

# 곡률이 변하는 박벽 곡선보의 3차원 자유진동 및 좌굴해석

## Spatial Free Vibration and Stability Analysis of Thin-Walled Curved Beams with Variable Curvatures

서 광 진\*  
Seo, Kwang-Jin

민 병 철\*\*  
Min, Byoung-Cheol

김 문 영\*\*\*  
Kim, Moon-Young

### 요 지

본 연구는 유한한 회전의 2차항을 고려한 변위장에 기초하여 변곡률을 가지는 비대칭 박벽곡선보의 해석이론을 제시한다. Vlasov의 가정에 의한 연속체의 선형화된 가상일의 원리로부터 총 포텐셜 에너지를 유도하고, 모든 변위 파라미터와 뒹 함수는 도심에서 정의된다. 절점당 8개의 자유도를 가지는 박벽곡선보 요소의 개발 과정에서 3차 Hermitian 다항식이 형상함수로 이용된다. 본 연구의 타당성과 정확도를 입증하기 위하여, 일축대칭 단면을 갖는 포물선과 타원형상의 곡선보를 선택하여 3차원 자유진동해석과 안정성 해석을 수행한다. 그리고 이 결과를 ABAQUS의 쉘 요소에 의한 것과 비교한다.

**핵심용어** : 변곡률, 박벽 곡선보, 아치, 자유진동, 좌굴

### Abstract

An improved formulation of thin-walled curved beams with variable curvatures based on displacement field considering the second order terms of finite semitangential rotations is presented. From linearized virtual work principle by Vlasov's assumptions, the total potential energy is derived and all displacement parameters and the warping functions are defined at centroid axis. In developing the thin-walled curved beam element having eight degrees of freedom per a node, the cubic Hermitian polynomials are used as shape functions. In order to verify the accuracy and practical usefulness of this study, free vibrations and buckling analyses of parabolic and elliptic arch shapes with mono-symmetric sections are carried out and compared with the results analyzed by ABAQUS' shell element.

**Keywords** : variable curvature, thin-walled curved beam, arch, free vibration, buckling

### 1. 서 론

곡선교는 구조적으로 매우 이상적이고 미관이 아름답기 때문에 각종 구조공학 관련분야에서 보, 기둥,

평판 등과 함께 단위구조로 이용되고 있다. 일반적인 강곡선교는 휨모멘트 외에 곡률의 영향으로 항상 비틀림모멘트가 발생하기 때문에 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을 보인다. 따라서 박벽단면을 갖는

\* 성균관대학교 토목공학과, 석사

\*\* 평화엔지니어링 지반부, 과장

\*\*\* 정회원 · 성균관대학교 토목공학과, 교수

· 이 논문에 대한 토론을 2000년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2001년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

부재를 이용하여 구조물을 설계하기 위해서는 박벽보의 좌굴 및 동적 거동특성을 정확히 파악할 수 있어야 하며 현재까지 이에 대한 많은 연구가 이루어졌다.

Papangelis<sup>1)</sup>는 아치의 횡좌굴하중에 대한 이론식을 제시하였고, Yang<sup>2)</sup>은 곡률효과를 고려한 안정성 해석을 수행하였으며, Kang<sup>3)</sup>은 3차원 좌굴거동에 대한 이론해와 수치해를 조사 비교하였다. Lee<sup>4)</sup>와 Oh<sup>5)</sup>는 비원형 아치의 면내 자유진동해석을 수행하였고, Tseng<sup>6)</sup>은 동적강도행렬을 도입하여 포물선과 타원 아치의 면내 진동에 대하여 해석하였으며, 민 등<sup>7),8)</sup>은 비대칭 단면을 갖는 원형 박벽 곡선보의 안정성 해석을 수행하였다. 이외에도 현재까지 박벽보에 대한 여러 가지 해석이론이 제시되어 왔지만, 곡률이 변하는 아치의 면외거동에 대한 이론이 국제적으로 아직도 확립되어 있지 않다.

따라서 본 연구에서는 곡률이 변하며 비대칭 박벽 단면을 갖는 곡선보의 3차원 안정성 및 동적 거동특성을 파악할 수 있는 해석이론을 제시한다. 일반적인 연속체의 가상일의 원리로부터 변곡률 곡선박벽보의 총포텐셜 에너지를 유도하고 곡선보의 3차원 자유진동 및 안정성 해석을 수행할 수 있는 유한요소 해석 프로그램을 개발한다. 본 연구의 결과와 범용유한요소 해석 프로그램인 ABAQUS의 해석결과를 비교함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다.

## 2. 기본 이론

### 2.1 선형화된 가상일의 원리

해석 모델을 위한 기본가정은 다음과 같다.

1. 박벽 곡선보는 선형탄성이고 단면이 균일하다.
2. 단면은 뒹(warping)변형이외의 형상변화를 일으키지 않는다.
3. 휨과 비틀림으로 인한 전단변형은 무시한다.
4. 좌굴전 변형과 국부좌굴효과는 무시한다.

일반적인 연속체에 대한 가상일의 원리로부터, 회전각의 2차항을 일관성 있게 고려하여 정의된 변위, 변형률, 응력 그리고 표면력을 대입하여 고차항을 무시하면 식(1)과 같은 초기응력을 받는 연속체에 대한 선형화된 가상일의 원리를 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_V (\tau_{ij} \delta e_{ij} + {}^o\tau_{ij} \delta \eta_{ij} + {}^o\tau_{ij} \delta e_{ij}^*) dV \\ & + \int_S {}^oT_i \delta U_i^* dS - \omega^2 \int_V \rho U_i \delta U_i dV \\ & = \int_S T_i \delta U_i dS \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $U_i, U_i^*$ 은  $x_i$  방향의 1차 및 2차 변위성분이고,  $e_{ij}, e_{ij}^*$ 는 위의 변위성분들로 인한 선형변형률을,  $\eta_{ij}$ 는  $U_i$ 로 인한 비선형 변형률을 나타낸다. 또한,  $T_i$ 는 표면력,  $\omega$ 는 고유진동수,  $\rho$ 는 밀도를 나타내며, 첨자 'o'는 초기값을 나타낸다.

### 2.2 비대칭 박벽 단면의 변위장

비대칭 박벽 곡선보의 단면에 대해 국부좌표계 ( $x_1, x_2, x_3$ )는 그림 1과 같고, 여기서 정의된 변위 파라미터는 그림 2와 같다.

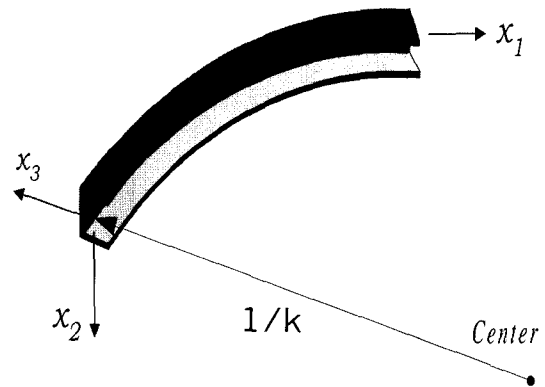


그림 1 박벽 곡선보의 요소좌표계

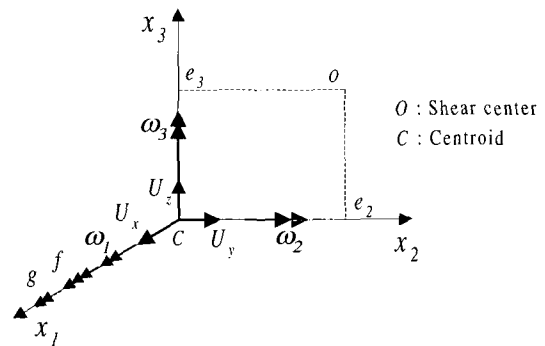


그림 2 박벽 곡선보의 변위장

$U_x, U_y, U_z$  와  $\theta, \omega_2, \omega_3$  는 각각  $x_1, x_2, x_3$  축에 대한 강제 이동변위와 강제회전변위이며,  $f$  는  $x_1$  축에 대한 비틀림각의 변화를 나타내는 뒀 파라미터이다. Frenet 공식으로부터 회전파라미터  $\omega_2, \omega_3, f$  와 축방향 변위의 변화율  $g$  는 식(2)와 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_2 &= -U_z' + \kappa U_x \\ \omega_3 &= U_y' \\ f &= -\theta' - \kappa U_y' \\ g &= U_x' + \kappa U_z \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, 뒀첨자 'prime'은  $x_1$  에 대한 미분을 나타낸다.

단면이 면내 변형에 대해 강제거동을 한다고 가정하면, 단면의 임의의 점에서의 변위성분은 식(3), (4)와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} U_1 &= U_x - x_2 U_y' - x_3 (U_z' - \kappa U_x) \\ &\quad - (\theta' + \kappa U_y') \phi(x_2, x_3) \\ U_2 &= U_y - x_3 \theta \\ U_3 &= U_z + x_2 \theta \end{aligned} \quad (3)$$

그리고

$$\begin{aligned} U_1^* &= \frac{1}{2} [-\theta (U_z' - \kappa U_x) x_2 + \theta U_y' x_3] \\ U_2^* &= \frac{1}{2} [-(\theta^2 + U_y'^2) x_2 \\ &\quad - (U_z' - \kappa U_x) U_y' x_3] \\ U_3^* &= \frac{1}{2} [-(U_z' - \kappa U_x) U_y' x_2 \\ &\quad - \{\theta^2 + (U_z' - \kappa U_x)^2\} x_3] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, 식(3), (4)는 각각 변위 파라미터의 1차 및 2차항을,  $\phi$  는 도심에서 정의된 뒀함수를 나타낸다. 특히, 식(4)는 박벽 곡선보의 기하학적 포텐셜에너지를 유도하는데 중요한 역할을 담당한다.

### 2.3 곡률이 변하는 박벽 곡선보의 변위-변형도 관계

단면회전으로 인하여 발생하는 2차 변위파라미터를 포함하는 Green-Lagrangian 변형률은 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \{ (U_i + U_i^*)_{,j} + (U_j + U_j^*)_{,i} \\ &\quad + (U_k + U_k^*)_{,i} (U_k + U_k^*)_{,j} \} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, 고차항을 무시하면  $\varepsilon_{ij}$  는 식(6)과 같이 세 항의 합으로 표시할 수 있다.

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} + e_{ij}^* \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \\ \eta_{ij} &= \frac{1}{2} U_{k,i} U_{k,j} \\ e_{ij}^* &= \frac{1}{2} (U_{i,j}^* + U_{j,i}^*) \end{aligned} \quad (7)$$

앞절의 기본가정에 의해 변형률에 대한 식(8)이 성립한다.

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (8)$$

1차 변위성분으로 인한 선형 변형률-변위 관계는 식(9)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} e_{11} &= (U_{1,1} + \kappa U_3) \frac{1}{1 + \kappa x_3} \\ 2e_{12} &= U_{2,1} \frac{1}{1 + \kappa x_3} + U_{1,2} \\ 2e_{13} &= (U_{3,1} - \kappa U_1) \frac{1}{1 + \kappa x_3} + U_{1,3} \end{aligned} \quad (9)$$

또한, 나머지 비선형 변형률-변위 관계는 식(10), (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= \frac{1}{2} [ (U_{1,1} + \kappa U_3)^2 + U_{2,1}^2 \\ &\quad + (U_{3,1} - \kappa U_1)^2 ] \left( \frac{1}{1 + \kappa x_3} \right)^2 \\ \eta_{12} &= \frac{1}{2} [ U_{1,2} (U_{1,1} + \kappa U_3) + U_{2,2} U_{2,1} \\ &\quad + U_{3,2} (U_{3,1} - \kappa U_1) ] \frac{1}{1 + \kappa x_3} \\ \eta_{13} &= \frac{1}{2} [ U_{1,3} (U_{1,1} + \kappa U_3) + U_{2,3} U_{2,1} \\ &\quad + U_{3,3} (U_{3,1} - \kappa U_1) ] \frac{1}{1 + \kappa x_3} \end{aligned} \quad (10)$$

그리고

$$\begin{aligned} e_{11}^* &= (U_{1,1}^* + \kappa U_3^*) \frac{1}{1 + \kappa x_3} \\ 2e_{12}^* &= U_{2,1}^* \frac{1}{1 + \kappa x_3} + U_{1,2}^* \\ 2e_{13}^* &= (U_{3,1}^* - \kappa U_1^*) \frac{1}{1 + \kappa x_3} + U_{1,3}^* \quad (11) \end{aligned}$$

도심에서 정의된 단면력은 식(12)와 같다.

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_A \tau_{11} dA, \quad F_2 = \int_A \tau_{12} dA \\ F_3 &= \int_A \tau_{13} dA, \quad M_1 = \int_A (\tau_{13} x_2 - \tau_{12} x_3) dA \\ M_2 &= \int_A \tau_{11} x_3 dA, \quad M_3 = - \int_A \tau_{11} x_2 dA \\ M_p &= \int_A \tau_{11} (x_2^2 + x_3^2) dA, \quad M_\phi = \int_A \tau_{11} \phi dA \quad (12) \end{aligned}$$

여기서  $F_1$  은 축방향력,  $F_2, F_3$  는 전단력을 나타내고  $M_2, M_3$  는 각각  $x_2, x_3$  축에 대한 휨모멘트이며  $M_1$  은 비틀림모멘트이다. 그리고  $M_p$  는 Wagner 효과를 나타내는 단면력이다.

### 2.4 박벽 곡선보의 총포텐셜 에너지

곡률이 변하는 비대칭 박벽 곡선보의 총 포텐셜 에너지는 식(13)과 같이 탄성변형 에너지  $\Pi_E$ , 초기응력으로 인한 포텐셜 에너지  $\Pi_G$ , 그리고 운동 에너지  $T$ 의 합으로 구성된다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G - T \quad (13)$$

여기서, 식(13)의 각 항들의 구체적인 유도 결과식은 식(14), (15), (16)과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_E &= \frac{1}{2} \int_0^L [EA(U_x' + \kappa U_z)^2 + E\widehat{I}_3(U_y'' - \kappa \theta)^2 \\ &+ E\widehat{I}_2(U_z'' + \kappa^2 U_x - \kappa' U_x')^2 + E\widehat{I}_\phi(\theta'' + (\kappa U_y')')^2 \\ &+ 2E\widehat{I}_{\phi 3}(U_y'' - \kappa \theta)(\theta'' + (\kappa U_y')') + GJ(\theta' + \kappa U_y')^2 \\ &- 2\kappa EI_{223}(U_y'' - \kappa \theta)(U_z'' + \kappa^2 U_x - \kappa' U_x) \\ &+ 2E\widehat{I}_{\phi 2}(\theta' + (\kappa U_y')')(U_z'' + \kappa^2 U_x - \kappa' U_x)] dx_1 \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_G &= \frac{1}{2} \int_0^L [F_1\{U_y'^2 + (U_z' - \kappa U_x)^2\} \\ &+ M_p(\theta' + \kappa U_y')^2 - F_3(U_y' \theta) \\ &+ M_2(\theta U_y'' - U_y' \theta' - \kappa U_y'^2 - \kappa \theta^2) \\ &+ 2\kappa M_\phi(U_z' - \kappa U_x)(\theta' + \kappa U_y') \\ &+ M_3(\theta(U_z'' - (\kappa U_x)') - (U_z' - \kappa U_x)(\theta' + \kappa U_y')) \\ &+ F_2\theta(U_z' - \kappa U_x) + M_1\{(U_z' - \kappa U_x)(U_y'' - \kappa \theta) \\ &- U_y'(U_z'' - (\kappa U_x)')\}] dx_1 \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_L [A(U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) + \widehat{I}_0 \theta^2 + \widehat{I}_3 U_y'^2 \\ &+ \widehat{I}_2(U_z' - \kappa U_x)^2 + \widehat{I}_\phi(\theta' + \kappa U_y')^2 \\ &+ 2\widehat{I}_{\phi 3} U_y'(\theta' + \kappa U_y') + 2\widehat{I}_{\phi 2}(U_z' - \kappa U_x)(\theta' + \kappa U_y') \\ &- 2\kappa I_{\phi 2} U_x(\theta' + \kappa U_y') - 2\kappa I_2(U_y \theta) \\ &- 2\kappa I_2 U_x(U_z' - \kappa U_x) + 2\kappa I_{223} U_y'(U_z' - \kappa U_x)] dx_1 \quad (16) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \widehat{I}_2 &= I_2 - \kappa I_{222}, \quad \widehat{I}_3 = I_3 - \kappa I_{233}, \quad \widehat{I}_\phi = I_\phi - \kappa I_{\phi\phi 2}, \\ \widehat{I}_{\phi 2} &= I_{\phi 2} - \kappa I_{\phi 22}, \quad \widehat{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} - \kappa I_{\phi 23}, \quad \widetilde{I}_2 = I_2 + \kappa I_{222}, \\ \widetilde{I}_3 &= I_3 + \kappa I_{233}, \quad \widetilde{I}_\phi = I_\phi + \kappa I_{\phi\phi 2}, \quad \widetilde{I}_{\phi 2} = I_{\phi 2} + \kappa I_{\phi 22} \\ \widetilde{I}_{\phi 3} &= I_{\phi 3} + \kappa I_{\phi 23}, \quad I_o = I_2 + I_3 \quad (17) \end{aligned}$$

### 2.5 비대칭 박벽단면을 갖는 곡선보의 곡률 $\kappa$

일반적으로 직교좌표계에서 정의되는 비원형 아치에 대한 곡률은 식(18)과 같이 정의된다.

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (18)$$

본 연구에서 고려하고자 하는 포물선과 타원 아치의 형상은 그림 3과 같다.

타원 아치의 경우  $\epsilon = 0.5$  로 가정하여 포물선 아치의 길이  $L$  과 일치하도록 하였으며, 부재의 길이는 식(19)를 이용한 24절점 가우스적분을 적용하여 계산하였다.

$$ds = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (19)$$

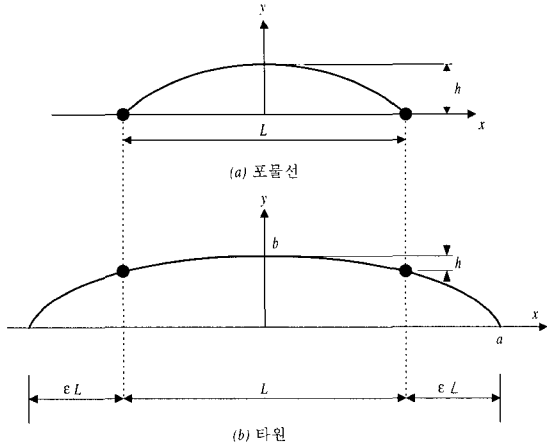


그림 3 포물선과 타원 아치 형상

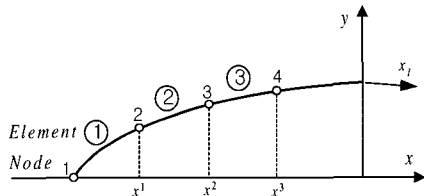


그림 4  $x$ 와  $x_1$ 의 관계

각각의 절점에서의 곡률을 계산하기 위해 우선 그림 4와 같이 아치 전체의 길이를 식(19)를 이용하여 계산한 후 요소의 개수로 나눈 다음 해당 부재까지의 누적길이( $x_1$ )를 계산한 다음, 이에 해당하는  $x$  값을 'Bisection Method'를 이용하여 곡률값을 계산하였다. 또한, 요소강도행렬을 구성하는 과정에서 5절점 가우스적분을 수행하는데 이 때에도 각각의 가우스 절점에 대한 곡률값을 위와 같은 방법으로 계산하여 전체 곡선의 곡률변화를 프로그램에 반영하였다.

### 3. 수치예제

3차 Hermitian 다항식을 이용하여 절점당 8개의 자유도를 갖는 변곡률 곡선보 요소<sup>8)</sup>를 개발하였다. 식(14), (15), 그리고 식(16)을 이용하여 탄성강도, 기하학적 강도행렬, 그리고 질량행렬을 각각 산정하였다. 좌굴해석시 단위하중에 대한 기하학적 강도행렬을 산정하고 탄성강도행렬과 고유치 문제를 형성하여 해를 구함으로써 좌굴하중을 산정하였다.

### 3.1 곡률이 변하는 비대칭 박벽단면의 자유진동

본 연구에서 고려하는 단면은  $x_2$  축과  $x_3$  축에 대칭인 채널단면이고 20개의 곡선보 요소를 이용하였다. ABAQUS의 경우 9절점 감차적분이 적용된 's9r5' 쉘요소를 이용하였고,  $x_2$  축 대칭 단면의 경우 단면방향으로 4개, 길이방향으로 80개의 총 320개의 쉘요소를,  $x_3$  축 대칭단면은 단면방향으로 5개, 길이방향으로 80개의 총 400개의 쉘요소를 이용하여 해석하였다.  $x_2$  축 대칭단면은 6개 모드에 대한 자유진동해석 결과를 표 1, 2에 제시하였고,  $x_3$  축 대칭 단면의 경우 면내, 면외모드를 각각 분리하여 표 3, 4에 제시하였다. 본 예제에서는 '고정-고정'인 경우와 '고정-자유'인 두가지 경계조건을 갖는 경우에 대해 다루었고, 표에 제시된 수치의 단위는 'rad/sec' 이다. 해석에 이용된 단면형상과 재료적 특성은 식(20)과 그림 5에 나타내었다.

표 1, 2, 3, 4를 통하여 곡선보 요소에 의한 자유진동 해석결과가 쉘요소에 의한 것보다 다소 큰 값을 보이지만, 각 진동모드에 대하여 대체로 근접한 진동수 값을 보여줌을 알 수 있다.

표 1 고정-고정인  $x_2$  축 대칭 단면의 3차원 자유진동

경계조건		고정-고정			
대칭조건		$x_2$ 축 대칭			
곡선형태		포물선		타원	
$h/L$	진동 모드	ABAQUS	curved beam	ABAQUS	curved beam
0.2	n=1	0.3115	0.3131	0.3125	0.3137
	n=2	0.8906	0.8916	0.8829	0.8883
	n=3	1.8423	1.8466	1.8232	1.8358
	n=4	2.1145	2.2950	2.2406	2.2757
	n=5	3.1464	3.1550	3.1108	3.1351
	n=6	3.9102	4.1267	3.9875	4.0522
0.4	n=1	0.1845	0.1847	0.1830	0.1835
	n=2	0.5095	0.5132	0.5036	0.5073
	n=3	1.0995	1.1082	1.0863	1.0950
	n=4	1.3726	1.4670	1.3587	1.4384
	n=5	1.9344	1.9491	1.9157	1.9311
	n=6	2.8732	2.9208	2.8688	2.9132
0.6	n=1	0.1155	0.1155	0.1145	0.1145
	n=2	0.3141	0.3167	0.3091	0.3115
	n=3	0.6907	0.6944	0.6810	0.6850
	n=4	0.8467	0.9701	0.8316	0.9488
	n=5	1.2174	1.2247	1.2062	1.2137
	n=6	1.8501	1.8563	1.8463	1.8558

표 2 고정-자유인  $x_2$  축 대칭 단면의 3차원 자유진동

경계조건		고정-자유			
대칭조건		$x_2$ 축 대칭			
곡선형태		포물선		타원	
h/L	진동 모드	ABAQUS	curved beam	ABAQUS	curved beam
0.2	n=1	0.0346	0.0352	0.0341	0.0348
	n=2	0.1450	0.1581	0.1551	0.1564
	n=3	0.2038	0.2053	0.2023	0.2042
	n=4	0.7068	0.7212	0.7155	0.7192
	n=5	0.7599	0.7659	0.7595	0.7601
	n=6	1.6947	1.6917	1.6407	1.6556
0.4	n=1	0.0183	0.0188	0.0181	0.0185
	n=2	0.1128	0.1136	0.1105	0.1114
	n=3	0.1187	0.1313	0.1181	0.1279
	n=4	0.3859	0.3461	0.3835	0.3517
	n=5	0.4196	0.4204	0.4112	0.4100
	n=6	1.0100	1.0208	0.9856	0.9966
0.6	n=1	0.0121	0.0125	0.0119	0.0123
	n=2	0.0713	0.0717	0.0697	0.0702
	n=3	0.0901	0.0992	0.0891	0.0981
	n=4	0.2256	0.2026	0.2245	0.1988
	n=5	0.2575	0.2595	0.2505	0.2521
	n=6	0.6444	0.6499	0.6291	0.6349

표 4 고정-자유인  $x_3$  축 대칭 단면의 3차원 자유진동

경계조건		고정-자유					
대칭조건		$x_3$ 축 대칭					
곡선형태		포물선		타원			
h/L	진동 모드	ABAQUS	curved beam	ABAQUS	curved beam		
0.2	면내 진동	n=1	0.1249	0.1269	0.1237	0.1255	
		n=2	0.6019	0.5936	0.5996	0.5991	
	면외 진동	n=1	0.0359	0.0365	0.0353	0.0362	
		n=2	0.2684	0.2724	0.2620	0.2673	
		n=3	1.0663	1.0890	1.0344	0.3537	
		n=4	2.4749	2.5314	2.4290	2.4960	
	0.4	면내 진동	n=1	0.0949	0.1049	0.0936	0.1021
			n=2	0.3167	0.2797	0.3143	0.2847
면외 진동		n=1	0.0185	0.0188	0.0182	0.0186	
		n=2	0.1433	0.1458	0.1376	0.1409	
		n=3	0.5609	0.5744	0.5399	0.5555	
		n=4	1.4876	1.5268	1.4422	1.4886	
0.6		면내 진동	n=1	0.0720	0.0810	0.0708	0.0795
			n=2	0.1835	0.1631	0.1819	0.1600
	면외 진동	n=1	0.0121	0.0124	0.0119	0.0122	
		n=2	0.0906	0.0925	0.0870	0.0893	
		n=3	0.3399	0.3499	0.3265	0.3373	
		n=4	0.9231	0.9442	0.8930	0.9187	

표 3 고정-고정인  $x_3$  축 대칭 단면의 3차원 자유진동

경계조건		고정-고정					
대칭조건		$x_3$ 축 대칭					
곡선형태		포물선		타원			
h/L	진동 모드	ABAQUS	curved beam	ABAQUS	curved beam		
0.2	면내 진동	n=1	1.9032	1.9292	1.8810	1.9097	
		n=2	3.7656	3.8118	3.6373	3.6959	
	면외 진동	n=1	0.4484	0.4545	0.4434	0.4513	
		n=2	1.3791	1.4100	1.3627	1.3989	
		n=3	2.7120	2.7724	2.7201	2.7946	
		n=4	4.0336	4.0963	4.1012	4.1869	
	0.4	면내 진동	n=1	1.1314	1.2008	1.1082	1.1756
			n=2	2.5363	2.5622	2.4918	2.5334
면외 진동		n=1	0.2539	0.2574	0.2485	0.2534	
		n=2	0.7645	0.7839	0.7483	0.7708	
0.6	면내 진동	n=1	0.6884	0.7883	0.6722	0.7701	
		n=2	1.6087	1.5953	1.5931	1.5925	
	면외 진동	n=1	0.1585	0.1602	0.1551	0.1577	
		n=2	0.4562	0.4699	0.4450	0.4600	
0.6	면외 진동	n=3	1.0455	1.0686	1.0276	1.0564	
		n=4	1.7257	1.7612	1.7341	1.7782	

$$L = 250.0 \text{ cm}, E = 30,000 \text{ kg/cm}^2, \\ G = 11,500 \text{ kg/cm}^2, \rho = 0.00785 \text{ kg/cm}^3 \quad (20)$$

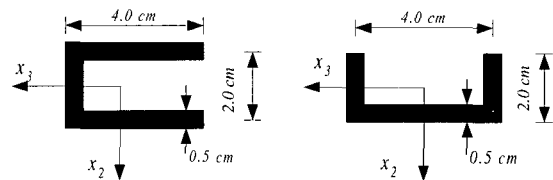


그림 5 일축 대칭 단면 형상

### 3.2 캔틸레버 아치의 3차원 좌굴 해석

변곡률, 비대칭 박벽 단면의 3차원 좌굴해석을 수행하기 위하여 그림 6과 같이 수평 및 수직하중을 받는 캔틸레버 아치를 고려한다.

본 예제는 수평력에 의한 내력분포가 전단력, 휨모멘트 그리고 축방향력이 함께 발생하는 경우이고, 단면은 그림 5의 자유진동 해석시 적용한 일축 대칭 채널 단면과 동일하며, 두께는 길이방향으로 일정하다. 캔틸레버 아치의 좌굴 해석을 수행하기 위하여 10개의

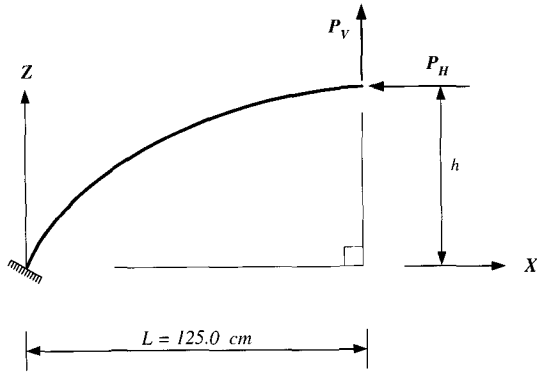


그림 6 아치 형상과 하중 조건

곡선보 요소를 이용하였고, ABAQUS의 's9r5' 셀 요소를 이용한 해석에서는 자유진동 해석시와 동일한 개수의 셀요소를 이용하여 형상비(h/L)에 따라 수평하중의 경우 표 5, 7에, 수직하중의 경우 표 6, 8에 제시하였으며, 표에 제시된 수치의 단위는 'kg'이다.

표 5-표 8에서 보는 바와 같이 곡선보요소와 셀요소를 이용한 좌굴해석 결과가 서로 근접한 값을 보여 줌을 알 수 있다.

#### 4. 결론 및 고찰

본 연구에서는 비대칭 박벽단면의 구속된 뒎 효과를 고려하고 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 곡선보의 변위장을 도입하여 일반적인 연속체의 선형화된 가상일의 원리로부터 총 포텐셜 에너지를 유도하였고, 모든 변위 파라미터와 뒎함수를 도식에서 정의함으로써 곡률이 변하는 비대칭 박벽 곡선보의 좌굴 및 자유진동 해석이 가능한 해석이론을 제시하였으며 3차 Hermitian 다항식을 형상함수로 가정한 유한요소 프로그램을 개발하여 본 연구의 타당성을 검증하기 위하여 다양한 경계조건에 따른 일축 대칭 단면의 3차원 자유진동 해석을 수행하여 ABAQUS의 해석결과와 비교하였다.

$x_2$  축 대칭 단면의 3차원 자유진동 해석 결과 포물선의 경우 4번째 진동모드에서 다소 오차가 발생하였고 형상비(h/L)의 증가에 따라 증가함을 관찰할 수 있었으며 '고정-자유'인 경우 프로그램의 결과가 최적 값을 나타내었다.

표 5  $x_2$  축 대칭 캔틸레버 아치의 수평좌굴하중

단면 형상 곡선형태	$x_2$ 축 대칭			
	포물선		타원	
h/L	curved beam	ABAQUS	curved beam	ABAQUS
0.2	2.804	2.715	2.703	2.612
	-23.98	-23.53	-25.04	-24.58
0.4	1.189	1.144	1.140	1.094
	-8.456	-8.376	-8.766	-8.694
0.6	0.7165	0.6811	0.6830	0.6528
	-4.060	-3.904	-4.099	-4.016

표 6  $x_2$  축 대칭 캔틸레버 아치의 수직좌굴하중

단면 형상 곡선형태	$x_2$ 축 대칭			
	포물선		타원	
h/L	curved beam	ABAQUS	curved beam	ABAQUS
0.2	2.355	2.234	2.332	2.202
	-5.434	-5.370	-5.573	-5.519
0.4	1.759	1.674	1.746	1.648
	-4.230	-4.135	-4.330	-4.245
0.6	1.490	1.450	1.459	1.427
	-3.001	-2.780	-3.003	-2.824

표 7  $x_3$  축 대칭 캔틸레버 아치의 수평좌굴하중

단면 형상 곡선형태	$x_3$ 축 대칭			
	포물선		타원	
h/L	curved beam	ABAQUS	curved beam	ABAQUS
0.2	4.544	4.312	4.346	4.175
	-24.17	-24.50	-25.42	-25.69
0.4	1.806	1.674	1.718	1.595
	-9.364	-9.581	-9.712	-9.929
0.6	1.095	0.974	1.031	0.929
	-5.043	-4.961	-5.061	-5.100

표 8  $x_3$  축 대칭 캔틸레버 아치의 수직좌굴하중

단면 형상 곡선형태	$x_3$ 축 대칭			
	포물선		타원	
h/L	curved beam	ABAQUS	curved beam	ABAQUS
0.2	4.350	4.107	4.324	4.069
	-7.367	-7.433	-7.660	-7.714
0.4	3.019	2.798	3.004	2.769
	-5.897	-6.166	-6.099	-6.359
0.6	2.572	2.332	2.498	2.305
	-4.506	-4.714	-4.514	-4.827

$x_3$  축 대칭 단면의 3차원 자유진동 해석 결과 전체적으로 포물선보다 타원의 경우가 더 작은 값을 나타내었고, '고정-고정'인 경우 첫 번째 면내 진동 모드에서, '고정-자유'인 경우 두 번째 진동 모드에서 다소 오차가 발생하였으나 전체적으로 일치하였다.

또한, 수평 및 수직하중을 받는 캔틸레버 아치의 3차원 좌굴해석을 수행한 결과, 서로 잘 일치하였으며 (+)의 좌굴하중의 경우 포물선인 경우가 타원보다 더 큰 값을 나타내고 (-)의 경우에는 그 반대의 경향을 나타내었다.

본 연구에서는 임의의 지지조건과 비대칭 박벽단면을 갖고 곡률이 변하는 곡선보의 자유진동 및 좌굴해석이 가능한 이론을 제시하고 유한요소 프로그램을 개발함으로써, 이를 기초로 곡률이 변하는 곡선 구조물의 안정성 및 동적해석에 유용하게 쓰일 수 있을 것으로 판단된다.

#### 감사의 글

본 연구는 학술진흥재단 자유공모과제의 연구지원에 의해 수행된 것이며, 재단의 지원에 감사드립니다.

#### 참고 문헌

- Papangelis, T.P., Trahair, N.S., "Flexural-Torsional Buckling Test on Arches," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 113, No. 7, 1987, pp.1433~1443
- Yang, Y.B., Kuo, S.R., "Effect of Curvature on Stability of Curved Beams," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 113, No. 6, 1987, pp. 1185~1202
- Kang, Y.J., Yoo, C.H., "Thin-Walled Curved beams. II : Analytical Solution for Buckling of Arches," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 120, No. 10, 1994, pp.2102~2125
- Lee, B.K., Wilson, J.F., "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 1, 1989, pp.75~89
- OH, S.J., Lee, B.K., Lee, I.W., "Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, No. 1, 1999, pp.23~33
- Tseng, Y.P., Huang, C.S., Lin, C.J., "Dynamic Stiffness Analysis For In-Plane Vibrations Of Arches with Variable Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 207, No. 1, 1997, pp.15~31
- 민병철, 김문영, "비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성 해석 I : 해석적 방법," 한국전산구조공학회논문집, 제 11권, 제 4호, 1998, pp.239~251
- 민병철, 김문영, "비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성 해석 II : 수치적 방법," 한국전산구조공학회논문집, 제 11권, 제 4호, 1998, pp.253~265  
(접수일자 : 1999. 12. 1)