

가정변형도 쉘요소를 이용한 보강된 쉘구조의 기하학적 비선형해석

Geometrically Nonlinear Analysis of Stiffened Shell Structures Using the Assumed Strain Shell Element

최 명 수* 김 문 영** 장 승 필***
Choi, Myeong-Su Kim, Moon-Young Chang, Sung-Pil

요 지

보강된 판 및 쉘구조의 기하학적 비선형해석을 수행하기 위하여, total lagrangian formulation에 근거한 증분 평형 방정식을 적용하고, 강도행렬 산정시 회전각의 2차항을 포함시켜 기하학적 비선형 해석시 해의 수렴성을 향상시켰으며, 보강된 쉘 구조의 해석시 보강재를 쉘 요소로 모델링하고 주부재와 보강재의 연결점에서 일반적인 변환관계를 이용하였다. 등매개 쉘 유한요소의 단점인 locking 현상을 극복하기 위하여 가정 변형률장을 적용하여 감차적분 또는 선택적분시 나타날 수 있는 제로 에너지 모드를 제거하였다. 수치해석 예제를 통하여 가정 변형률장에 근거한 쉘유한 요소에 대한 효율성 및 적용성을 확인하였다.

핵심용어 : 보강된 쉘, 좌굴해석, 유한회전, 가정변형도 쉘요소

Abstract

For non-linear analysis of stiffened shell structures, the total Lagrangian formulation is presented based upon the degenerated shell element. Geometrically correct formulation is developed by updating the direction of normal vectors and taking into account second order rotational terms in the incremental displacement field. Assumed strain concept is adopted in order to overcome shear locking phenomena and to eliminate spurious zero energy mode. The post-buckling behaviors of stiffened shell structures are traced by modeling the stiffener as a shell element and considering general transformation between the main structure and the stiffener at the connection node. Numerical examples to demonstrate the accuracy and the effectiveness of the proposed shell element are presented and compared with references' results.

Keywords : Stiffened Plate and Shell, Stability Analysis, Finite Rotation, Assumed Strain, Degenerated Shell Element

1. 서 론

쉘 구조물은 적절히 설계가 이루어진다면 미관이 뛰어나고 매우 효율적인 구조적 거동을 보인다. 그러

나 이러한 구조물의 안전성을 보장하기 위해서, 판 및 쉘 구조물의 거동을 파악하기 위한 적절한 해석방법의 개발이 요구되고 있다. 보강된 판 및 쉘구조에 대한 엄밀해는 적용범위가 제한되어 있고 임의의 형상, 하

* 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템 공학부, 박사과정 졸업

** 정회원 · 성균관대학교 토목공학과, 교수

*** 서울대학교 지구환경시스템 공학부, 교수

· 이 논문에 대한 토론을 2000년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

중조건, 불규칙한 보강과 지지조건 등을 고려한 실제 구조물해석에 적용할 수 없다. 결과적으로 이러한 복잡한 문제들을 취급하기 위해서는 판 및 쉘요소를 이용한 유한요소해석을 수행하여야 한다.

또한, 판 및 쉘 구조는 좌굴거동에 매우 민감하다. 더우기 좌굴거동은 이러한 구조물의 안전과 관련하여 매우 중요한 문제가 되고 있다. 그래서, 이러한 문제점을 해결하기 위해서는 보강재를 설치할 필요가 있다.

Ahmad¹⁾에 의하여 처음 개발된 등매개 쉘요소는 locking 현상으로 강성이 과도하게 계산되는 단점이 발견되었다. 감차적분법^{2),3)}을 적용함으로써 문제가 해결되는 듯하였으나, 감차적분법은 제로에너지 모드의 발생으로 종종 잘못된 해를 얻게 하였다. 이러한 문제를 동시에 해결하기 위하여 Stolarski와 Belytschko^{4),5)}, Belytschko⁶⁾은 감차적분의 장점을 살리면서 제로 에너지 모드의 발생을 억제하는 방법을 제시하였다. 한편으로 가정 변형도장⁷⁾⁻¹⁷⁾을 도입하여 shear locking과 membrane locking을 해결하는 방안이 성공적으로 제시되었다. Surana¹⁸⁾는 쉘 구조의 기하학적 비선형해석에서 회전각의 2차항을 고려하였으며, Owen과 Figueiras¹⁹⁾는 직교이방성 탄소성 판 및 쉘 해석법을 제시하였다. 또한 김과 민²⁰⁾은 변위 및 하중중분법을 이용하여 보강된 쉘 구조의 후좌굴 및 탄소성 해석을 수행하였다.

본 연구에서는 보강된 판 및 쉘구조의 기하학적 비선형해석이 정확하고 효율적으로 이루어질 수 있도록 기존의 9절점 변형된 쉘요소의 단점을 보완하는 개선된 유한요소 해석법을 제시한다. 이를 위하여 Haug^{14),15)}과 Bathe^{11),17)} 등에 의해서 개발된 가정 변형률장을 응용함으로써 등매개 쉘 유한요소의 단점인 locking 현상을 극복하고, 감차적분 또는 선택적분시 나타날 수 있는 제로 에너지 모드를 제거한다. 그리고 증분회전각으로 인한 법선벡터의 변화를 엄밀히 고려하고 층변위에 대응하는 변형도를 산정함으로써, 쉘 구조에 대해 기하학적으로 정확한 비선형해석이 이루어지도록 한다. 또한, 접선강도행렬 산정시 회전각의 2차항을 고려하여 해의 수렴성을 향상시키며, 보강된 판 및 쉘 구조의 대변형해석 이론을 제시한다.

2. 변형된 쉘 유한요소이론

본 연구에서는 등매개 쉘요소(degenerated isopara-

metric shell element)가 사용되며, 이 쉘요소를 정식화하는데 사용되는 기본가정은 다음과 같다.

- 1) 중립면에 수직한 법선은 변형후에도 법선을 유지한다.
- 2) 응력-변형도 관계식에서 쉘중립면에 수직한 응력은 영으로 간주한다.

여기서 고려되는 요소는 쉘구조의 곡면형상을 적절히 나타낼 수 있는 9절점 쉘요소이다.

2.1 좌표계

네개의 좌표계(그림 1참조)가 도입되며 이들은 다음과 같이 정의된다.

- (1) 전체좌표계- (x, y, z) 로 표시되며 이 좌표계의 기저벡터는 (e_1, e_2, e_3) 로 나타낸다. 이 좌표계는 각 절점의 좌표성분과 이동변위 자유도를 정의하기 위하여 사용된다.

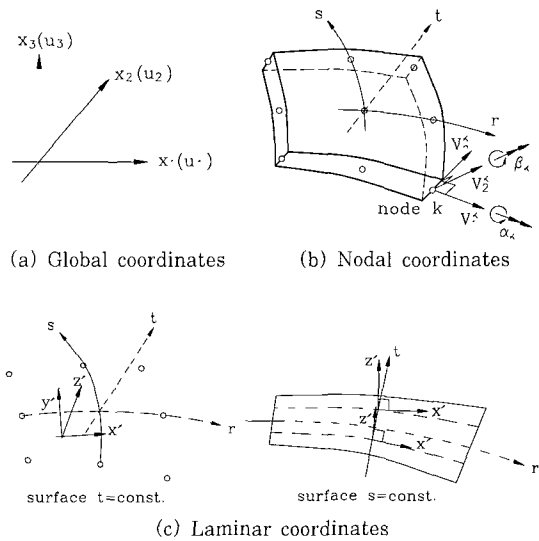


그림 1 9 node shell element

- (2) 절점좌표계(nodal coordinates system)-각 절점에서 두 개의 회전자유도를 정의하기 위하여 절점좌표계가 사용된다. V_n^* 의 방향은 주어진 절점에서 두께방향과 일치하도록 선택한다. 다른 기

저벡타는 식(1)과 같이 설정한다.

$$V_1^k = e_2 \times V_n^k \quad (1a)$$

$$V_2^k = V_n^k \times V_1^k \quad (1b)$$

여기서 V_n^k 가 e_2 와 방향이 동일할 때에는, V_1^k 는 e_1 방향과 같게 선택한다.

- (3) 곡선좌표계- (r, s, t) 로 표시되며 -1과 +1 사이의 값을 갖는다. 곡선좌표계와 전체좌표계 사이의 관계는 요소의 형상을 정의하는 식(2)에 의해서 주어진다.
- (4) 적층(laminar)좌표계 - 각 가우스 적분점에서 정의되는 직각좌표계 (x', y', z') 을 나타내며, 이 중 두개의 축은 쉘의 적층면에 접선방향이다.

2.2 변형된 쉘 요소의 형상과 변위장

쉘요소의 초기형상은 곡선좌표계를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^0X_i = \sum_{k=1}^n N_k {}^0X_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n N_k h_k {}^0V_{ni}^k \quad i=1,2,3 \quad (2)$$

여기서 ${}^0X_i = {}^0X_i(r, s, t)$ 는 쉘요소 내부점의 위치 벡터이고, h_k 는 절점 k 에서 쉘 두께이며, N_k 는 형상 함수로서 (r, s) 의 함수로 표시된다. 쉘요소의 변형거동에 대한 가정 1)을 고려하면, 시간 t 에서 요소내부의 점 (r, s, t) 에 대응하는 위치벡터는 다음과 같이 표시된다.

$${}^tX_i = \sum_{k=1}^n N_k {}^tX_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n N_k h_k {}^tV_{ni}^k \quad i=1,2,3 \quad (3)$$

쉘 거동에 대한 두개의 가정을 고려하여 3차원 연속체요소를 쉘요소로 변형시키게 되면, 변위장은 절점 당 5개의 자유도 즉, 세 개의 이동변위 (U_1^k, U_2^k, U_3^k)와 서로 수직한 V_1^k 와 V_2^k 에 대한 두개의 회전각 (α_k, β_k) 로 표시할 수 있으며 쉘내부의 각 점에서 총변위 및 증분변위벡터는 식(2)와 (3)으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} U_i &= {}^{t+\Delta t}X_i - {}^tX_i = \sum_{k=1}^n N_k U_i^k \\ &+ \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n N_k h_k ({}^{t+\Delta t}V_{ni}^k - {}^tV_{ni}^k) \\ &\cong \sum_{k=1}^n N_k U_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n N_k h_k (-{}^tV_{2i}^k \alpha_k \\ &+ {}^tV_{1i}^k \beta_k - \frac{1}{2} {}^tV_{ni}^k \cdot (\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \end{aligned} \quad (4)$$

밀출진 항은 절점회전각의 2차항을 나타내며, 이 항은 기존의 강도행렬에 추가되는 기하학적 강도행렬을 산정할때 사용된다.

2.3 증분평형방정식

Total Lagrangian formulation에 근거하여 연속체에 대한 증분평형방정식은 다음과 같이 표시된다

$$\begin{aligned} &\int_V ({}^0C_{ijkl} {}^0e_k \delta e_{ij} + {}^tS_{ij} \delta_0 \eta_{ij} + {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij}^*) {}^0dV \\ &= {}^{t+\Delta t}R - \int_V {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij} {}^0dV \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 ${}^0C_{ijkl}$ 은 응력-변형도성분, ${}^0e_{ij}$, ${}^0\eta_{ij}$ 는 초기형상을 기준으로한 Green-Lagrange strain의 선형 및 비선형 증분변형도 성분, ${}^0e_{ij}^*$ 는 절점회전각의 2차항으로 인한 선형 변형도를 나타내며, ${}^tS_{ij}$ 는 second Piola-Kirchhoff stress를 표시한다. ${}^{t+\Delta t}R$ 은 외적가상일, δ 는 변분을 의미한다.

식(2), (4)를 고려하고, 등매개 형상함수를 도입하여 적분을 행하면 한 개의 유한요소에 대한 증분평형방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$({}^tK_L + {}^tK_{NL})\Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} {}^tK_L &= \int_V {}^tB_L^T {}^tC {}^tB_L {}^0dV \\ {}^tK_{NL} &= \int_V {}^tB_{NL}^T {}^tS {}^tB_{NL} {}^0dV + {}^tK_{NL}^* \\ {}^tF &= \int_V {}^tB_L^T {}^tS {}^0dV \end{aligned} \quad (7)$$

식(6), (7)에서 tK_L 와 ${}^tK_{NL}$ 은 각각 선형(탄성)

및 비선형(기하학적) 강도행렬을 나타내며, ΔU 는 절점 변위벡터의 증분 그리고 δF 는 요소내부에 발생하는 응력에 대응하는 등가 절점력을 의미한다. δB_L 와 δB_{NL} 은 선형 및 비선형 변형도-변위 변환행렬을 나타내며, δK_{NL} 은 회전각의 2차항으로 인한 비선형 강도행렬을 표시한다.

2.4 보강된 쉘구조의 기하학적 비선형 해석

일반적인 쉘요소는 쉘두께방향의 회전자유도를 제외하고 절점당 5개의 자유도(3개의 이동변위와 2개의 회전변위)를 갖는다. 보강재가 있는 판이나 쉘구조 또는 부재가 유한한 각도로 만나는 박벽구조를 해석하는 경우에 주부재와 보강재가 만나는 절점에서는 자유도의 적합조건을 만족시키기가 어렵다. 본 연구에서는 주부재와 보강재가 연결되는 연결점을 제외한 모든 절점의 자유도는 일반적인 쉘요소와 같이 5개의 자유도를 정의하고 연결점에서는 6개의 자유도를 사용하였다. 이때 각 연결점에서 보강재의 회전자유도는 주부재의 회전자유도로 변환되어진다.

시간 t 에서 주부재의 절점좌표계와 전체좌표계 사이의 좌표변환행렬은 아래와 같이 표시된다.

$$X_i = T_{ij}^k X_j$$

$$T_{ij}^k = [V_1^k \quad V_2^k \quad V_3^k] \tag{8}$$

여기서 X_i 는 전체좌표계에서의 위치벡터, X_j 는 주부재의 절점좌표계에서의 위치벡터이다.

주부재의 경우와 마찬가지로 보강재의 좌표변환행렬은 아래와 같다.

$$X_i = \hat{T}_{ij}^k \hat{X}_j$$

$$\hat{T}_{ij}^k = [\hat{V}_1^k \quad \hat{V}_2^k \quad \hat{V}_3^k] \tag{9}$$

여기서 \hat{X}_i 는 보강재의 절점좌표계에서의 위치벡터이다.

본 연구에서는 쉘요소가 유한한 각도로 만나는 경우에 두 부재중 하나는 주 부재로 나머지 하나는 보강재로 구별한다. 이때 두 부재가 만나는 절점에서는 주 부재와 보강재에 대응하는 두개의 법선벡터가 존재하므로, 보강재의 강도행렬과 불평형하중을 산정할

때 연결점에서 보강재에 대응하는 절점좌표계에서 계산된 강도행렬과 부재력벡터를 주부재에 대응하는 절점좌표계로 변환이 필요하다. 이러한 변환에 사용되는 좌표변환행렬은 아래와 같다.

$$X_i = (T_{ij}^k)^T X_j = (T_{ij}^k)^T (\hat{T}_{ij}^k) \hat{X}_i$$

$$C_{ij}^k = T_{ij}^k \hat{T}_{ij}^k \tag{10}$$

보강재의 절점좌표계에서 계산된 점선강도행렬 ($\delta \bar{K}_L + \delta \bar{K}_{NL}$)을 주부재의 절점좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$\delta K_L + \delta K_{NL} = {}^t T \cdot (\delta \bar{K}_L + \delta \bar{K}_{NL}) \cdot ({}^t T)^T \tag{11}$$

이와 유사하게 부재력 벡터 (δF)는 아래와 같이 산정한다.

$$\delta F = {}^t T_0^k \delta \bar{F} \tag{12}$$

여기서 ${}^t T$ 는 한 요소에 대한 변환행렬을 나타내며, 보강재의 연결점에 대한 구체적인 식은 아래와 같다.

$${}^t T = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & I_3 & 0_3 & & \\ & 0_3 & {}^t C^k & & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} \tag{13}$$

3. 가정 변형률장을 고려한 쉘 유한요소

Mindlin 판요소와 변형된 쉘요소는 어느 정도 두꺼운 요소의 경우는 적절한 결과를 얻을 수 있다. 그러나 얇은 판이나 쉘요소의 경우 구조물의 강성이 과대 평가되는 shear locking과 membrane locking 현상으로 인하여 정확한 해를 얻을 수 없었다. 이를 해결하기 위하여 감차적분법과 선택적분법 등의 방법이 연구되었으나, 이 또한 유사 제로 에너지 모드가 발생하여 정확한 해를 구하는데 어려움을 겪어왔다. 본 연구에서는 변형된 쉘요소의 이러한 두가지 결점을 극복하기 위하여 가정 변형률장을 적용한 새로운 요소를 사용하였다.

3.1 가우스 수치적분

변형률에 대하여 1차 함수가 가정되었을 때, 두께 방향으로 2개의 Gauss point 만으로도 선형재료 문제에 있어서는 휨 거동을 추적하는데 충분하다. 쉘 평면(표면 $t=$ 일정) 내에서 일반 적분 규칙은 $m \times m$ Gauss points로 구성되어 있다. 여기서 m 은 각 요소의 변의 절점 수이다.

감차적분은 수치적분시 필요한 Gauss point의 수를 각 방향으로 하나씩 줄여서 사용한다. 얇은 쉘에 감차적분을 적용할 경우 membrane 변형은 물론 두께방향 전단 변형에 대해서도 해의 정확성에 분명한 개선이 이뤄진다. 그러나, 감차적분의 균일한 적용은 강제모드에 추가로 발생하는 메커니즘이 강도 매트릭스의 rank를 감소시키는 경향이 있다.

9절점 Lagrangian 요소의 제로 에너지 모드 수는 다음과 같다.

- Membrane 메커니즘 수 : 2+1(*)
- 휨 메커니즘 수 : 3+1(*)
- (*) - 2개 또는 그 이상의 요소에 적용되지 않음

저차 요소의 경우, 감차적분을 얇은 쉘에 적용하면 정확한 결과를 얻을 수 있다. 고차 요소의 경우에도 감차적분의 적용은 해의 정확성에 분명한 기여를 하였다. 그러나, 감차적분의 균일한 적용은 때때로 제로 에너지 모드라는 잘못된 결과를 도출한다.

선택적분의 경우, 전단과 막(또는 전단) 항은 감차적분을 사용하여 계산되는 반면 휨(또는 휨과 막) 에너지는 일반 적분을 사용하여 계산된다. 선택적분 사용 시, 메커니즘의 수는 다음과 같다.

- Membrane 메커니즘 수 : 2+1(*)
- 휨 메커니즘 수 : 1
- (*) - 두개 이상의 요소망에는 적용되지 않음

따라서, 선택적분은 감차적분에 비해 적은 메커니즘을 가지고 있으나, 여전히 제로 에너지 모드를 포함하고 있다.

3.2 가정 변형률장

Mindlin 판 이론에 따르면, 판과 쉘의 이동 변위

에 대하여 회전 변위는 독립적이다. 두께방향 전단 변형은 판 또는 쉘의 두께가 현저히 얇아짐에 따라 점차 사라지게 된다. 그러나, 유한요소법과 같은 수치적 방법에 의하여 얻어진 타당한 영역의 개별적 부분의 평균 전단 변형률은 부분적으로 옳을 수 있다. Mindlin 형태의 정식화와 유한요소법이 결합되어 사용되었을 때, 유한요소법에 의하여 예상되는 전단 변형 에너지는 전체넓이의 전단 변형 에너지의 평균값이 제로가 되는 경향이 있음에도 불구하고, 비정상적으로 과장될 수 있다.

Shear locking 현상을 제거하는 하나의 인위적인 방법은 개별요소에 적절하게 위치하는 표본점에서 새로운 전단 변형 영역을 보간하는 것이다.

9절점 Lagrangian 요소의 경우, θ_r 과 w_r 의 다항식 차수와 θ_s 와 w_s 의 다항식 차수가 다음과 같이 서로 일치하지 않는다.

$$\begin{aligned} \theta_r &= \theta_r [1, r, s, rs, r^2, s^2, r^2s, rs^2, r^2s^2] \\ w_{,r} &= w_{,r} [1, r, s, rs, s^2, r^2s] \\ \theta_s &= \theta_s [1, r, s, rs, r^2, s^2, r^2s, rs^2, r^2s^2] \\ w_{,s} &= w_{,s} [1, r, s, rs, r^2, r^2s] \end{aligned} \tag{14}$$

식(14)에서 $\bar{\gamma}_r$ 와 $\bar{\gamma}_s$ 의 변형률 장은 적어도 다음 자유도의 다항식으로 표시됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_r &= \theta_r + w_{,r} \\ &= b_1 + b_2 r + b_3 s + b_4 rs + b_5 s^2 + b_6 rs^2 \bar{\gamma}_s \\ &= \theta_s + w_{,s} = c_1 + c_2 r + c_3 s + c_4 rs + c_5 r^2 + c_6 r^2 s \end{aligned} \tag{15}$$

만약 가정 변형률 장이 식(15)에서 가정한 것보다 적은 자유도의 다항식으로 가정된다면, 제로 에너지 모드가 발생할 것이다. 이러한 현상은 선택적분시 발생한다.

$\bar{\gamma}_r$ 는 r 의 1차 함수이고 s 의 2차 함수이며, $\bar{\gamma}_s$ 는 s 의 1차 함수이고, r 의 2차 함수이다. 따라서, 두께 방향의 전단 변형률 장을 나타내기 위해서는 6개의 표본점이 필요하다(그림 2). 그림 2에서, a와 b는 Gauss 적분 규칙의 2점과 3점의 적분점과 일치한다.

극좌표계에서 면내 변위는 다음과 같이 표현될 수 있다.

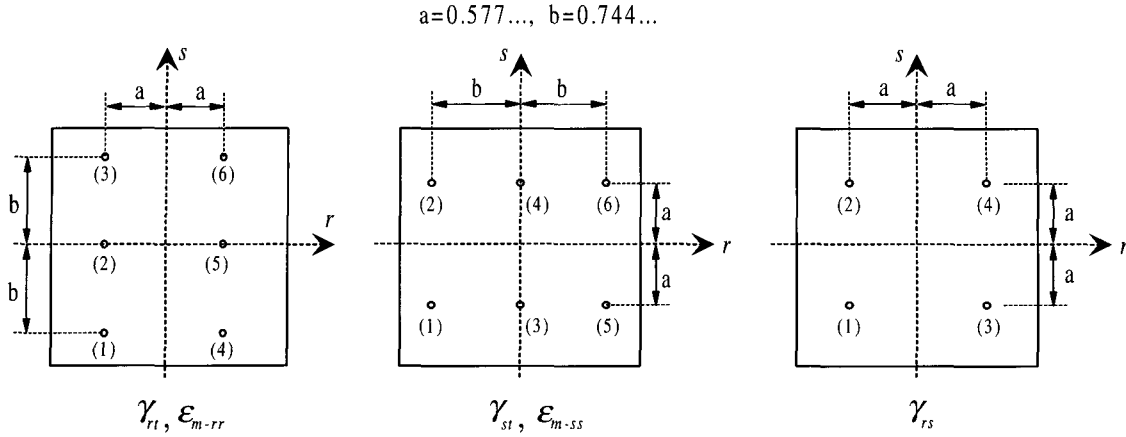


그림 2 9절점 Lagrangian 요소의 표본 절점

$$\begin{aligned} u_r &= u_{r0} + t\theta_r \\ u_s &= u_{s0} + t\theta_s \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, u_{r0} 와 u_{s0} 는 쉘의 중앙면에서의 변위이다.

변위 u_{r0} 와 u_{s0} 는 r 과 s 의 2차 함수이다. 따라서, 쉘의 중앙면($t=0$)에서 membrane strain ϵ_m 은 (16)에서 얻어지며, 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{r0,r} &= u_{r0,r}[1, r, s, rs, r^2, s^2] \\ u_{s0,s} &= u_{s0,s}[1, r, s, rs, r^2, s^2] \\ u_{s0,r} &= u_{s0,r}[1, r, s, rs, r^2, s^2] \\ u_{r0,s} &= u_{r0,s}[1, r, s, rs, r^2, s^2] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{m-rr} &= u_{r0,r} \\ &= d_1 + d_2 r + d_3 s + d_4 rs + d_5 r^2 + d_6 s^2 \\ \bar{\epsilon}_{m-ss} &= u_{s0,s} \\ &= e_1 + e_2 r + e_3 s + e_4 rs + e_5 r^2 + e_6 s^2 \\ &= \frac{1}{2}(u_{r0,s} + u_{s0,r}) = f_1 + f_2 r + f_3 s + f_4 rs \end{aligned} \quad (18)$$

따라서, ϵ_{m-rr} 은 r 방향에 따라 1차 함수이며 s 방향에 따라 2차 함수이다. 또, ϵ_{m-ss} 는 s 방향을 따라 1차 함수, r 방향을 따라 2차 함수이다. 그리고, 면내 전단 변형율은 양방향에 따라 1차 함수이다. 따

라서, 막 변형률 장을 나타내기 위해서는 6개의 표본점이 필요하며, 면내 전단 변형율을 나타내기 위해서는 4개의 표본점이 필요하다(그림 2).

3.3 강도행렬의 구성

가정 변형률장을 이용한 요소에서 모든 적분은 원래의 가우스 적분점에서 행해진다. 따라서, 강도행렬을 구성하기 위해서는 표본점에서 계산한 변형률을 적당한 형상함수를 이용하여 원래의 가우스 적분점으로 보간하는 과정을 필요로 한다. 일반적으로 유한요소는 규칙적인 요소망으로만 구성되지는 않는다. 따라서 요소내의 좌표계는 직각 좌표계가 아닌 곡선좌표계를 사용하게 된다. 이러한 곡선좌표계는 가우스 적분점이나 표본점에서의 국부좌표계와 일치되지 않으므로 국부좌표계를 기준으로 계산된 변형률 성분을 곡선좌표계를 따라 보간하게되면 적합조건을 만족할 수 없다.

본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여 각 표본점에서 곡선좌표계를 기준으로하여 식(19)와 같이 변형률의 covariant 성분을 계산하였다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r_i} \cdot g_j + \frac{\partial u}{\partial r_j} \cdot g_i + \frac{\partial u}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial r_j} \right) \quad (19)$$

그리고, 식(20)의 형상함수에 의하여 표본점의 변형율 ϵ_{ij} 를 이용하여 일반 3×3의 적분 규칙에 따른 Gauss 적분점에서의 변형률을 계산한다.

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{rt} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 M_i(s) N_j(r) \gamma_{rt}^{ij} \\ \bar{\gamma}_{st} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 M_i(r) N_j(s) \gamma_{st}^{ij} \\ \bar{\epsilon}_{m-rr} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 M_i(s) N_j(r) \epsilon_{m-rr}^{ij} \\ \bar{\epsilon}_{m-ss} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 M_i(r) N_j(s) \epsilon_{m-ss}^{ij} \\ \bar{\epsilon}_{m-rs} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 N_i(r) N_j(s) \epsilon_{m-rs}^{ij} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \frac{x}{2b} \left(\frac{x}{b} + 1 \right), \\ M_2(x) &= 1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2, \\ M_3(x) &= \frac{x}{2b} \left(\frac{x}{b} - 1 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

그리고,

$$N_1(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{a} \right), \quad N_2(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \quad (22)$$

최종적으로, 위에서 보간된 covariant 변형률 성분을 각 가우스 적분점에서의 국부좌표계를 사용하여 물리적인 변형률 값으로 변환한다. 이후에 강도행렬을 구성하는 절차는 일반적인 변형된 쉘요소에서 강도행렬을 구성하는 방법과 같다.

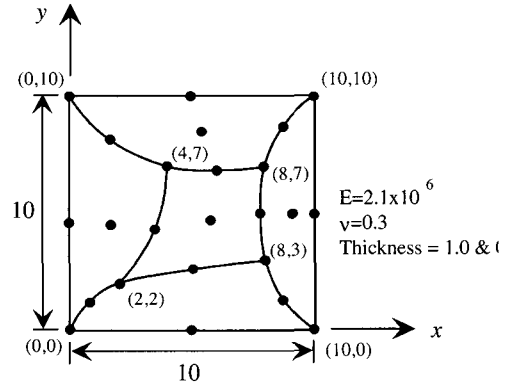
4. 수치해석 예

4.1 Patch Test

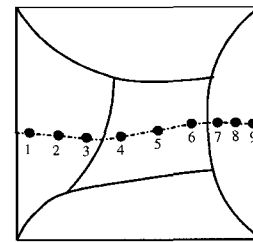
Patch test는 요소의 수렴을 확인 하는데 널리 활용되어 왔다. 가정 변형도 유한요소의 patch test는 그림 3(a)에서와 같은 임의의 사변형 판으로 행해진다.

평면응력 patch test는 인장 시험으로 행해진다. 자유단 변에 분포하중이 일정하게 작용한다(그림 4(a)). 평면 전단응력 patch test에서 분포 전단 응력이 일정하게 분포한다(그림 4(b)). 그림 4(c)에 보여진 휨 patch test에서, 왼쪽이 완전고정된 patch test 요소의 오른쪽 면에 일정하게 등분포 하중이 작용한다. 전단 patch test에서(그림 4(d)), 변에 일정하게 작

용하는 횡 하중은 왼쪽 변이 완전 고정된 요소의 오른쪽 변에 작용한다.

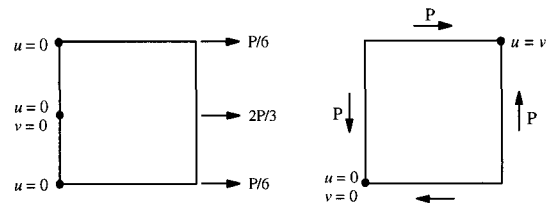


(a) Patch of element



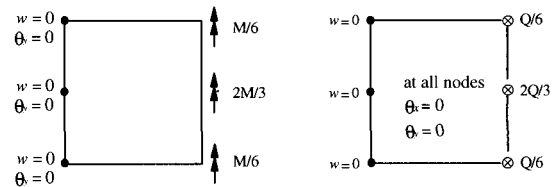
(b) Gauss points for stress evaluation

그림 3 Patch test를 위한 유한요소망



(a) Tension test

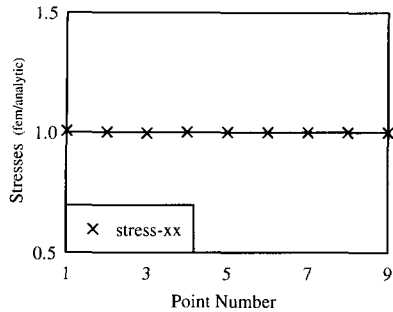
(b) In-plane shear test



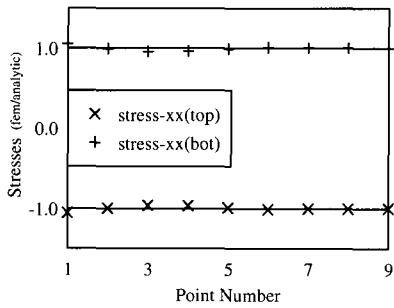
(a) Bending test

(b) Transverse shear test

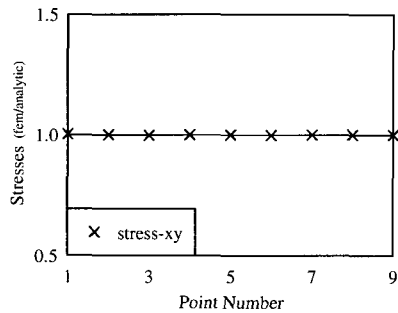
그림 4 직사각형 판요소의 patch test



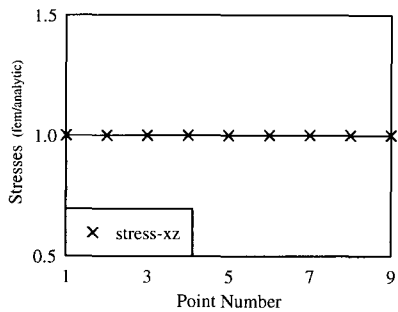
(a) Tension test



(b) In-plane shear test



(c) Bending test



(d) Transverse shear test

그림 5 Patch test의 응력 분포 결과

본 연구에서 사용된 가정 변형도 유한 요소는 위의 균일한 인장력과 전단력 그리고, 일정한 모멘트 장과 전단력 장등의 모든 patch test를 통과 하였다. 그림 5는 그림 3(b)에서와 같이 Gauss point를 따라 임의로 선택된 점에서의, patch test 결과를 보여주고 있다. 해석적인 해와 약간의 차이를 보이지만, 일정 응력 상태는 요소의 기하적 거리에 대하여 적은 민감도를 나타낸다.

4.2 Locking Tests

하중이 일정하게 작용하는 정사각형 대칭 4분면의 완전 고정된 판을 2×2 요소(그림 6)를 사용하여 이상화 하였다. 새로운 요소를 사용한 결과 locking 현상이 발생하지 않으며, Kirchhoff의 얇은 판의 결과 값에 수렴하게 됨을 알 수 있다.

곡면 쉘의 membrane locking 현상을 확인하기 위하여 끝단에 휨 모멘트가 작용하는 경우의 곡선 캔틸레버를 구성하고 있는 그림 7과 같은 경우를 생각한다.

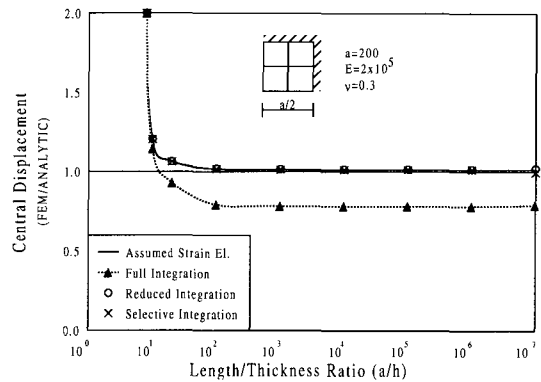


그림 6 완전 고정된 정사각형 판의 shear locking test

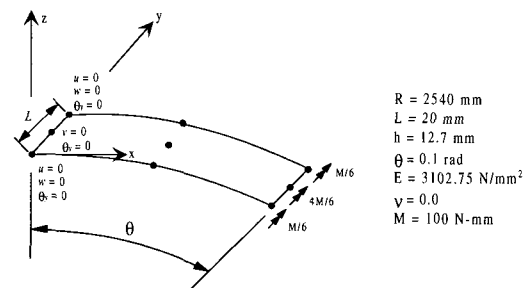


그림 7 곡선 캔틸레버의 membrane locking 현상 test

표 1 곡선 켈틸레버의 membrane force

요소 수	Assumed Strain Element	감차적분	선택적분	완전적분
1×1	0.0	-	0.310	0.310
4×1	0.0	0.0	0.025	0.025

켈틸레버는 1개 또는 4개의 9절점 요소로 모델링하였다. 켈틸레버에 1개의 요소가 사용되었을 때는 메커니즘(zero energy mode) 때문에 감차적분을 통한 결과를 얻을 수 없다. 표 1은 assumed strain 요소와 감차적분을 사용하여 membrane locking 현상을 제거된 것을 보여주고 있다.

4.3 수렴 Test

자체 평형 집중 하중에 저항하는 반구형 셸이 2개의 곡률을 갖는 셸 문제의 benchmark test에 이용된다. 반구형 또는 셸은 잘려나간 부분에서 18개의

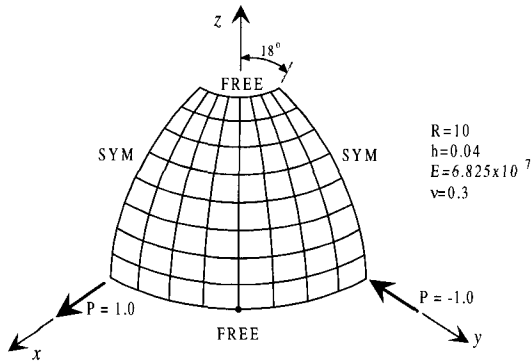


그림 8 반구형 셸의 유한 요소 분할

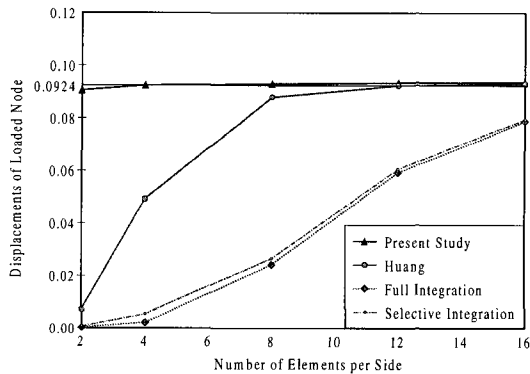


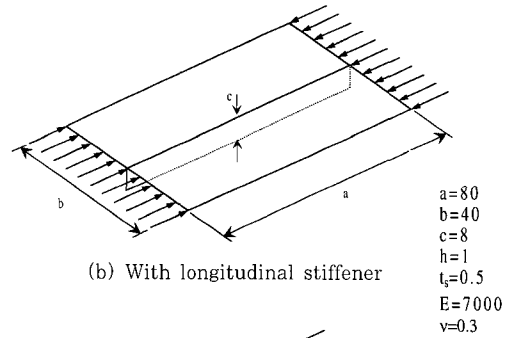
그림 9 반구형 셸 해의 수렴

자유도를 가지며 첨단부와 바닥부는 자유단이다. 반구의 4분의 1만이 해석에 필요하게 되며, 그림 8 이를 보여주고 있다. 잘려나간 부분이 없는 반구에 대하여 Morley와 Moris는 엄밀해를 구해냈으며, 그값은 0.0924였다. 그림 9에서 그 값은 참고 문헌 값으로 사용되고 있다. 유한 요소 해석의 수렴값은 0.0935이다. 그림 9에 나타난 바와 같이, assumed strain 요소는 엄밀해에 다른 적분방법을 쓴 것보다 빠르게 수렴하고 있다.

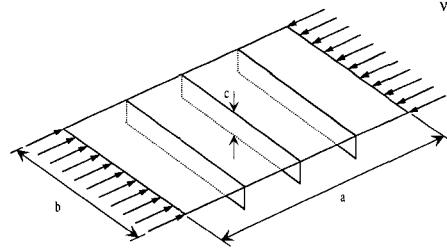
4.4 보강된 판의 좌굴

보강재의 모델링에 대한 정확성을 검증하기 위하여, 세로 방향 및 가로방향으로 보강된, 사변 단순지지 사각형 판에 대하여 좌굴해석을 수행하였다. 그림 10(a)는 세로방향으로 한 개의 보강재를 갖는 직사각형 판을 보여주고 있다. 여기서, 사각형 판은 8×4개의 9절점 셸요소로 모델링 하였으며 보강재는 8×1개의 9절점 셸요소로 모델링 하였다. 가로방향으로 세개의 보강재를 갖는 직사각형 판은 그림 10(b)에 나타내었으며, 각각의 보강재는 4×1개의 9절점 셸요소를 사용하였다.

표 2는 각각의 보강된 판에 대한 좌굴 해석결과를 보여주고 있다. 표 2에 보인바와 같이, 수치해석 결과와



(b) With longitudinal stiffener

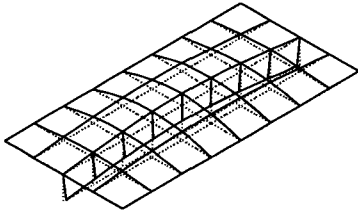


(b) With transverse stiffener

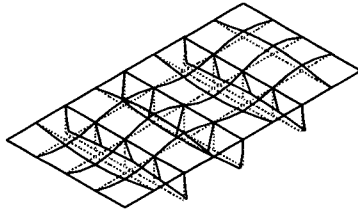
그림 10 사변이 단순지지된 보강된 판

표 2 First buckling loads of stiffened plates

Stiffener Direction	Present Study	Analytic Solution
Longitudinal	58.212	58.976
Transverse	24.874	24.758



(a) With longitudinal stiffener



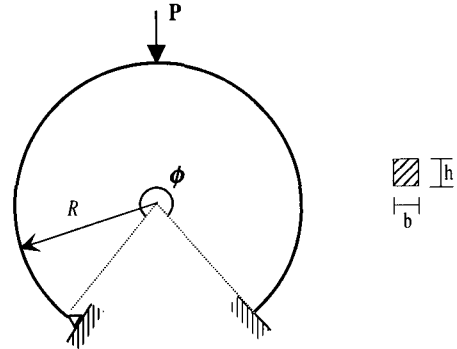
(b) With transverse stiffener

그림 11 보강된 판의 좌굴 형상

정해가 잘 일치함을 알 수 있다. 첫 번째 좌굴모드에 해당하는 모드 형상은 그림 11에 나타내었다.

4.5 원통형 아치의 후좌굴 해석

그림 12는 집중하중 P가 재하되는 원통형 아치를 나타내고 있다. 9절점 쉘요소를 이용하여 원주방향으로 16개의 유한요소로 모델링하였다. 그림 13은 회전각의 1차항만 고려한 경우와 2차항까지 고려한 경우에 대하여 아치의 중앙점에서의 하중-변위 관계곡선을 비교하여 보여 주고 있다. 그림 13에 보인바와 같이 첫 번째 극한점에 도달할 때까지는, 1차항만 고려한 경우와 2차항까지 고려한 경우의 결과가 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 회전의 1차항만 고려한 경우에는 첫 번째 극한점 이후에는 수렴하지 않아서 두 번째 극한점을 찾을 수 없었다. 따라서 아치 구조의 후좌굴 거동과 같은 기하학적 비선형을 수행하기 위해서는 유한회전의 영향을 고려하여야 함을 알 수 있다.



$$E = 1.2 \times 10^7 \text{ lb/in}^2 \quad \nu = 0.3 \quad f_s = .2$$

$$R = 100 \text{ in} \quad \phi = 215^\circ \quad b = 1.0 \text{ in} \quad h = 1.0 \text{ in}$$

$$P = f p \quad p = EI/R^2 = 100.0$$

그림 12 원통형 아치

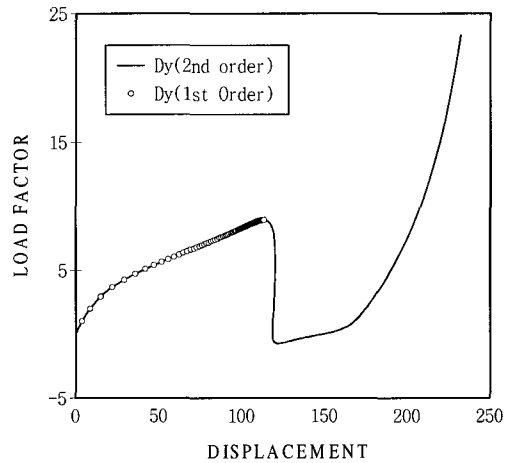


그림 13 아치의 중앙점에서 하중-수직변위 관계곡선

5. 결 론

본 연구에서는 보강된 셸 구조의 좌굴, 후좌굴해석에 변형된 쉘 요소가 사용되었다. 등매개 쉘 유한요소의 단점인 locking 현상을 극복하기 위하여 assumed strain element를 적용하였으며, 감차적분 또는 선택적분시 나타날 수 있는 제로 에너지 모드를 제거하였다. 좌굴과 후좌굴 해석에서, 총 변위에 대응하는 Green-Lagrangian 변형도를 산정하고, 증분 변위장의 회전 2차 항을 고려함으로써 좀더 정확한 해를 얻었다. 보강재는 접합점에서 주 구조와 보강재사이의 일반적인 변환을 고려함으로써 보강된 셸 구조의 해석

이 가능하였다. 보강재의 회전 자유도는 접합점에서의 주 쉘 요소에 따른다. 따라서, 좌표 변환은 보강재의 접합점에서만 필요하게 된다. 제안된 정식화의 정확성과 효율성을 입증하기 위하여, 수치 예제를 제시하고 이전 연구 또는 엄밀해와 비교하였다. 결과적으로, 다음의 결론을 얻을 수 있었다:

- 1) 수치 예제로부터, 완전적분법을 사용할 경우, 얇은 쉘에서 locking 현상이 발생함이 관찰되었다. 그리고 이러한 locking 현상은 assumed strain element를 사용함으로써 극복될 수 있었다. 더우기, 이 요소를 사용함으로써 감차적분 또는 선택적분시 rank deficiency 때문에 발생하는 superious mode를 소거할 수 있었다.
- 2) 쉘 구조의 안정성 해석과 기하적 비선형 해석에서, 해석 결과는 전단과 membrane locking 현상의 영향을 받는다. 따라서, 변위에 기초한 유한 요소를 사용할 경우, 선형 해석은 물론 비선형 해석에서 assumed strain element가 사용되어야 한다.
- 3) 보강재를 쉘 요소를 사용하여 모델링하고, 주 쉘 요소와의 접합점에서만 회전 자유도에 대한 결합항을 변환함으로써, 보강된 판과 쉘 구조가 동일하게 그리고 효율적으로 해석되었다.

감사의 글

본 논문은 한국과학재단 산하 산업설비 안전성평가 연구센터의 연구비와 포항제철 석좌교수 연구기금의 지원에 의해 수행되었으며 저자는 이에 깊은 감사를 표합니다.

참고 문헌

1. S. Ahmad, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved element", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 2, 1970, pp.419~451
2. T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, and A. Kanok-nukulchai, "A simple and efficient element for plate bending", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 11, 1977, pp.1529~1543
3. E. D. L. Pugh, E. Hinton, and O. C. Zienkiewicz, "A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 12, 1978, pp.1059~1079
4. H. Stolarski and T. Belytschko, "Membrane locking and reduced integration for curved elements", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, 1982, pp. 172~176
5. H. Stolarski and T. Belytschko, "Shear and membrane locking in the curved C^0 elements", *Comp. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, Vol. 41, 1983, pp.279~296
6. T. Belytschko, W. K. Liu, J. S. J. Ong and D. Lam, "Implementation and application of a 9-node Lagrange shell element with spurious mode control", *Computers and Structures*, Vol. 20, No. 1-3, 1985, pp.121~128
7. R. H. Macneal, Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions, *Nuclear Engineering and Design*. Vol. 70, 1982, pp.2~12
8. E. N. Dvorkin and K. J. Bathe, "A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis", *Engineering Computations*, Vol. 1, pp.77~88, 1984
9. K. J. Bathe and E. N. Dvorkin, "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 21, 1985, pp.367~383
10. K. C. Park and G. M. Stanley, "A curved C^0 shell element based on assumed natural-coordinate strains", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 53, 1986, pp.278~290
11. K. J. Bathe and E. N. Dvorkin, "A Formulation of General Shell Elements-The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 22, pp.697~722, 1986
12. H. C. Huang and E. Hinton, "A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation", *Engineering Computations*, Vol. 1, pp.369~379, 1984
13. H. C. Huang and E. Hinton, "A New Nine Node Degenerated Shell Element with Enhanced Mem-

- brane and Shear Interpolation", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 22, pp.73~92, 1986
14. H. C. Huang, "Implementation of assumed strain degenerated shell elements", *Computers and Structures*, Vol. 25, pp.147~155, 1987
 15. H. C. Huang, "Membrane locking and assumed strain shell elements", *Computers and Structures*, Vol. 27, pp.671~677, 1987
 16. J. Jang and P. M. Pinsky, "An Assumed Covariant Strain Based 9-Node Shell Element", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 24, pp.2389~2411, 1987
 17. M. L. Bucelem and K. J. Bathe, "Higher-Order MITC General Shell Elements", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 36, pp.3729~3754, 1993
 18. K. S. Surana, "Geometrically non-linear formulation for the curved shell elements", *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 19, 1983, pp.581~615
 19. E. Hinton and D. R. J. Owen, *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press, 1985
 20. 김문영, 민병철, "보강된 쉘구조의 후좌굴 및 탄·소성 유한요소해석", 한국강구조학회 논문집, 제6권, 제4호, 1994, pp.211~224

(접수일자 : 1999. 10. 18)