [\check{T}_{\textcircled{4}}][\check{T}_{\textcircled{3}}][\check{T}_{\textcircled{2}}][\check{T}_{\textcircled{1}}]\{\bar{V}_{\textcircled{1}1}\} \\ &\quad - \{[\check{T}_{\textcircled{m}}] [\check{T}_{\textcircled{1}}] \cdots [\check{T}_{\textcircled{4}}][\check{T}_{\textcircled{3}}][\check{T}_{\textcircled{2}}]\}\{P_2\} \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \\ &\quad - \{[\check{T}_{\textcircled{m}}]\}\{P_m\} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,

- $\{\bar{V}_{\textcircled{m}n}\}$: \textcircled{m} 요소의 n 절점의 벡터량
- $[\check{T}_{\textcircled{m}}]$: \textcircled{m} 요소의 전달행렬
- $\{P_m\}$: 절점 m 의 전체좌표계에 의한 절점하중벡터

식(16)에서 $\{\bar{V}_{\textcircled{m}n}\}$ 및 $\{\bar{V}_{\textcircled{1}1}\}$ 만이 미지수이고, 기타 값은 기지의 수이므로 식(17)과 같이 정리할 수 있다.

$$\{\bar{V}_{\textcircled{m}n}\} = [\check{T}]\{\bar{V}_{\textcircled{1}1}\} - \{C\} \quad (17)$$

식(17)은 식(18)과 같이 분할할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{P_{\textcircled{m}n}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\check{T}_{11}] & [\check{T}_{12}] \\ [\check{T}_{21}] & [\check{T}_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{-P_{\textcircled{1}1}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{C_1\} \\ \{C_2\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서, $P_{\textcircled{m}n}$ 은 \textcircled{m} 요소의 n 절점의 절점력 벡터

량이고, $P_{\textcircled{1}}$ 은 ① 요소의 1절점의 절점력 벡터량이다.

식(18)은 식(19)와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \{0\} &= [\check{T}_{12}] \{-P_{\textcircled{1}}\} - \{C_1\} \\ \{P_{\textcircled{n}}\} &= [\check{T}_{22}] \{-P_{\textcircled{1}}\} - \{C_2\} \end{aligned} \quad (19)$$

식(19)로부터 1절점의 벡터량 $\{P_{\textcircled{1}}\}$ 을 구할 수 있다.

미지수 $\{P_{\textcircled{1}}\}$ 이 구해서 요소①의 벡터량에 포함시켜서 다음의 식(20)을 이용해서 요소②의 좌측절점의 벡터량을 구할 수 있다. 기타 절점의 절점벡터량은 같은 방법에 의해 순차적으로 구할 수 있다.

$$\{\check{V}_{\textcircled{2}}\} = [\check{T}_{\textcircled{2}}] \{\check{V}_{\textcircled{1}}\} - \{P_2\} \quad (20)$$

4. 수치 해석 예

물탱크의 하단부가 지반에 고정된 물이 만재된 물탱크에 비축대칭하중인 풍하중이 작용하는 경우에 대하여 본 논문에서 제안한 방법으로 해석하였다. 해석한 물탱크의 단면제원은 그림 3과 같고, 콘크리트의 탄성계수 $E = 2.2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, 포와송 비 $\nu = 0.18$ 이다.

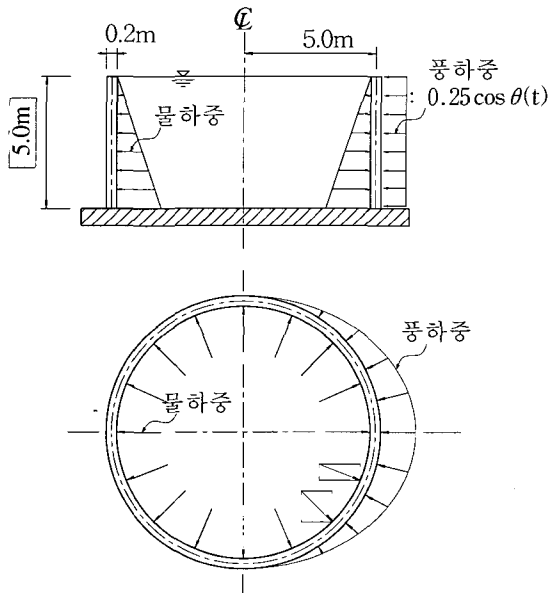


그림 3 내수압과 풍하중을 받는 원통형 물탱크

해석을 위하여 요소분할은 0.5m씩 10요소로 하였고 모델링도는 그림 4와 같다. 쉘 면에 작용하는 풍하중에 대한 Fourier 급수 전개는 다음과 같고, 본 논문에서는 Fourier 급수의 조화수 n 은 10항까지만 고려하였다.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (0.25 \cos \theta) d\theta = \frac{0.25}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (0.25 \cos \theta) \cos \theta d\theta = \frac{0.25}{2} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a_{2\sim m} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 0.25 \cos \theta \cos n\theta d\theta \\ &= \frac{0.25}{\pi} \left\{ \frac{\sin \left\{ (1-n) \frac{\pi}{2} \right\}}{2(1-n)} + \frac{\sin \left\{ (1+n) \frac{\pi}{2} \right\}}{2(1+n)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \left\{ -(1-n) \frac{\pi}{2} \right\}}{2(1-n)} - \frac{\sin \left\{ -(1+n) \frac{\pi}{2} \right\}}{2(1+n)} \right\} \end{aligned}$$

임의의 원주방향 각도 θ 에 대한 작용하중은 다음과 같다.

$$P(\theta) = \sum_{n=0}^m a_n \cos n\theta \quad (22)$$

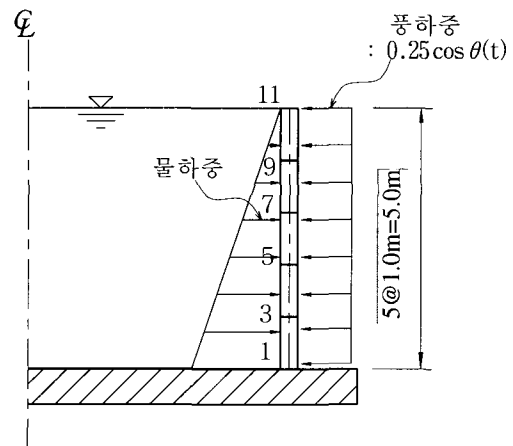


그림 4 비축대칭 하중을 받는 탱크의 모델링도

표 1 $\theta = 0^\circ$ 의 반경방향 변위

절점 번호	$\theta = 0^\circ$ 에서의 반경방향 변위 ($\times 10^{-5} m$)					
	물하중		풍하중		물하중+풍하중	
	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	1.44	1.46	-0.15	-0.14	1.29	1.32
5	1.79	1.80	-0.26	-0.26	1.53	1.54
7	1.21	1.21	-0.30	-0.29	0.91	0.92
9	0.57	0.57	-0.32	-0.32	0.25	0.25
11	0.00	0.00	-0.34	-0.33	-0.34	-0.33

※ TMM : Transfer Matrix Method

표 2 $\theta = 90^\circ$ 및 $\theta = 180^\circ$ 에서의 반경방향 변위

절점 번호	$\theta = 90^\circ$ 에서의 반경방향 변위 ($\times 10^{-5} m$)				$\theta = 180^\circ$ 경우 ($\times 10^{-5} m$)	
	풍하중		물하중+풍하중		물하중+풍하중	
	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.06	0.05	1.50	1.51	1.44	1.46
5	0.14	0.13	1.93	1.93	1.79	1.80
7	0.21	0.20	1.42	1.41	1.21	1.21
9	0.27	0.25	0.84	0.82	0.57	0.57
11	0.32	0.30	0.32	0.30	0.00	0.00

표 1 및 그림 5는 $\theta = 0^\circ$ 에 대한 반경방향 변위를 나타낸 것이며, 본 해석방법의 정도를 비교하기 위해서 조화수 $n = 0\sim 10$ 까지의 합계와 20×32 로 요소 분할된 SAP2000의 해석결과를 비교하였다.

표 2는 $\theta = 90^\circ$ 및 $\theta = 180^\circ$ 에 대한 반경방향 변위를 나타낸 것이며, 그림 6은 $\theta = 90^\circ$ 에 대한 반경방향 변위를 나타낸 것이다.

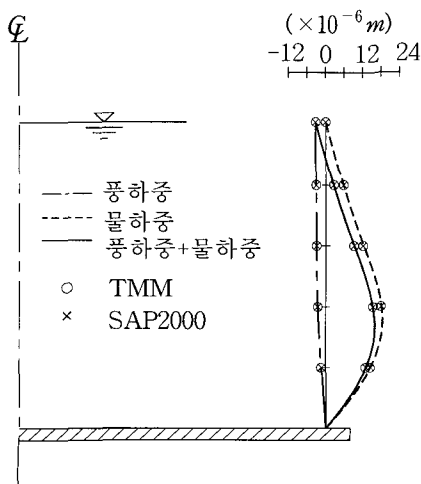


그림 5 $\theta = 0^\circ$ 에서의 반경방향 변위

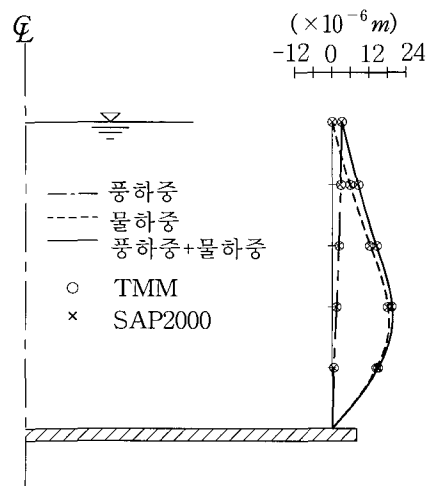


그림 6 $\theta = 90^\circ$ 의 반경방향 변위

표 3 $\theta = 0^\circ$ 의 경선방향 휨모멘트 ($\times 10^{-1} tm$)

절점 번호	$\theta = 0^\circ$ 에서 경선방향 휨모멘트					
	물하중		풍하중		풍하중+물하중	
	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)
1	-12.45	-12.10	1.05	0.98	-11.40	-11.12
3	2.95	3.06	-0.15	-0.15	2.80	2.91
5	1.33	1.34	-0.11	-0.11	1.22	1.23
7	-0.03	-0.04	-0.02	-0.02	-0.05	-0.06
9	-0.10	-0.10	0.00	0.00	-0.10	-0.10
11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

표 4 $\theta = 90^\circ$ 및 $\theta = 180^\circ$ 의 경선방향 휨모멘트 ($\times 10^{-1}tm$)

절점 번호	$\theta = 90^\circ$ 에서의 경선방향 휨모멘트				$\theta = 180^\circ$ 경우	
	풍하중		물하중+풍하중		물하중+풍하중	
	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)	TMM ($n=0\sim 10$)	SAP2000 (20×32)
1	-0.30	-0.27	-12.75	-12.37	-12.45	-12.10
3	-0.01	-0.01	2.94	3.05	2.95	3.06
5	0.03	0.03	1.36	1.37	1.33	1.34
7	0.05	0.04	0.02	0.00	-0.03	-0.04
9	0.04	0.04	0.03	0.03	-0.10	-0.10
11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

표 3 및 그림 7은 $\theta = 0^\circ$ 에 대한 경선방향 휨모멘트를 나타낸 것이며, 본 해석방법의 정도를 비교하기 위해서 조화수 $n = 0 \sim 10$ 까지의 합계와 20×32 로 요소 분할된 3차원 쉘요소에 대한 SAP2000의 해석결과를 비교하였다.

표 4는 $\theta = 90^\circ$ 및 $\theta = 180^\circ$ 에 대한 경선방향 휨모멘트를 나타낸 것이며, 그림 8은 $\theta = 90^\circ$ 에 대한 경선방향 휨모멘트를 나타낸 것이다.

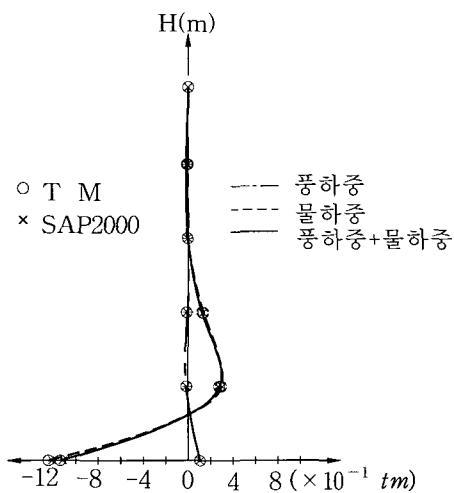


그림 7 $\theta = 0^\circ$ 에서의 경선방향 휨모멘트

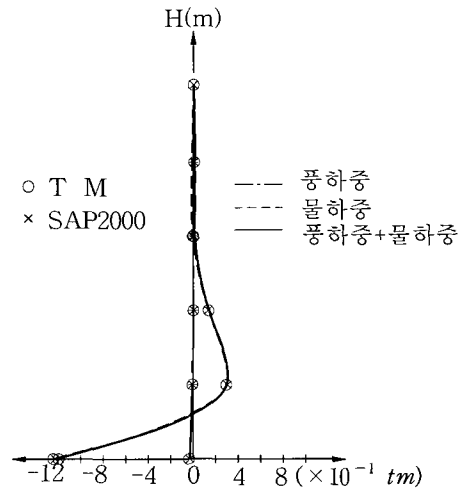


그림 8 $\theta = 90^\circ$ 의 경선방향 휨모멘트

5. 결 론

비축대칭하중을 받는 축대칭탱크의 해석에 원주방향으로 Fourier 급수를 도입하여 통상의 유한요소법을 적용함으로써 3차원 쉘요소를 2차원 뼈대요소화하고 이 뼈대요소의 강성행렬을 전달행렬로 전환하여 통상의 전달행렬법을 적용함으로써 미지수를 가장 최소화하여 비축대칭 하중을 받는 복잡한 쉘해석을 2차원의 뼈대요소처럼 간단히 수행할 수 있었고, 타 방법에 의한 3차원의 쉘해석 결과와도 잘 일치하였다.

본 논문의 성과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 전달행렬은 처짐식 혹은 에너지이론 등으로 유도될 수 있지만 본 논문에서는 유한요소의 강성행렬을 행렬분할을 이용하여 쉽게 전달행렬로 전환하는 방법을 사용하였다.

둘째, 통상의 유한요소법과 전달행렬법을 적절히 접목함으로써 비축대칭하중을 받는 원통형 쉘의 해석에 요구되는 방대한 연립방정식의 수를 가장 최소화하여 8행 8열의 행렬 곱셈만으로 복잡한 쉘을 간단히 해석할 수 있었다.

셋째, 제안된 방법에 의한 풍하중과 물하중을 받는 물탱크의 해석(10개의 요소분할)에서 Fourier 급수의 조화수 n 은 이론상 무한회 반복해야 엄밀해에 접근하지만 $n=0\sim 10$ 까지 고려한 해석결과는 3차원 해석(640개의 요소분할)을 실시한 SAP2000의 결과와 잘 일치

하였고, 모델링과 결과의 분석 및 사용되는 컴퓨터 용량과 실행시간에 비교가 되지 않을 만큼 간단히 해석된다.

참 고 문 헌

1. Flügge, W., *Stress in Shells*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1973, pp.260~274
2. Novozhilov, V. V., *Thin Shell Theory*, Wolters-Noordhoff, 1970, pp.105~150
3. Hetenyi, M., *Beams on Elastic Foundation*, University of Michigan, U.S.A, pp.30~33, 1964
4. Nam, M. H., Pulmano, V. A. and Tin Loi, F., "A Simple Analysis of Axisymmetrically Loaded Circular Cylindrical Tanks Resting on Elastic Foundation", *Structural Engineering and Construction*, A.I.T., Thailand, 1989, pp.9~15
5. Percy, J. H. and Pian, T. H. H., "Application of Matrix Displacement Method to Linear Elastic Analysis of Shells of Revolution", *Journal of AIAA*, 3(11), 1963, pp.2138~2145
6. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The Finite Elements Method*, McGraw-Hill Book Company, 1991, pp.135~148, 185~210
7. Tesar, A., and Fillo, L., *Transfer Matrix Method*, Kluwer Academic Publishers, 1988, pp.23~33
(접수일자 : 1999. 6. 14)