잔류응력을 고려한 보강된 쉘 구조의 극한강도 해석

Ultimate Strength Analysis of Stiffened Shell Structures Considering Effects of Residual Stresses

김 문 영* 최 명 수** 장 승 필***
Kim, Moon-Young Choi, Myeong-Su Chang, Sung-Pil

요 지

최 등[1]은 total lagrangian formulation에 근거한 증분 평형방정식을 적용하고, 강도행렬 산정시 회전각의 2차항을 포함시켜 기하학적 비선형 해석시 해의 수렴성을 향상시켰다. 또한 등매개 쉘 유한요소의 단점인 전단구속 현상과 제로 에너지 모드가 발생하는 문제를 극복하기 위하여 가정 변형률장을 적용하여 보강된 판 및 쉘 구조의 비선형 해석법을 개발하였다. 본 연구에서는 잔류응력을 고려한 쉘구조의 극한강도 해석을 수행하기 위하여, 대변형거동과 함께 소성붕괴거동을 추적할 수 있는 알고리즘을 제시한다. 잔류응력을 고려한 증분평형방정식에 return mapping algorithm을 이용한 탄소성 해석법을 결합시켜서 보강된 판 및 쉘구조의 극한거동을 파악한다. 수치해석 예제를 통하여 본 연구에서 제시된 유한요소 및 비선형 해석 알고리즘에 대한 효율성 및 적용성을 확인하였다.

핵심용어 : 보강된 판 및 쉘, 극한강도해석, return mapping algorithm, 가정변형도 쉘요소, 이방성쉘

Abstract

Choi et al.[1] presented the total Lagrangian formulation based upon the degenerated shell element. Geometrically correct formulation is developed by updating the direction of normal vectors and taking into account the second order rotation terms in the incremental displacement field. Assumed strain concept is adopted in order to overcome the shear locking phenomena and to eliminate the spurious zero energy mode. In this paper, for the ultimate strength analysis of stiffened shell structures considering effects of residual stresses, the return mapping algorithm based on the consistent elasto-plastic tangent modulus is applied to anisotropic shell structures. In addition, the load/displacement incremental scheme is adopted for non-linear F.E. analysis. Based on such methodology, the computer program is developed and numerical examples to demonstrate the accuracy and the effectiveness of the proposed shell element are presented and compared with the results in literatures.

Keywords : *Stiffened Plate and Shell, Ultimate Strength Analysis, Return Mapping algorithm, Assumed Strain Shell Element, Anisotropic Shell*

1. 서 론

최근 20년 동안 전자계산기의 눈부신 계산능력의 향상에 힘입어, 유한요소법과 같은 계산역학분야가 급속한 발전을 이룩하였다. 이 분야에서 다루는 여러 종류의 구조해석중에서 판 및 쉘 구조물해석은 중요한

* 정회원 · 성균관대학교 토목공학과, 교수
** 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템 공학부, 박사과정 졸업
*** 서울대학교 지구환경시스템 공학부, 교수

· 이 논문에 대한 토론을 2000년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

위치의 한 분야를 차지하고 있다고 생각된다. 보강된 판과 쉘은 공학의 다양한 분야에서 널리 적용되는 구조이다. 토목분야에서는 강교량의 거더(girders), 공장이나 경기장의 지붕구조, 돔(dome), 냉각수탑 (water and cooling tower), 원자력 차폐구조물, 기계 및 원자력 분야에서는 압력용기(pressure vessel)와 파이프, 저장탱크와 플래트폼 구조(platform component)와 같은 해양구조물, 그리고 선박, 항공기 구조등에 사용되고 있다.

Bathe와 Bolourchi[2]는 변형된 쉘요소를 이용하여 판 및 쉘구조의 대변형 및 탄소성을 수행하였으며, Owen과 Figueiras[3]는 직교이방성 탄소성 판 및 쉘 해석법을 제시하였다. Surana[4]는 쉘구조의 기하학적 비선형해석에서 회전각의 2차항을 고려하였다. 또한 김과 민[5]은 변위 및 하중증분법을 이용하여 보강된 쉘 구조의 후좌굴 및 탄소성 해석을 수행하였다. 유한요소법은 이미 20여년간 쉘구조에 적용되어 왔지만, 일반 쉘 구조에 직접적으로 적용할 수 있는 적절한 쉘유한요소에 대한 연구는 아직 진행중에 있다고 생각된다[2)-6)]. 최 등[1]은 가정변형도 쉘요소(assumed strain finite shell element)를 적용하여 전단구속(shear locking) 현상과 제로 에너지 모드가 발생하는 문제를 해결하였다. 또한, 쉘요소를 이용하여 대변형 및 후좌굴해석을 수행하는 경우에, 본 연구에서는 기하학적인 강도행렬을 산정할 때 회전각의 2차항을 포함시킴으로써, 좌굴해석뿐만 아니라 기학학적 비선형해석의 경우에 이전의 문헌과 비교하여 해의 수렴성을 증가시키고 복잡한 비선형거동을 추적할 수 있음을 보였다. 아울러 보강재를 쉘요소로 모델링하여 주부재와 연결시키는 방법을 제시하였다.

보강된 판 및 쉘구조물은 종종 snap-through, turning-back과 같이 과도한 변형을 수반하는 기하학적 비선형거동을 나타낸다. 기존의 Newton-Raphson 방법에 근거한 하중증분법과 같이 단순한 비선형해석 알고리즘으로는 이러한 구조물들이 나타내는 다양한 후좌굴 평형경로들을 추적할 수 없다. 뿐만아니라 쉘 구조물의 실제적인 거동을 해석하기 위하여, 극한해석을 수행하는 경우에 보강된 판 및 쉘구조물은 탄소성 거동에 의한 소성붕괴거동을 나타낸다. 또한, 강재로 된 대부분의 판 및 쉘구조물은 두께가 얇기 때문에 국부적인 또는 전체적인 좌굴을 일으킬 수 있다. 이를 방지하기 위하여 수평, 수직보강재등의 보강이 필수적이므로, 이러한 보강된 판 및 쉘구조의 극한강도 해석을 수행하기 위해서는 기하학적 및 재료적 비선형 유한요소기법이 개발되어야 한다.

본 연구에서는 이상의 문제를 해결하기 위해서 극심한 대변형 및 후좌굴거동과 재료적 소성파괴거동을 정확하고 효율적으로 해석할 수 있는 변형된 쉘유한요소를 개발하고자 한다. 증분 비선형방정식을 풀기 위하여 변위 및 하중증분 알고리즘을 적용하고, 대변형거동과 함께 판 및 쉘구조의 소성붕괴거동을 추적하기 위하여 탄소성 해석법을 적용한다. 기존의 연구와 비교하여 1) 직교 이방성재료를 갖는 보강된 쉘구조의 탄소성해석에 return mapping 알고리즘을 적용하고, 2) 잔류응력을 고려하여 탄소성 좌굴임계하중을 결정하며, 그리고 3) 잔류응력을 고려한 기하학적 및 재료적 비선형 유한요소해석기법을 제시한다. 그 결과, 잔류응력을 고려한 보강된 쉘구조물의 탄소성 및 후좌굴 거동을 포함하는 다양한 비선형 거동을 추적할 수 있는 컴퓨터 해석프로그램을 개발하고, 보강된 쉘구조의 극한거동을 파악한다.

2. 잔류응력을 고려한 쉘 유한요소의 증분 평형방정식

Total Lagrangian formulation에 근거하여 연속체의 잔류응력을 고려한 증분평형방정식은 다음과 같이 표시된다

$$\int_V ({}_0C_{ijkl}\,{}_0e_{kl}\delta e_{ij} + {}^t_0S_{ij}\delta_0\eta_{ij} + {}^t_0S_{ij}\delta_0 e^*_{ij})\,{}^0dV = {}^{t+\Delta t}R + {}^0R - \int_V {}^t_0S_{ij}\delta_0 e_{ij}\,{}^0dV \quad (1)$$

여기서 ${}_0C_{ijkl}$은 응력-변형도성분, ${}_0e_{ij}$, ${}_0\eta_{ij}$는 초기형상을 기준으로한 Green-Lagrange strain의 선형 및 비선형 증분변형도 성분, ${}_0e^*_{ij}$는 절점회전각의 2차항으로 인한 선형 변형도를 나타내며, ${}^t_0S_{ij}$는 second Piola-Kirchhoff stress를 표시한다. ${}^{t+\Delta t}R$은 외적가상일, δ는 변분을 의미한다.

등매개 형상함수를 도입하여 적분을 행하면 한 개의 유한요소에 대한 증분평형방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$({}^t_0K_L + {}^t_0K_{NL})\Delta U = {}^{t+\Delta t}R + {}^0R - {}^t_0F \quad (2)$$

여기서

$$
\begin{aligned}
{}_0^tK_L &= \int_V {}_0^tB_L^T\, {}_0^tC\, {}_0^tB_L\, {}^0dV \\
{}_0^tK_{NL} &= \int_V {}_0^tB_{NL}^T\, {}_0^tS\, {}_0^tB_{NL}\, {}^0dV + {}_0^tK_{NL}^* \\
{}_0^tF &= \int_V {}_0^tB_L^T\, {}_0^t\overline{S}\, {}^0dV
\end{aligned} \tag{3}
$$

식(2), (3)에서 ${}_0^tK_L$과 ${}_0^tK_{NL}$은 각각 선형(탄성) 및 비선형(기하학적) 강도행렬을 나타내며, ΔU는 절점변위벡타의 증분 그리고 ${}_0^tF$는 요소내부에 발생하는 응력에 대응하는 등가절점력을 의미한다. ${}^{t+\Delta t}R$은 다음 하중단계에서의 총 외력을 나타내며, ${}^0R$은 잔류응력에 대응하는 등가 절점력을 의미한다. ${}_0^tB_L$과 ${}_0^tB_{NL}$은 선형 및 비선형 변형-변형도 변환행렬을 나타내며, ${}_0^tK_{NL}^*$는 회전각의 2차항으로 인한 비선형 강도행렬을 표시한다.

비선형 해석에서 불평형 하중을 정확히 산정하는 것은 매우 중요하다. 아래는 본 연구에서 채택한 불평형하중 산정법을 제시한다.

1) 접선강도행렬을 산정하고, 증분절점변위벡타 및 총변위벡타를 구한다.
2) Rodrigues의 회전행렬을 이용하여, 1)에서 계산된 각 절점에서 회전증분변위와 전 단계까지의 회전행렬로부터 새로운 좌표변환행렬을 구성한다.
3) 각 가우스 적분점에서 적층좌표계에 대한 total Green-Lagrange strain을 계산한다.
4) 각 적분점에서 탄소성 응력-변형도관계를 이용하여 응력증분을 산정한다.
5) 요소응력에 대응하는 등가절점력, 불평형력을 산정하고 수렴상태를 판정한다.

3. 이방성 쉘 구조의 탄소성 극한강도 해석

본 연구에서는 직교 좌표계가 재료의 주축에 평행하다는 가정과 함께 이방성 재료의 탄성 적합조건을 적용한다. 또한 이방성 재료의 특성을 고려한 Von-Mises 항복조건을 사용한다.

3.1 이방성 쉘 요소의 재료 모델링

대부분의 이방성 재료는 21개의 독립된 상수값을 가진다. 이 수는 재료가 내적으로 임의의 대칭 요소를 가지면 현저히 줄어들게 된다. 만약 직교좌표축 (X_i')과 재료의 주축(1,2,3)이 평행하고, 두께방향의 응력이 없다고 가정하면 ($\sigma_{z'}=\sigma_3=0$) 응력과 변형율과 관계된 탄성 행렬 $\overline{D}$는 다음과 같이 얻어진다.

$$
\sigma_{1,2,3} = \overline{D}\,\varepsilon_{1,2,3} \tag{4}
$$

여기서,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{1,2,3}^T &= \{\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \tau_{12}\ \ \tau_{13}\ \ \tau_{23}\} \\
\varepsilon_{1,2,3}^T &= \{\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \gamma_{12}\ \ \gamma_{13}\ \ \gamma_{23}\} \\
\overline{D} &= \begin{bmatrix}
\overline{D}_{11} & \overline{D}_{12} & 0 & 0 & 0 \\
\overline{D}_{12} & \overline{D}_{22} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \overline{D}_{33} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \overline{D}_{44} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \overline{D}_{55}
\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

그리고

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_{11} &= E_1/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) & \overline{D}_{33} &= G_{12} \\
\overline{D}_{22} &= E_2/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) & \overline{D}_{44} &= K_1 G_{13} \\
\overline{D}_{12} &= E_2\nu_{12}/(1-\nu_{12}\,\nu_{21}) & \overline{D}_{55} &= K_2 G_{23}
\end{aligned} \tag{6}
$$

여기서, K_1과 K_2항은 $\overline{13}$과 $\overline{23}$평면의 전단보정계수이다.

만약 이방성의 두 주축 1,2가 x', y'축과 일치하지 않고 임의의 각 θ만큼 회전해 있다면 새로운 탄성 행렬 D는 다음과 같은 변환을 거치게 된다.

$$
\begin{aligned}
\sigma_{1,2,3} &= T\sigma \\
\varepsilon_{1,2,3} &= (T^{-1})^T\varepsilon
\end{aligned} \tag{7}
$$

여기서,

$$
T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \tag{8}
$$

여기서,

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \begin{bmatrix}
\cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\
\sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\
-\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta
\end{bmatrix} \\
T_2 &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9}
$$

식(4)와 (7)에서 응력과 변형률과의 관계는 다음과 같다.

$$\sigma = D\varepsilon \tag{10}$$

여기서,

$$D = T'^{T}\,\overline{D}\,T' \tag{11}$$

3.2 항복 조건

항복 조건식의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$\Psi(\sigma, x) = \phi(\sigma) - k(x) = 0 \tag{12}$$

여기서, $\phi(\sigma)$는 축차응력 불변량(deviatoric stress invariants)의 함수이며, k는 경화 계수 x의 함수이다.

이방성 재료의 특성을 고려하기 위해 일반화된 Von-Mises 항복조건을 적용하면, 식(12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Psi(\sigma, \bar{e}^{p}) = J'_2 - \frac{1}{3}\sigma_Y^2(\bar{e}^{p}) = 0 \tag{13}$$

이방성 재료의 유효응력, $\bar{\sigma} = \sqrt{3}(J'_2)^{1/2}$은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{\sigma} = [a_{12}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + a_{23}(\sigma_{22}-\sigma_{33}) + a_{13}(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 3a_{44}\tau_{12}^2 + 3a_{55}\tau_{13}^2 + 3a_{66}\tau_{23}^2]^{1/2} \tag{14}$$

여기서, σ_{ij}, τ_{ij}는 응력 성분이고 a_{ij}는 이방성 매개변수이다. 그리고 첨자 1, 2, 3은 재료의 주축방향과 관련된다.

위의 식을 전개하고, $\sigma_{33} \equiv \sigma_{z'} = 0$이라 가정하면 다음의 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} J'_2 &= \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} = \frac{1}{3}\bar{\sigma}^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}[\bar{a}_{11}\sigma_{11}^2 + 2\bar{a}_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + \bar{a}_{22}\sigma_{22}^2 \\ &\quad + \bar{a}_{33}\tau_{12}^2 + \bar{a}_{44}\tau_{13}^2 + \bar{a}_{55}\tau_{23}^2] \end{aligned} \tag{15}$$

여기서, S_{ij}는 축차응력(deviatoric stress)이고 σ_{ij}, τ_{ij}는 0이 아닌 응력 성분이다. 그리고 $\bar{a}_{ij}$는 이방성 매개변수이고, 이는 실험으로부터 결정된다.

식(15)를 행렬의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\phi(\sigma) = J'_2 = \frac{1}{2}\sigma_{1,2,3}^{T}\,\overline{A}\,\sigma_{1,2,3} \tag{16}$$

여기서,

$$\overline{A} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{55} \end{bmatrix} \tag{17}$$

만약, 이방성 주축 1,2가 x', y'축과 일치하지 않지만 임의 각도 θ만큼 회전하였다면 새로운 좌표계에 대응하는 매개변수는 다음과 같은 응력변환에 따라 변환된다.

$$\sigma_{1,2,3} = T\sigma \tag{18}$$

여기서, T는 앞의 식(8)에서 정의된 변환 행렬이다.

국부 좌표계 (x', y', z')에 대응하는 유효응력은 다음과 같다.

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^{T}\,A\sigma \tag{19}$$

여기서, A는 새로운 이방성 매개변수의 행렬로 다음과 같이 주어진다.

$$A = T^{T}\,\overline{A}\,T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \tag{20}$$

이방성 매개변수는 6개의 독립된 항복응력 시험으로부터 결정된다.

등방성 재료의 경우, $\sigma_{\theta,0} = \bar{\sigma}_{\theta}$, $\bar{a}_{22,0} = 1$ 그리고 $\bar{a}_{33,0} = 3$ 따라서 $\bar{a}_{12,0}$는 -0.5가 된다. 등방성 쉘 요소의 경우 전체 A 행렬은 다음과 같다.

$$A_{isotropic}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

3.3 탄소성 응력-변형도 관계

전체 변형율의 증분 $d\varepsilon$은 탄성 성분과 소성 성분의 합이다. 따라서, 증분 변형률은 다음과 같다.

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \tag{22}$$

소성 변형율 증분은 다음과 같다.

$$d\varepsilon^p = d\lambda\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \tag{23}$$

여기서, Q는 소성 포텐셜이고 $d\lambda$는 포텐셜 상수이다. 결합소성 이론(associated flow rule)에 따르면 $Q\equiv\phi$ 이므로, 식(23)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} d\varepsilon^p &= d\lambda\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{1}{2}\sigma^T A\sigma\right] \\ &= d\lambda A\sigma \end{aligned} \tag{24}$$

항복 조건 (13)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Psi &= J'_2-\frac{1}{3}\sigma_Y^2(\bar{e}^p) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^T A\sigma-\frac{1}{3}\sigma_Y^2(\bar{e}^p)=0 \end{aligned} \tag{25}$$

또는, 증분의 형태로 나타내면

$$d\Psi = A\sigma d\sigma-\frac{2}{3}\sigma_Y\sigma'_Y d\bar{e}^p=0 \tag{26}$$

여기서, 유효 소성 변형율의 증분은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} d\bar{e}^p &= \sqrt{\frac{2}{3}}\left[(d\varepsilon^p)^T d\varepsilon^p\right]^{1/2}=d\lambda\left[\frac{2}{3}\sigma^T A\sigma\right]^{1/2} \\ &= d\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\phi} \end{aligned} \tag{27}$$

여기서, $\bar{\phi}=[\sigma^T A\sigma]^{1/2}$.

소성 변형율 ${}^{t+\Delta t}\varepsilon^p$와 ${}^{t+\Delta t}\bar{e}^p$는 시간 영역 t에서 $t+\Delta t$까지, 소성법칙(flow rule)과 경화법칙(hardening law)의 적분으로부터 결정된다. generalized midpoint rule을 이용하여 소성변형율을 적분하면, 시간 $t+\Delta t$에서의 탄성 변형율은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\varepsilon^p &= {}^t\varepsilon^p+\int_t^{t+\Delta t}\lambda A\sigma dt \\ &= {}^t\varepsilon^p+\lambda A\,{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\bar{e}^p &= {}^t\bar{e}^p+\int_t^{t+\Delta t}\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\phi}dt \\ &= {}^t\bar{e}^p+\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\,{}^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}dt \end{aligned} \tag{29}$$

여기서, $0<\alpha\leq 1$ 이고, ${}^{t+\alpha\Delta t}$와 ${}^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}$는 다음과 같이 정의 된다.

$${}^{t+\alpha\Delta t}\varepsilon=\alpha^{t+\Delta t}\varepsilon+(1-\alpha)^t\varepsilon={}^t\varepsilon+\alpha\nabla{}^sU \tag{30}$$

$${}^{t+\alpha\Delta t}\varepsilon^p=\alpha^{t+\Delta t}\varepsilon^p+(1-\alpha)^t\varepsilon^p \tag{31}$$

$${}^{t+\alpha\Delta t}\bar{e}^p=\alpha^{t+\Delta t}\bar{e}^p+(1-\alpha)^t\bar{e}^p \tag{32}$$

$${}^{t+\alpha\Delta t}\sigma=D[\,{}^{t+\alpha\Delta t}\varepsilon-{}^{t+\alpha\Delta t}\varepsilon^p\,]+{}^0\sigma \tag{33}$$

$${}^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}=[\,{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma^T A^{t+\alpha\Delta t}\sigma]^{1/2} \tag{34}$$

식(28)과 그 이후 식들에서는 식의 간소화를 위해 $d\lambda$대신에 λ를 사용한다. 식(28)을 (31)에 대입하면 시간 $t+\alpha\Delta t$에서 응력과 소성 변형율과의 관계는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$${}^{t+\alpha\Delta t}\varepsilon^p=\alpha[\,{}^t\varepsilon^p+\lambda A^{t+\alpha\Delta t}\sigma]+(1-\alpha)^t\varepsilon^p \tag{35}$$

식(35)와 (33)으로부터 다음의 식이 얻어진다.

$${}^{t+\alpha\Delta t}\sigma=D[\,{}^{t+\alpha\Delta t}\varepsilon-{}^t\varepsilon^p-\alpha\lambda A^{t+\alpha\Delta t}\sigma]+{}^0\sigma \tag{36}$$

증분 응력-변형율 관계를 얻기위해, 식(36)은 다음의 증분 형태로 쓰여질 수 있다.

$$^{t+\alpha\Delta t}d\sigma = D[\,^{t+\alpha\Delta t}d\varepsilon - \alpha d\lambda A^{t+\alpha\Delta t}\sigma - \alpha\lambda A^{t+\alpha\Delta t}d\sigma] \quad (37)$$

또는,

$$^{t+\alpha\Delta t}d\sigma = \Xi(\lambda)[\,^{t+\alpha\Delta t}d\varepsilon - \alpha d\lambda A^{t+\alpha\Delta t}\sigma] \quad (38)$$

여기서, $\Xi(\lambda)=[D^{-1}+\alpha\lambda A]^{-1}$

식(25)의 항복 조건은 시간 $t+\alpha\Delta t$에서 다음과 같다.

$$^{t+\alpha\Delta t}\Psi = \frac{1}{2}\,^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}^2 - \frac{1}{3}\sigma_Y^2(\,^{t+\alpha\Delta t}\bar{e}^p) = 0 \quad (39)$$

또는,

$$^{t+\alpha\Delta t}d\Psi = \,^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}\,^{t+\alpha\Delta t}d\bar{\phi} - \frac{2}{3}\sigma_Y\sigma'_Y\,^{t+\alpha\Delta t}d\bar{e}^p = 0 \quad (40)$$

식(29)와 (32)로부터, 다음의 식이 얻어진다.

$$^{t+\alpha\Delta t}\bar{e}^p = \,^{t}\bar{e}^p + \alpha\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi} \quad (41)$$

또는,

$$^{t+\alpha\Delta t}d\bar{e}^p = \alpha\sqrt{\frac{2}{3}}[d\lambda^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi} + \lambda^{t+\alpha\Delta t}d\bar{\phi}] \quad (42)$$

그리고, 식(39)로부터

$$\sigma_Y(\,^{t+\alpha\Delta t}\bar{e}^p) = \alpha\sqrt{\frac{3}{2}}\,^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi} \quad (43)$$

식(42)와 (43)을 식(40)에 대입하면 다음의 식이 얻어진다.

$$^{t+\alpha\Delta t}d\Psi = \,^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}\,^{t+\alpha\Delta t}d\bar{\phi} - \frac{2}{3}\alpha\sigma'_Y\,^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}[\,^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}d\lambda + \lambda^{t+\alpha\Delta t}d\bar{\phi}] = 0 \quad (44)$$

또는,

$$^{t+\alpha\Delta t}d\Psi = \gamma_2\,^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}\,^{t+\alpha\Delta t}d\bar{\phi} - \frac{2}{3}\alpha\sigma'_Y\,^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}^2 d\lambda = 0 \quad (45)$$

여기서, $\gamma_2 = 1 - \frac{2}{3}\alpha\sigma'_Y\lambda$.

식(38)과 $d\bar{\phi} = \frac{1}{\bar{\phi}}\sigma^T A d\sigma$의 관계를 이용하여, 식(45)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\gamma_2^{\,t+\alpha\Delta t}\sigma^T A\Xi[\,^{t+\alpha\Delta t}d\varepsilon - \alpha d\lambda A^{t+\alpha\Delta t}\sigma] - \frac{2}{3}\alpha\sigma'_Y\,^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}^2 d\lambda = 0 \quad (46)$$

따라서, $d\lambda$는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\alpha d\lambda = \frac{^{t+\alpha\Delta t}\sigma^T A\Xi\,^{t+\alpha\Delta t}d\varepsilon}{^{t+\alpha\Delta t}\sigma^T A\Xi A^{t+\alpha\Delta t}\sigma(1+\beta)} \quad (47)$$

여기서,

$$\beta = \frac{2}{3}\frac{\sigma'_Y}{\gamma_2}\frac{^{t+\alpha\Delta t}\sigma^T A^{t+\alpha\Delta t}\varepsilon}{^{t+\alpha\Delta t}\sigma^T A\Xi A^{t+\alpha\Delta t}\sigma} \quad (48)$$

결국, 식(47)을 식(48)에 대입하면 다음과 같은 증분 응력-변형율 관계가 얻어진다.

$$^{t+\alpha\Delta t}d\sigma = \left[\Xi - \frac{\Xi A^{t+\alpha\Delta t}\sigma\cdot\,^{t+\alpha\Delta t}\sigma^T A\Xi}{^{t+\alpha\Delta t}\sigma^T A\Xi A^{t+\alpha\Delta t}\sigma(1+\beta)}\right]^{t+\alpha\Delta t}d\varepsilon \quad (49)$$

또는,

$$^{t+\alpha\Delta t}d\sigma = \Xi_{ep}\,^{t+\alpha\Delta t}d\varepsilon \quad (50)$$

여기서, Ξ_{ep}는 consistent elasto-plastic tangent moduli라 불린다.

$\Delta t\to 0$ 또는 $\alpha\to 0$이 되는 극한 상태의 경우, $\gamma_2\to 1$ 그리고 $\Xi\to D$가 된다. 따라서, Ξ_{ep}는 다음으로 표현될 수 있다.

$$\Xi_{ep} = D - \frac{DA\sigma \cdot \sigma^T AD}{\sigma^T ADA\sigma + \sigma'_Y \sigma^T A\sigma}$$

$$= D - \frac{Da \cdot a^T D}{a^T Da + \sigma'_Y} \tag{51}$$

이것은 전통적인 탄-소성 접선 계수, D_{ep}(3)와 일치한다.

3.4 Update Algorithm

Return mapping algorithm을 이용하여 직교 이방성 쉘 요소의 탄-소성 해석을 수행하기 위하여, 시간단계 $t+\Delta t$의 끝에서 항복조건을 적용할 경우, 즉 $\alpha=1$일때, 항복면에서 응력을 구하는 과정을 요약하면 다음과 같다.

1) 증분 변형율로부터 탄성 예상 응력을 구한다.
2) 식(52)와 (53)에서 하중재하/제거 조건을 확인한다.

$$\Psi \le 0,\ \lambda \ge 0,\ \Psi \cdot \lambda = 0 \tag{52}$$

$$\begin{aligned} &{}^{t+\Delta t}\Psi < 0,\ {}^{t}\Psi < 0 \text{ and } \lambda = 0 : \text{탄성} \\ &{}^{t+\Delta t}\Psi < 0,\ {}^{t}\Psi > 0 \text{ and } \lambda = 0 : \text{하중 제거} \\ &{}^{t+\Delta t}\Psi = 0 \text{ and } \lambda > 0 \quad : \text{하중 재하} \end{aligned} \tag{53}$$

3) 만약 응력이 탄성 상태에 있거나 하중 제거 상태에 있으면 전단계의 응력과 현재 단계의 증가량으로 총응력을 계산하고 반복과정을 중단한다.
4) 변수를 초기화 한다.

$$\begin{aligned} &\lambda = 0 \\ &F^{(k-1)} = 0 \\ &{}^{t+\Delta t}\Psi^{(k-1)} = 0 \\ &{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{p(k-1)} = {}^{t}\varepsilon^{p} \end{aligned} \tag{54}$$

5) 항복한 Gauss point에서, 항복조건을 만족시키는 응력, ${}^{t+\Delta t}\sigma^{(0)}$을 계산한다.
6) 다음과 같이 과도한 탄성 변형율 $F^{(k-1)}$을 계산한다.

${}^{t+\Delta t}\sigma = D({}^{t+\Delta t}\varepsilon - {}^{t+\Delta t}\varepsilon^{p}) + {}^{0}\sigma$: 일반화된 Hooke's Law

$$F^{(k-1)}({}^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)}) = D^{-1} \cdot ({}^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)} - {}^{0}\sigma) - ({}^{t+\Delta t}\varepsilon - {}^{t+\Delta t}\varepsilon^{p(k-1)}) \tag{55}$$

여기서 ${}^{0}\sigma$는 각 가우스 포인트에서의 잔류응력을 나타낸다.

7) 비례 상수의 증분량, $\Delta\lambda$을 계산 한다. 그리고 $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$로 비례상수를 갱신한다.

$$\Delta\lambda = \frac{{}^{t+\Delta t}\Psi^{(k-1)} - \left({}^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)T} - \frac{2}{3}\alpha\lambda\sigma'_Y{}^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)T}\right)A\Xi^{t+\Delta t}F^{(k-1)}}{\left({}^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)T} - \frac{2}{3}\alpha\lambda\sigma'_Y{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma^{(k-1)T}\right)A\Xi A^{t+\alpha\Delta t}\sigma^{(k-1)} + \frac{2}{3}\sigma'_Y{}^{t+\alpha\Delta t}\bar{\phi}} \tag{56}$$

또는 $\alpha=1$일 때

$$\Delta\lambda = \frac{{}^{t+\Delta t}\Psi^{(k-1)}/\gamma_2 - {}^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)T}A\Xi^{t+\Delta t}F^{(k-1)}}{{}^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)T}A\Xi^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)T}(1+\beta)} \tag{57}$$

여기서, γ_2 그리고 β는 식(45)와 식(48)에서 정의되었다.

8) 응력의 증분량, $\Delta\sigma$를 update한다.

$$\Delta\sigma = -\Xi({}^{t+\Delta t}F^{(k-1)} + \Delta\lambda A^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)}) \tag{58}$$

9) 항복 함수, ${}^{t+\Delta t}\Psi^{(k)}$를 계산한다.

$${}^{t+\Delta t}\Psi^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\Psi^{(k-1)} + \sigma^{(k-1)T}A^{t+\Delta t}\Delta\sigma^{(k-1)} - \frac{2}{3}\sigma_Y\sigma'_Y\Delta\bar{e}^{p} \tag{59}$$

10) 응력과 소성 변형율을 update한다.

$$\begin{aligned} &{}^{t+\Delta t}\sigma^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\sigma^{(k-1)} + \Delta\sigma \\ &{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{p(k)} = {}^{t+\Delta t}\varepsilon^{p(k-1)} + \alpha\lambda A^{t+\alpha\Delta t}\sigma \end{aligned} \tag{60}$$

11) 수렴 여부를 검사한다.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} < toler \tag{61}$$

12) 수렴하였을 경우, 전체 응력을 ${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma^{(k)}$로 update하고 계산을 마친다. 수렴하지 않으면 6)으로 돌아간다.

3.5 잔류 응력

구조용 압연 강재는 제조과정에서 균등하지 않은 냉각과정으로 인하여 잔류응력을 포함하게 된다. 플랜지가 넓은 H형강의 경우, 플랜지의 끝단은 플랜지와 웹의 교차점에 비하여 빨리 식게 된다. 즉, 플랜지의 끝단은 냉각되고 수축하는 중에도 플랜지의 중간부분은 아직 열기가 남아있고 부드러운 상태로 남아있게 된다. 따라서 플랜지의 끝단은 응력이 발생하지 않는 상태에서 수축을 일으키게 된다. 반면에, 플랜지의 중간부분이 냉각되어 수축이 일어나기 시작하는 상태가 되면, 이미 냉각되어 굳어져 있는 끝단에 의하여 플랜지 중앙부의 수축이 방해를 받게 된다. 따라서 최종적인 평형상태에서는 플랜지 끝단에서는 압축응력이 발생하며, 반대로 중앙부에는 인장응력이 발생하게 된다. 많은 연구들에 의하여, 플랜지가 넓은 H형 압연강재의 잔류응력은 플랜지 끝단에서 항복응력의 0.3배에 해당하는 것으로 나타났다[13),14)]. 본 연구에서는 사용한 H형강의 잔류응력 분포도는 그림 6을 참조할 수 있다. 플랜지 끝단의 최대 압축응력 $0.3\sigma_y$와 중앙부의 최대 인장응력 $0.3\sigma_y$ 사이에서 잔류응력 분포가 선형으로 변화하는 것으로 가정하였다.

본 연구에서는 탄소성 극한강도 해석시, 잔류응력의 영향을 고려하기 위하여 잔류응력에 해당하는 응력값을 초기 응력으로 입력하여 이를 해석에 반영하였다. 특히 그림 6과 같은 잔류응력의 분포를 고려하기 위하여 쉘 요소의 상단과 하단에서 잔류응력의 크기를 입력하고, 요소 내부의 가우스 포인트에서는 각 요소내에서 잔류응력의 선형 분포를 가정하여 초기 응력의 크기를 결정하였다.

3.6 탄소성 좌굴해석 알고리즘

잔류응력이 존재하는 경우에, 탄소성 좌굴하중을 산정하기 위해서는 일반적인 좌굴해석 알고리즘으로 한 번에 계산할 수 없으므로 반복 계산을 통한 좌굴하중 산정법을 적용하였다.

본 연구에서 적용한 탄소성 좌굴해석 알고리즘을 간략히 정리하면 다음과 같다.

1) 잔류응력이 존재하는 경우, 잔류응력을 초기 응력으로 재하한다.
2) 총 하중을 n등분한 하중(축력, 횡하중)을 단계적으로 재하시킨다.
3) i번째 하중단계에서 탄소성 해석(기하학적 선형해석)을 수행한다.
4) 각 하중단계에서 소성상태에 들어간 경우 5) 단계로 넘어가고, 그렇지 않으면 2)단계로 넘어간다.
5) 현 하중상태에 해당하는 접선강도 행렬 K_T와 기하강도 행렬 K_{NL}을 구성하고 식(62)를 이용하여 고유치 해석을 수행한다. 이때 Power Method를 적용하여 한 개의 최저차 모드만을 계산한다.

$$K_T\phi = \lambda K_{NL}\phi \tag{62}$$

6) 5)에서 계산된 고유치 λ가 1과 같게 되면 이때의 외부하중의 크기가 탄소성 좌굴하중이 되며, 프로그램을 종료시킨다.
7) λ가 1 보다 큰 경우 하중을 증가시키고, 1보다 작은 경우에는 하중을 감소시킨후 2)로 돌아간다.

4. 수치 예제

4.1 완전 구속된 정사각형 쉘

본 예제에서는 완전 구속된 정사각형 쉘의 중심점에 하중이 작용할 때의 탄-소성 해석을 수행하였으며, 재료의 성질은 다음과 같다.

등방성 재료의 경우:

$E_x = E_y = 3.0\times10^4 \quad G = 11540.0 \quad \nu = 0.3$

$\sigma_{0x} = \sigma_{0y} = \sigma_{045} = 30.0$

$\tau_{012} = \tau_{013} = \tau_{023} = 17.32$

$H' = 300.0$

이방성 재료의 경우 :

$\sigma_{0y} = 40.0 \quad \sigma_{045} = 35.0 \quad \tau_{012} = 20.2$

나머지 값들은 등방성 재료와 같다. (단위 : MN, m)

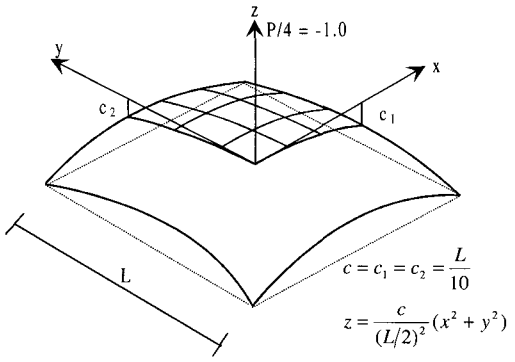


그림 1 중심점에 하중이 작용하는 완전 구속된 쉘

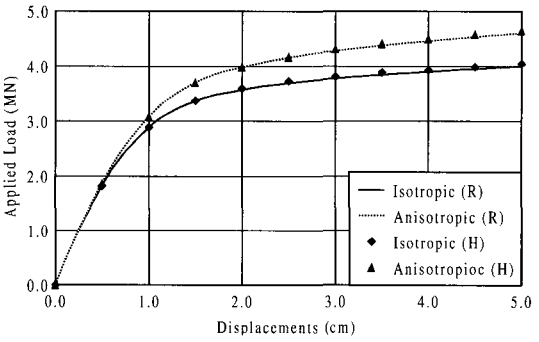


그림 2 완전 구속된 쉘의 탄-소성 해석

기하학적 형상은 그림 1에 나타나 있으며, 두께 $h=0.2m$이고 변의 길이 $L=0.6m$이다. 두께 방향으로 6개의 layer를 이용하였으며, 그림 2는 하중과 중심부의 처짐 관계 곡선을 나타낸다. 여기서, (H)는 전통적인 탄소성 방법을 적용한 Huang[12]의 결과를, (R)은 return mapping algorithm을 사용한 본 연구 결과를 나타낸다. 비선형 해석 알고리즘은 변위증분법을 적용하였으며, 수렴조건은 각 단계에서 불평형 하중의 비가 전단계에서의 불평형 하중의 0.1%이내에 들도록 하였다. 그림 3은 소성 영역의 분포를 나타내며 여기서 숫자는 소성 layer의 수를 나타낸다. 이방성 재료의 경우 비대칭 소성 영역의 분포를 볼 수 있으며, 등방성 재료에 비해 강성이 커지는 결과를 얻었다. 그림 2에 보인바와 같이 등방성 및 이방성 재료에 대해 두가지 방법에 의한 결과가 거의 일치함을 알 수 있다. 그러나 해를 얻기위한 반복계산 횟수는 표 1에 나타난바와 같이 return mapping algorithm을 사용한 경우에 현저히 줄어듬을 알 수 있다.

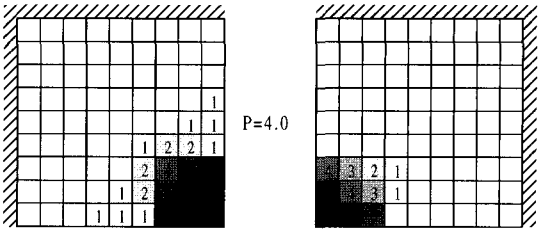


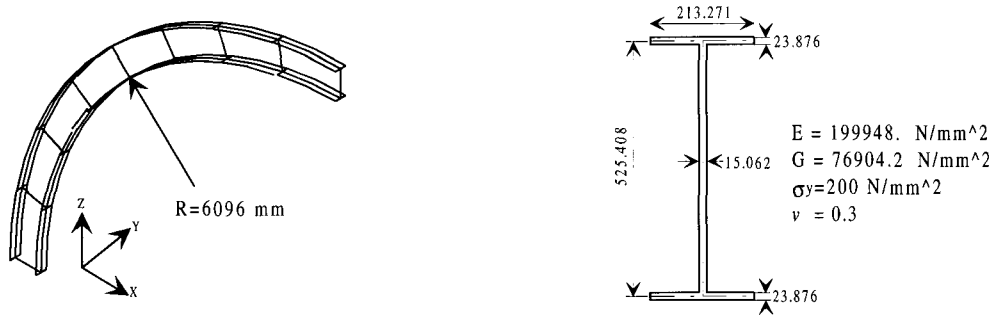
그림 3 완전 구속된 쉘의 각 Gauss point에서의 소성 layer 수

표 1 완전 구속된 쉘의 계산 반복 횟수 비교

Load Step	Classical Method		Return Mapping	
	Isotropic	Anisotropic	Isotropic	Anisotropic
1	3	3	2	2
2	3	3	3	3
3	3	3	3	3
4	4	3	2	2
5	4	5	2	2
6	5	4	2	2
7	4	5	2	2
8	5	4	2	2
9	5	4	2	2
10	4	4	2	2
Total	40	38	22	22

4.2 곡선 켄틸레버의 탄성 그리고 탄-소성 거동

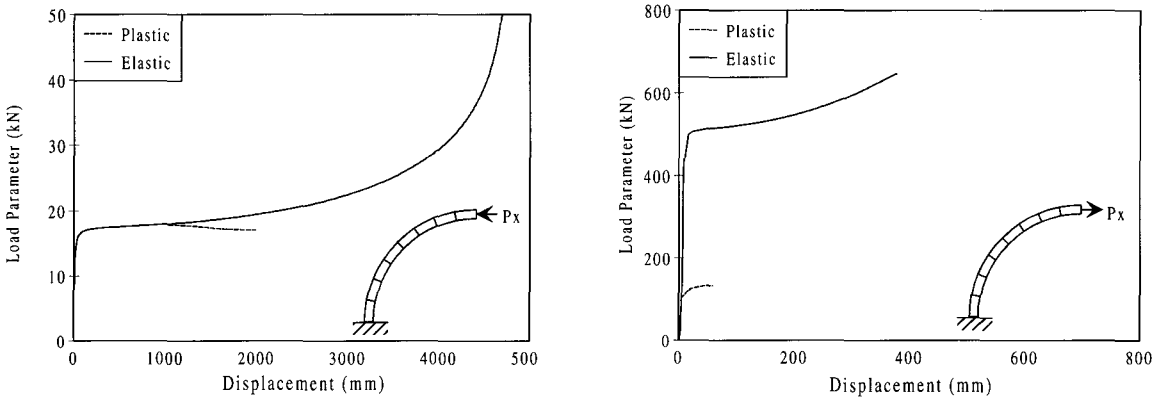
곡선 켄틸레버의 좌굴 및 후좌굴 해석이 탄성 및 탄-소성 재료를 이용하여 수행 되었다. 그림 4는 유한 요소망과 재료의 성질을 나타낸다. 여기서, 양 플랜지 부분은 복부와 유한한 각도로 연결되어 있으므로 플랜지 부분은 보강재 요소로 모델링 하였다. 그림 5는 정방향 수평력 또는 부방향 수평력이 작용할 때 힘-변위 곡선을 나타낸다. 그림 5에서 보는 것처럼 끝단에 부방향 수평력이 작용하는 경우 선형 좌굴 근처에서 횡 좌굴과 소성 항복이 동시에 발생한다. 그러나 끝단에 정방향 수평력이 작용하는 경우에는 횡 좌굴보다 작은 값에서 소성 항복이 발생한다. 끝단에 정-부방향 수평력이 작용할 때 좌굴 하중값은 각각 $17.59kN$과 $460.85kN$이다.



(a) Modeling

(b) Cross section and material propertie

그림 4 H형 단면을 갖는 곡선 켄틸레버



(a) Under negative end force

(b) Under positive end force

그림 5 곡선 켄틸레버의 하중-변위 곡선

4.3 잔류응력을 고려한 좌굴하중의 산정

본 연구에서 개발한 잔류응력을 고려한 탄소성 좌굴하중 산정법의 정당성을 확인하기 위하여 H형 단면을 갖는 직선 캔틸레버 구조물에 대하여 탄성 및 탄소성 좌굴하중을 산정하였다. 단면의 형상과 제원은 그림 6과 같으며 해석에 사용된 재료의 물성치는 다음과 같다. 캔틸레버의 길이, 즉 세장비에 따른 탄성 및 탄소성 좌굴하중 값은 그림 7에 나타내었다.

$E = 2.1\times10^6 N/cm^2$
$\sigma_Y = 1400 N/cm^2$
$H' = 0$
$A = 200\,cm^2$
$I = 2666.667\,cm^4$
$r = 3.6515\,cm$
$P_y = 280kN$

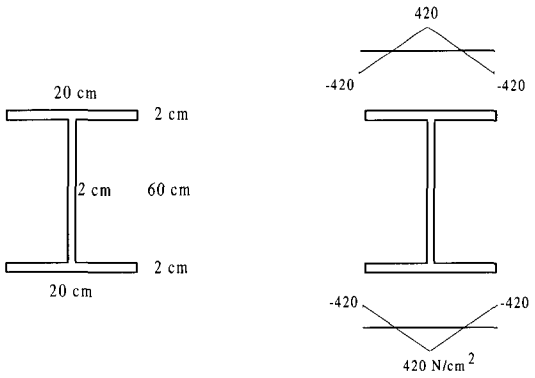


그림 6 H형강의 단면제원 및 잔류응력 분포

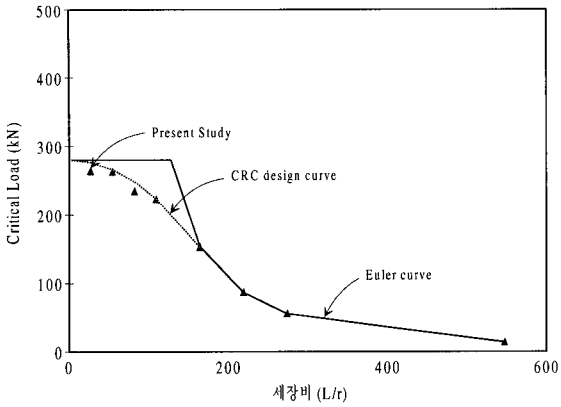


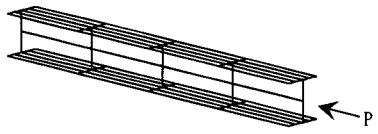
그림 7 잔류응력을 고려한 H형강의 좌굴 곡선

탄성 좌굴 하중의 경우 캔틸레버의 길이가 작아짐에 따라 뼈대 이론에 의한 Euler좌굴 하중값과 틀려지는데, 이는 쉘 요소에서는 뼈대 요소와 달리 길이가 작아짐에 따라 국부좌굴의 영향이 커지기 때문인 것으로 생각된다. 탄소성 좌굴하중의 경우는 Column Research Council에 의해 제안된 설계 곡선[15]과 비교하여 그림 7에 나타내었으며 이는 다음과 같은 식으로 표현된다.

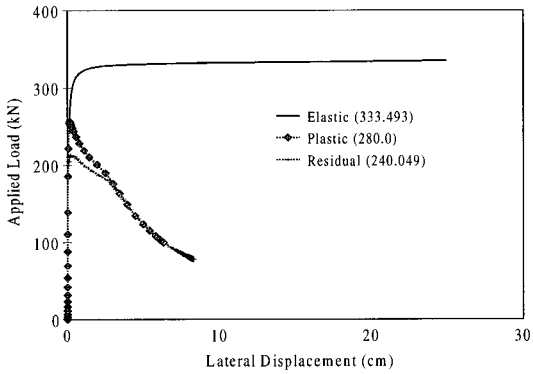
$$\sigma_{cr}=\sigma_y-\frac{\sigma_y^2}{4\pi^2E}\left(\frac{L}{\gamma}\right)^2 \tag{63}$$

4.4 I형 단면을 갖는 직선 캔틸레버의 잔류응력을 고려한 후좌굴 해석

그림 8과 같은 단면과 잔류응력 분포를 갖는 I형 캔틸레버에 대하여 압축하중에 대한 후좌굴 해석을 수행하였다. 단면의 제원과 물성치는 앞의 예제와 같다. 압축하중에 대한 캔틸레버의 모델링 형상과 후좌굴 해석결과는 그림 8에 나타내었다. 그림 8에서 Elastic은 탄성 후좌굴 해석결과를 의미하며, Plastic과 Residual은 각각 잔류응력이 없는 경우와 있는 경우의 탄소성 후좌굴 해석결과를 의미한다. 또한 괄호안의 숫자는 탄성 및 탄소성 거동을 고려한 고유치해석을 수행하여 산정한 탄소성 좌굴하중값을 표시한다. 그림 8에서 압축하중에 의한 후좌굴 해석시 잔류응력이 있는 경우는 없는 경우에 비해 구조물의 강도가 현저히 감소하였음을 알 수 있다.



(a) 모델링 형상



(b) 하중-변위 관계 곡선

그림 8 잔류응력에 따른 I형강의 휨-후좌굴 해석

5. 결 론

본 연구에서는 잔류응력을 고려한 탄소성 해석에서, 이방성 쉘 구조에 return mapping algorithm이 적용되었다. 탄소성해석의 전통적인 정식화와는 다르게, flow rule을 적분하는데 일반화된 midpoint rule을 적용함으로써 균일한 탄소성 접선계수가 얻어졌다. 제안된 알고리즘의 정확성과 효율성을 입증하기 위하여, 수치 예제를 제시하고 이전 연구와 비교 검토한 결과,

1) 탄소성 해석에서, 균일한 탄소성 접선 계수와 return mapping algorithm을 사용함으로써 좀더 정확한 해를 얻을 수 있었으며 해를 얻기 위한 반복횟수가 크게 감소하였으며,
2) 잔류응력을 고려한 탄소성 좌굴임계하중을 정확히 산정할 수 있으며, 그리고
3) 잔류응력을 고려한 기하학적 및 재료적 비선형 유한요소해석법이 성공적으로 적용되었다.
4) 결과적으로, 본 연구에서 제안된 쉘 요소를 이용한 해석기법을 사용함으로써, 좌굴, 후좌굴 및 탄소성을 포함한 보강된 쉘 구조의 극한강도 해석을 효과적으로 수행할 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 논문은 한국과학재단 산하 산업설비 안전성 평가 연구센타의 연구비와 포항제철 석좌교수 연구기금의 지원에 의해 수행되었으며 저자는 이에 깊은 감사를 표합니다.

참 고 문 헌

1. 최명수, 김문영, 장승필, "가정변형도 쉘요소를 이용한 보강된 쉘구조의 기하학적 비선형해석", 한국전산구조공학회 논문집, 2000.6, pp.209~220
2. K. J. Bathe and S. Bolourchi, "A geometric and material non-linear plate and shell element", *Comput. and Struct.*, Vol. 11, 1980, pp.23~48
3. D. R. J. Owen, and J. A. Figueiras, "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 19, 1983, pp.541~566
4. K. S. Surana, "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 17, 1983, pp.581~615
5. 김문영, 민병철, "보강된 쉘구조의 후좌굴 및 탄·소성 유한요소해석", 한국강구조학회논문집, 제6권, 제4호, 1994, pp.211~224
6. K. J. Bathe, *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, 1982
7. E. Hinton and D. R. J. Owen, *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press, 1985
8. J. C. Simo and R. L. Taylor, "Consistent Tangent Operators for Rate-independent Elastoplasticity", *Comp. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, Vol. 48, 1985, pp.101~118.
9. J. C. Simo and R. L. Taylor, "A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 22, 1986, pp.649~670
10. M. Ortiz and E. P. Popov, "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 21, 1985, pp.1561~1567
11. S. G. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Holder-Day, San Franciso, 1963
12. H. C. Huang, *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells*, Springer-Verlag, Berlin, 1989
13. L. S. Beedle and L. Tall, Basic Column Strength, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 86, No. ST7, 1960
14. A. Chajes, *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, 1974
15. B. G. Johnson, *Guide to Design Criteria for Metal Compression Members*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1966

(접수일자 : 1999. 10. 18)