

불규칙 가진되는 회전-고정보의 비선형응답특성

Nonlinear Responses of a Hinged-Clamped Beam under Random Excitation

조 덕 상*
Cho, Duk-Sang

김 영 종**
Kim, Young-Jong

요 지

이 논문은 불규칙 가진력을 받는 회전-고정보의 비선형 응답특성을 나타낸다. 불규칙 가진력은 두 번째 고유모드의 절점과 최대변위점에 가했다. 비선형 편미분 방정식과 경계조건으로 표현되는 이 문제를 Galerkin의 방법을 이용하여 연립 비선형 상미분방정식으로 변환하였다. 이 상미분방정식으로부터 Fokker-Planck방정식과 모멘트 방정식을 얻은 후 Gaussian closure 방법 및 non-Gaussian closure 방법을 이용하여 3 모드 근사시 각각 27개 및 209개의 자율 상미분방정식을 구하였다. Gaussian closure 방법과 non-Gaussian closure 방법으로 2 모드 및 3 모드 근사해석을 수행하였고 해석적 결과들은 Monte Carlo 시뮬레이션 결과와 비교되었다. 해석결과 2 모드 근사해와 3 모드 근사해가 거의 일치하였고 2 모드 내부공진만 고려하여도 해석결과에 별 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있다.

핵심용어 : 불규칙 가진력, 내부공진, Fokker-Planck방정식, Gaussian closure 방법, non-Gaussian closure 방법

Abstract

This study presents the nonlinear responses of a hinged-clamped beam under broadband random excitation. By using Galerkin's method the governing equation is reduced to a system of nonautonomous nonlinear ordinary differential equations. The Fokker-Planck equation is used to generate a general first-order differential equation in the joint moments of response coordinates. Gaussian and non-Gaussian closure schemes are used to close the infinite coupled moment equations. The closed equations are then solved for response statistics in terms of system and excitation parameters. The case of two mode interaction is considered in order to compare it with the case of three mode interaction. Monte Carlo simulation is used for numerical verification.

Keywords : random excitation, internal resonance, Fokker-Planck equation, Gaussian closure scheme, non-Gaussian closure scheme

1. 서 론

일반적으로 지점의 축방향 이동이 불가능한 양단이 고정된 보가 횡방향으로 변형을 할 때에는 축방향의 신장을 수반하게 된다. 운동의 진폭이 증가함에 따라 이 신장이 보의 동적 응답에 미치는 영향은 심각하게 된다.

이러한 현상은 응력과 변형의 관계가 선형적이라 하더라도 변형도와 변위와의 관계식은 비선형이 되며 결국은 보의 비선형 운동방정식을 낳게 된다. 보는 연속계이나 근사해석을 위하여 다자유계로 간주할 수 있다. 비선형 다자유도계에 있어서는 선형화된 계의 고유진동수끼리 적절한 관계를 가질 때 내부공진이 발생할 수 있다.

* 정회원 · 영남대학교 공업기술연구소, 연구원
** 정회원 · 상주대학교 기계공학부, BK21교수

• 이 논문에 대한 토론을 2001년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2001년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

양단이 고정된 끝은 보의 비선형 동적응답이 그 동안 많이 연구되어 왔다^{1)~13)}. 조화가진하에서 회전-고정보의 정상상태 응답을 해석하기 위해서 Nayfeh 등^{5)~7)}은 2 모드 사이의 내부공진을 고려하였으며, Lee 등^{8)~10)}은 2 모드 및 3 모드 사이의 내부공진을 고려하였다. 이 연구에서 Lee 등⁸⁾은 조화가진력을 받는 비선형계의 경우 문제에 따라서는 더 많은 모드를 해석에 포함시킨다 해서 반드시 더 나은 해를 주는 것은 아니라는 것을 보여 주었다.

한편, Ibrahim 등¹¹⁾과 Lee 등¹²⁾은 광대역 불규칙 가진력을 받는 양단이 고정된 보에 축방향으로 좌굴이 발생하지 않도록 정하중이 가해진 경우와 좌굴이 발생하도록 정하중이 가해진 경우에 대하여 확률적 의미에서 분기를 고찰하였다. 좌굴이 발생하지 않도록 정하중이 가해진 경우¹¹⁾, 조합공진조건 ($\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$)하에서 직접 가진이 되지 않는 두 번째 모드는 non-Gaussian closure 방법과 Monte Carlo 시뮬레이션으로는 분기를 예측하였으나 Gaussian closure 방법으로는 분기를 예측하지 못하였다. 좌굴이 발생하도록 정하중이 가해진 경우¹²⁾, 내부공진조건 ($\omega_1 \approx \omega_2$)하에서 Gaussian closure 방법으로 예측한 두 번째 모드의 분기는 non-Gaussian closure 방법으로 예측한 분기점보다 상대적으로 높은 가진력의 크기에서 일어남을 보여 주었고 Gaussian closure 방법으로 예측한 두 번째 모드의 분기점이 Monte Carlo 시뮬레이션의 결과와 잘 일치함을 보여 주었다.

본 연구의 동기는 조화가진하에서 비선형 진동특성이 연구되어진 회전-고정보^{5)~10)}에 불규칙 가진력이 작용하면 어떤 결과를 낳을 것인가? 에 대한 의문으로부터 유발되었다. 본 연구에서는 hinged-clamped 보의 비선형 응답특성을 조사하기 위하여 불규칙 가진력을 각각 두 번째 고유모드의 절점과 최대변위점에 가했으며, 비선형 편미분 방정식과 경계조건으로 표현되는 이 문제를 Galerkin의 방법을 이용하여 연립 비선형 상미분방정식으로 변환한다. 이 상미분방정식으로부터 Fokker-Planck 방정식과 모멘트 방정식을 얻은 후 Gaussian closure 방법 및 non-Gaussian closure 방법을 이용하여 자율 상미분방정식을 구하고, 이 방정식을 수치적분함으로써 응답의 모드상호작용을 조사하였다. Gaussian closure 방법과 non-Gaussian closure 방법으로 2 모드 및 3 모드 근사해석을 수행하였다. 또한 두 해석적 방법으로부터 구해진 응답의 통계적 특성을 Monte Carlo 시뮬레이션의 결과와 비교하였다.

2. 운동방정식

일반적으로 지점의 축방향 이동이 불가능한 양단이 고정된 보가 처지게 될 때 중간평면의 신장을 수반하며 보의 동적거동이 크게 됨으로서 이 중간평면의 신장은 증가된다. 이러한 중간평면의 신장은 보의 처짐량과 비선형 관계에 있다. Fig. 1에 보여진 회전-고정보의 운동방정식과 경계조건은 다음과 같이 표시된다⁵⁾.

$$EI \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + \rho A \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = 2c^* \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + H^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + P^*(x^*, t^*)$$

$$w^*(0, t^*) = 0, \quad \frac{\partial^2 w^*(0, t^*)}{\partial x^{*2}} = 0$$

$$w^*(l^*, t^*) = 0, \quad \frac{\partial w^*(l^*, t^*)}{\partial x^*} = 0$$

여기서 E =Young's modulus, b =보의 너비, h =보의 두께, ρ =보의 밀도, $I = bh^3/12$ =단면 2차 모멘트, c^* =감쇠계수, P^* =불규칙 가진력, $H^* = EA/2l^*$ $\int_0^{l^*} (\partial w^* / \partial x^*)^2 dx^* =$ 중간평면의 비선형 신장에 기인한 항, w^* =보의 처짐, t^* =시간, x^* =축방향 좌표, l^* =보의 길이, 그리고 A =보의 단면적이다.

무차원 변수의 항으로 위의 식을 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \epsilon \left[-2c \frac{\partial w}{\partial t} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P \right],$$

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0$$

$$w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

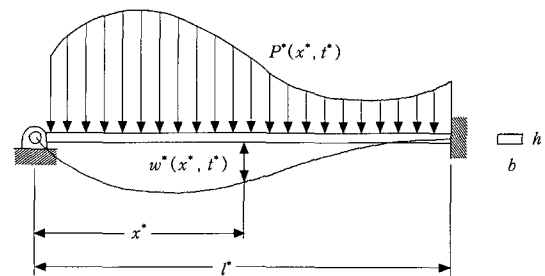


Fig. 1 A schematic diagram of a hinged-clamped beam

여기서 $H = \nu \int_0^l (\partial w / \partial x)^2 dx$, $\nu = 1/2l$, $x^* = xL$, $L = l^*/2$, $l = l^*/L = 2$, $r = (I/A)^{1/2} =$ 회전 반경, $t^* = (\rho L^4/Er^2)^{1/2}t$, $w^* = r^2 w/L$, $\varepsilon = r^2/L^2 = (h/L)^2/12$, $P^* = (r^6 EA/L^7)P$, $c^* = 2cr^3 A(\rho E)^{1/2}/L^4$, 그리고 $H^* = EAH(r/L)^4$ 이다. 식(1)은 Galerkin의 방법으로 근사적으로 풀 수가 있다.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x) \quad (2)$$

여기에서 u_n 은 일반화 좌표이며, φ_n 은 다음과 같은 고유치문제로부터 결정되는 고유함수(eigenfunction)이다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} - \omega_n^2 \varphi_n &= 0 \\ \varphi_n(0) &= 0, \quad \frac{d^2 \varphi_n(0)}{dx^2} = 0 \\ \varphi_n(l) &= 0, \quad \frac{d \varphi_n(l)}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 ω_n 은 고유진동수이다. 고유치문제 (3)의 고유함수는 다음과 같다.

$$\varphi_n = e_n [\sin(\alpha_n x) - R_n \sinh(\alpha_n x)] \quad (4)$$

여기서

$$\begin{aligned} e_n &= \left[\frac{1}{2} l (l - R_n^2) \right. \\ &\quad \left. + \{ R_n^2 \sinh(2\alpha_n l) - \sin(2\alpha_n l) \} / (4\alpha_n) \right]^{-1/2} \\ R_n &= \sin(\alpha_n l) / \sinh(\alpha_n l) \\ \alpha_n &= \sqrt{\omega_n} \end{aligned}$$

이고 α_n 은 $\tan(\alpha_n l) = \tanh(\alpha_n l)$ 의 근이다. Fig. 2는 3차까지의 고유함수를 나타내고 있다. $l=2$ 인 경우에 3차까지의 근과 진동수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 l &= 3.927 \quad \text{그리고} \quad \omega_1 = 3.855, \\ \alpha_2 l &= 7.069 \quad \text{그리고} \quad \omega_2 = 12.491, \\ \alpha_3 l &= 10.210 \quad \text{그리고} \quad \omega_3 = 26.062 \end{aligned}$$

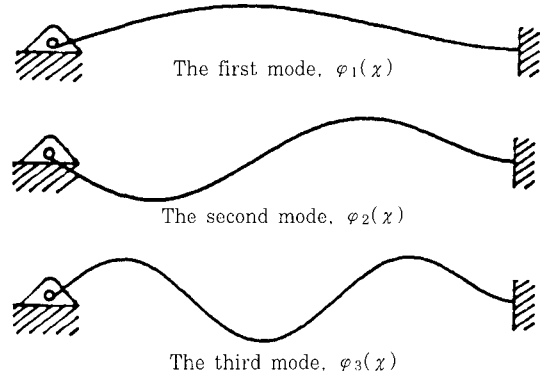


Fig. 2 Eigenfunctions of the beam vibration

이러한 고유진동수를 살펴보면 내부공진조건을 만족하는 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 과 $\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$ 의 관계를 알 수 있다. 식(2)를 식(1)에 대입하고 양변에 φ_m 을 곱하고 x 에 대하여 적분한 후 고유함수의 직교성을 이용하여 정리하면 다음과 같은 비선형 미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_n^2 u_n &= \varepsilon [-2c_n \frac{du_n}{dt} \\ &+ s_{n0} u_1^3 + s_{n1} u_1^2 u_2 + s_{n2} u_1 u_2^2 \\ &+ s_{n3} u_2^3 + s_{n4} u_1^2 u_3 + s_{n5} u_1 u_2 u_3 + s_{n6} u_2^2 u_3 \\ &+ s_{n7} u_1 u_2^2 + s_{n8} u_2 u_3^2 + s_{n9} u_3^3 + F_n(t)], \\ n &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} s_{10} &= -2.071, & s_{11} &= -2.311, & s_{12} &= -8.289, \\ s_{13} &= -2.870, & s_{14} &= 2.050, & s_{15} &= -1.796, \\ s_{16} &= 1.450, & s_{17} &= -17.367, & s_{18} &= -5.364, \\ s_{19} &= 5.581, & s_{20} &= -0.770, & s_{21} &= -8.289, \\ s_{22} &= -8.610, & s_{23} &= -28.752, & s_{24} &= -0.898, \\ s_{25} &= 2.999, & s_{26} &= -15.722, & s_{27} &= -5.364, \\ s_{28} &= -64.940, & s_{29} &= -11.489, & s_{30} &= 0.683, \\ s_{31} &= -0.898, & s_{32} &= 1.450, & s_{33} &= -5.241, \\ s_{34} &= -17.367, & s_{35} &= -10.728, & s_{36} &= -64.940, \\ s_{37} &= 16.744, & s_{38} &= -34.467, & s_{39} &= -138.173, \end{aligned}$$

$$c_n = \int_0^l c \varphi_n^2 dx$$

$$F_n(t) = \int_0^l P(x, t) \varphi_n dx$$

본 연구에서는 두 가지 경우의 가진력에 대하여 고려한다.

경우 I. 두 번째 고유모드의 절점(node)에 가진력이 가해진 경우.

비선형 연성을 통하여 직접 가진되는 모드 (u_1 과 u_3)로부터 직접 가진되지 않는 모드 (u_2)로 에너지 전달의 영향을 조사하기 가진점을 두 번째 모드의 절점으로 선택한다. 즉,

$$\varphi_2 = e_2[\sin(\alpha_2 x_w) - R_2 \sinh(\alpha_2 x_w)] = 0$$

을 만족하는 점 $x_w = 0.885$ 에 불규칙 가진력 $P(x_w, t) = W(t)$ 가 집중하중으로 작용하면 각 모드에 작용하는 불규칙 가진력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \int_0^l \delta(x - x_w) \varphi_1(x) W(t) dx = f_1 W(t) \\ F_2(t) &= \int_0^l \delta(x - x_w) \varphi_2(x) W(t) dx = f_2 W(t) \\ F_3(t) &= \int_0^l \delta(x - x_w) \varphi_3(x) W(t) dx = f_3 W(t) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1(x_w) = 1.063, \quad f_2 = \varphi_2(x_w) = 0, \\ f_3 &= \varphi_3(x_w) = -0.979 \end{aligned} \quad (7)$$

이다.

경우 II. 두 번째 고유모드의 최대변위점에 가진력이 가해진 경우.

두 번째 고유모드를 직접 가진하기 위하여 가진점을 두 번째 고유모드의 최대변위점으로 선택한다. 즉,

$$\left. \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \right|_{x=x_w} = 0$$

을 만족하는 점 $x_w = 1.354$ 에 불규칙 가진력 $P(x_w, t) = W(t)$ 가 집중하중으로 작용하면 각 모드에 작용하는 불규칙 가진력의 상수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1(x_w) = 0.663, \quad f_2 = \varphi_2(x_w) = -1.069, \quad f_3 \\ &= \varphi_3(x_w) = 0.613 \end{aligned} \quad (8)$$

불규칙 가진력 $W(t)$ 는 평균이 0 이고 다음과 같은 상관관계를 가지는 백색잡음이라고 가정한다.

$$R_{ww}(\Delta t) = E[W(t)W(t + \Delta t)] = 2D\delta(\Delta t) \quad (9)$$

여기서 $2D$ 는 진동수를 $f(= \omega/2\pi)$ 로 표현할 때의 스펙트럼밀도이고 $\delta(\Delta t)$ 는 Dirac delta 함수이다.

3. Fokker-Planck 방정식

다음과 같은 좌표변환을 도입하고

$$\begin{aligned} \{u_1, u_1', u_2, u_2', u_3, u_3'\}^T \\ = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}^T = \mathbf{X} \end{aligned}$$

불규칙 과정 $W(t)$ 를 브라운 과정(Brownian process) $B(t)$ 의 도함수(formal derivative) 즉, $W(t) = dB/dt$ 로 나타내면 식(5)는 다음과 같은 Itô 방정식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} dX_1 &= X_2 dt, \\ dX_2 &= [-\omega_1^2 X_1 + \epsilon(-2c_1 X_2 + s_{10} X_1^3 \\ &\quad + s_{11} X_1^2 X_3 + s_{12} X_1 X_3^2 + s_{13} X_3^3 + s_{14} X_1^2 X_5 \\ &\quad + s_{15} X_1 X_3 X_5 + s_{16} X_3^2 X_5 + s_{17} X_1 X_5^2 \\ &\quad + s_{18} X_3 X_5^2 + s_{19} X_5^3)] dt + \epsilon f_1 dB, \\ dX_3 &= X_4 dt \\ dX_4 &= [-\omega_2^2 X_3 + \epsilon(-2c_2 X_4 + s_{20} X_1^3 \\ &\quad + s_{21} X_1^2 X_3 + s_{22} X_1 X_3^2 + s_{23} X_3^3 + s_{24} X_1^2 X_5 \\ &\quad + s_{25} X_1 X_3 X_5 + s_{26} X_3^2 X_5 + s_{27} X_1 X_5^2 \\ &\quad + s_{28} X_3 X_5^2 + s_{29} X_5^3)] dt + \epsilon f_2 dB \\ dX_5 &= X_6 dt, \\ dX_6 &= [-\omega_3^2 X_5 + \epsilon(-2c_3 X_6 + s_{30} X_1^3 + s_{31} X_1^2 X_3 \\ &\quad + s_{32} X_1 X_3^2 + s_{33} X_3^3 + s_{34} X_1^2 X_5 + s_{35} X_1 X_3 X_5 \\ &\quad + s_{36} X_3^2 X_5 + s_{37} X_1 X_5^2 + s_{38} X_3 X_5^2 + s_{39} X_5^3)] dt \\ &\quad + \epsilon f_3 dB \end{aligned} \quad (10)$$

이제 Markov 벡터 $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}^T$ 를 Fokker-Planck 방정식

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) = & - \sum_{j=1}^6 \frac{\partial}{\partial x_j} [a_j(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} [b_{jk}(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)] \quad (11) \end{aligned}$$

에 적용하기로 한다. 여기서 $p(\mathbf{x}, t)$ 는 결합 확률밀도함수(joint probability density function)이고 $a_j(\mathbf{x}, t)$ 와 $b_{jk}(\mathbf{x}, t)$ 는 각각 Markov 과정 $\mathbf{X}(t)$ 의 1차 및 2차 증가모멘트(incremental moment)이며 x_j 는 \mathbf{x} 의 성분(component)이다. 이러한 증가모멘트는 다음과 같이 정의된다¹³⁾.

$$\begin{aligned} a_j(\mathbf{x}, t) = & \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} E\{X_j(t + \delta t) \\ & - X_j(t) \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}\} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{jk}(\mathbf{x}, t) = & \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} E\{[X_j(t + \delta t) - X_j(t)] \\ & \times [X_k(t + \delta t) - X_k(t)] \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x}\} \quad (13) \end{aligned}$$

4. Closure 방법

Fokker-Planck 방정식(11)로 부터 완전해 $p(\mathbf{x}, t)$ 를 구하는 것은 불가능하지만,^{14), 15)} 임의의 차수 $n = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6$ 에 대한 $p(\mathbf{x}, t)$ 의 모멘트 방정식은 식(11)에 $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} x_4^{\beta_4} x_5^{\beta_5} x_6^{\beta_6}$ 를 곱하고 전 상태공간 ($-\infty < x_i < \infty$)에 대해서 적분함으로써 얻을 수 있다. 다음과 같은 표현

$$\begin{aligned} m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6}(t) = & E[X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} X_3^{\beta_3} X_4^{\beta_4} X_5^{\beta_5} X_6^{\beta_6}] \\ = & \int \int \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} x_4^{\beta_4} x_5^{\beta_5} x_6^{\beta_6} \\ & p(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 \end{aligned}$$

을 사용하면 n 차에 대한 모멘트 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m'_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6} = & \beta_1 m_{\beta_1-1, \beta_2+1, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6} \\ & - \beta_2 \omega_1^2 m_{\beta_1+1, \beta_2-1, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6} + \beta_3 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3-1, \beta_4+1, \beta_5, \beta_6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \beta_4 \omega_2^2 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3+1, \beta_4-1, \beta_5, \beta_6} + \beta_5 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5-1, \beta_6+1} \\ & - \beta_6 \omega_3^2 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5+1, \beta_6-1} \\ & + \epsilon S_{10} \beta_2 m_{\beta_1+3, \beta_2-1, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6} \\ & - 2\epsilon c_1 \beta_2 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{11} \beta_2 m_{\beta_1+2, \beta_2-1, \beta_3+1, \beta_4, \beta_5, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{12} \beta_2 m_{\beta_1+1, \beta_2-1, \beta_3+2, \beta_4, \beta_5, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{13} \beta_2 m_{\beta_1, \beta_2-1, \beta_3+3, \beta_4, \beta_5, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{14} \beta_2 m_{\beta_1+2, \beta_2-1, \beta_3+3, \beta_4, \beta_5+1, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{15} \beta_2 m_{\beta_1+1, \beta_2-1, \beta_3+1, \beta_4, \beta_5+1, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{16} \beta_2 m_{\beta_1, \beta_2-1, \beta_3+2, \beta_4, \beta_5+1, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{17} \beta_2 m_{\beta_1+1, \beta_2-1, \beta_3, \beta_4, \beta_5+2, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{18} \beta_2 m_{\beta_1, \beta_2-1, \beta_3+1, \beta_4, \beta_5+2, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{19} \beta_2 m_{\beta_1, \beta_2-1, \beta_3, \beta_4, \beta_5+3, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{20} \beta_4 m_{\beta_1+3, \beta_2, \beta_3, \beta_4-1, \beta_5, \beta_6} \\ & - 2\epsilon c_2 \beta_4 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{21} \beta_4 m_{\beta_1+2, \beta_2, \beta_3+1, \beta_4-1, \beta_5, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{22} \beta_4 m_{\beta_1+1, \beta_2, \beta_3+2, \beta_4-1, \beta_5, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{23} \beta_4 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3+3, \beta_4-1, \beta_5, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{24} \beta_4 m_{\beta_1+2, \beta_2, \beta_3+3, \beta_4-1, \beta_5+1, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{25} \beta_4 m_{\beta_1+1, \beta_2, \beta_3+1, \beta_4-1, \beta_5+1, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{26} \beta_4 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3+2, \beta_4-1, \beta_5+1, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{27} \beta_4 m_{\beta_1+1, \beta_2, \beta_3, \beta_4-1, \beta_5+2, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{28} \beta_4 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3+1, \beta_4-1, \beta_5+2, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{29} \beta_4 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4-1, \beta_5+3, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{30} \beta_6 m_{\beta_1+3, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6-1} \\ & - 2\epsilon c_3 \beta_6 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6} \\ & + \epsilon S_{31} \beta_6 m_{\beta_1+2, \beta_2, \beta_3+1, \beta_4, \beta_5, \beta_6-1} \\ & + \epsilon S_{32} \beta_6 m_{\beta_1+1, \beta_2, \beta_3+2, \beta_4, \beta_5, \beta_6-1} \\ & + \epsilon S_{33} \beta_6 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3+3, \beta_4, \beta_5, \beta_6-1} \\ & + \epsilon S_{34} \beta_6 m_{\beta_1+2, \beta_2, \beta_3+3, \beta_4, \beta_5+1, \beta_6-1} \\ & + \epsilon S_{35} \beta_6 m_{\beta_1+1, \beta_2, \beta_3+1, \beta_4, \beta_5+1, \beta_6-1} \\ & + \epsilon S_{36} \beta_6 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3+2, \beta_4, \beta_5+1, \beta_6-1} \\ & + \epsilon S_{37} \beta_6 m_{\beta_1+1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5+2, \beta_6-1} \\ & + \epsilon S_{38} \beta_6 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3+1, \beta_4, \beta_5+2, \beta_6-1} \\ & + \epsilon S_{39} \beta_6 m_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5+3, \beta_6-1} \\ & + \epsilon^2 \beta_2 (\beta_2 - 1) f_1^2 D m_{\beta_1, \beta_2-2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon^2 \beta_4 (\beta_4 - 1) f_2^2 Dm_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4-2, \beta_5, \beta_6} \\
 & + \varepsilon^2 \beta_6 (\beta_6 - 1) f_3^2 Dm_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6-2} \\
 & + 2\beta_2 \beta_4 f_1 f_2 Dm_{\beta_1, \beta_2-1, \beta_3, \beta_4-1, \beta_5, \beta_6} \\
 & + 2\beta_2 \beta_6 f_1 f_3 Dm_{\beta_1, \beta_2-1, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6-1} \\
 & + 2\beta_4 \beta_6 f_2 f_3 Dm_{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4-1, \beta_5, \beta_6-1} \quad (14)
 \end{aligned}$$

모멘트 미분방정식 (14)를 살펴보면 우변의 모멘트 차수가 $n+2$ 로서 좌변과 우변의 모멘트 차수가 같지 않음을 알 수 있다. 이러한 모멘트 미분방정식의 응답은 $n+1, n+2$ 차 모멘트를 n 차 이하의 모멘트로 전환하는 cumulant 절사방법을 사용함으로써 얻어진다. 여기서 cumulant라는 것은 1차 및 2차 cumulant가 각각 평균 및 분산과 동일하며 3차 이상의 cumulant가 무시될 경우 평균과 분산으로 표시되는 가우스과정이 되는 통계적 변수이다. 이 cumulant 절사방법에는 응답의 확률밀도함수를 가우스분포로 가정하느냐, 비가우스분포(non-Gaussian distribution)로 가정하느냐에 따라 분류되는 Gaussian closure 방법과 non-Gaussian closure 방법이 있다. 이 방법에는, 응답의 확률밀도함수를 가우스 분포로 가정하느냐, 비가우스분포로 가정하느냐에 따라 분류되는 Gaussian closure 방법과 non-Gaussian closure 방법이 있다.

Gaussian closure 방법의 경우 식(14)는 $n=1, 2$ 에 대해서 미분방정식을 전개할 수 있으며, 이때 생성되는 3차 및 4차 모멘트들은 3차 및 4차 cumulant^{(13),(14)}를 0으로 놓음으로써 1차 또는 2차 모멘트로 전환할 수 있다. 2 모드 근사시 식(14)는 14개의 모멘트(4개의 1차 모멘트와 10개의 2차 모멘트) 미분방정식으로 정리되며, 3 모드 근사시 식(14)는 27개의 모멘트(6개의 1차 모멘트와 21개의 2차 모멘트) 미분방정식으로 정리된다.

Non-Gaussian closure 방법의 경우 응답 과정이 가우스 분포로부터 약간 벗어난다고 한다면 식(14)로부터 $n=1 \sim 4$ 에 대해서 미분방정식을 전개할 수 있으며, 이때 생성되는 5차 및 6차 모멘트들은 5차 및 6차 cumulant^{(13),(14)}를 0으로 놓음으로써 5차이하의 모멘트로 전환할 수 있다. 2 모드 근사시 식(14)는 69개의 모멘트(4개의 1차 모멘트, 10개의 2차 모멘트, 20개의 3차 모멘트, 그리고 35개의 4차 모멘트) 미분방정식으로 정리되며, 3 모드 근사시 식(14)는 209개의

모멘트(6개의 1차 모멘트, 21개의 2차 모멘트, 56개의 3차 모멘트, 그리고 126개의 4차 모멘트) 미분방정식으로 정리된다.

편의를 위하여 Gaussian closure 방법 또는 non-Gaussian closure 방법으로 얻어진 자율 상미분방정식(autonomous ordinary differential equations)으로 구성된 계를 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{f}(\mathbf{m}) \quad (15)$$

여기서 $\mathbf{m} = \{m_{1,0,0,0,0,0}, m_{0,1,0,0,0,0}, \dots\}^T$ 는 모멘트 벡터이며 $\mathbf{f}(\mathbf{m}) = \{f_1(\mathbf{m}), f_2(\mathbf{m}), \dots\}^T$ 은 이 계의 벡터장(vector field)이다.

5. Monte Carlo 시뮬레이션

두 closure 방법으로 구한 응답의 통계적 특성의 타당성을 조사하기 위하여 Monte Carlo 시뮬레이션^{(16),(17)}을 통해 식(5)를 직접 수치적분하였다. 정상 가우스 과정 $W(t)$ 와 이에 대한 응답의 통계적 수렴성을 검사한 후 $W(t)$ 를 구성하기 위하여 1000개의 표본 record를 사용하였는데, 각 record는 다음 식으로부터 $t=1000$ 의 시간동안 $N=40000$ 개의 불규칙수(random number)를 순차적으로 표본함으로써 만들어진다.

$$W(t) = \sum_{j=1}^N \sqrt{2(4D)(f_{j+1} - f_j)} \sin(2\pi\sqrt{f_j f_{j+1}} t + \phi_j) \quad (16)$$

여기에서 $4D$ 는 단편 스펙트럼밀도(one-sided spectrum)이고, f_j 는 0에서 cut-off 주파수까지 오름차순으로 균일하게 분포되어 있는 불규칙 주파수, ϕ_j 는 $0 \sim 2\pi$ 사이에 균일하게 분포되어 있는 불규칙 위상각이다.

6. 수치결과

수치예를 위하여 자율 상미분방정식(15)를 수치적으로 적분함으로써 모멘트들의 거동을 조사하였다.

Fig. 3과 4는 불규칙 가진력이 각각 두 번째 고유 모드의 절점과 최대변위점에 가해진 경우에 운동의 제곱평균값이 시간이 경과함에 따라 어떻게 변화하는지를 보여 주고 있다. 이 두 그림 역시 $c_1 = c_2 = c_3 = 100$,

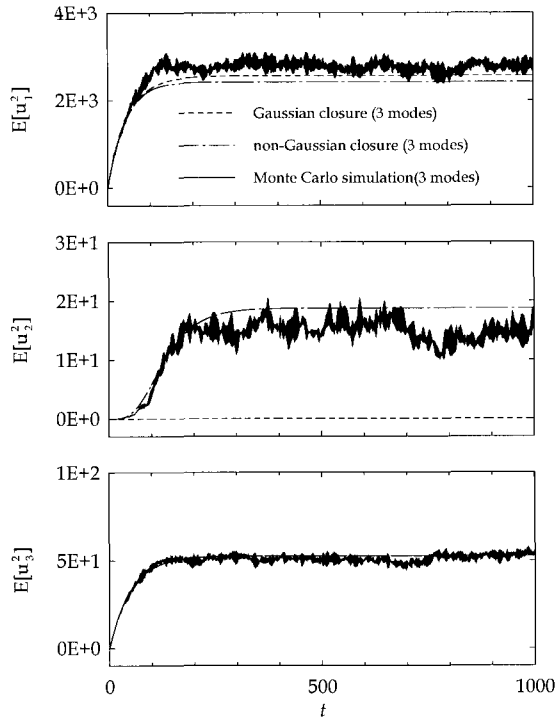


Fig. 3 Mean square time histories according to Gaussian closure, non-Gaussian closure, and Monte Carlo simulation when the excitation is applied at the nodal point of the second mode ($c_1 = c_2 = c_3 = 100, \epsilon = 0.0001, 2\epsilon^2 D = 1500$)

$\epsilon = 0.0001, 2\epsilon^2 D = 1500$ 일 때 3 모드 근사된 Gaussian closure 방법과 non-Gaussian closure 방법, Monte Carlo 시뮬레이션으로 얻어진 제곱평균응답의 시간이력을 나타낸다. Fig. 3에서 non-Gaussian closure 방법과 Monte Carlo 시뮬레이션의 결과는 직접 가진되는 첫 번째 모드와 세 번째 모드로부터 직접 가진되지 않는 두 번째 모드로 에너지가 잘 전달되고 있음을 보여 주고 있는 반면에 Gaussian closure 방법의 결과는 이들과 잘 일치하고 있지 않음을 보여 준다. Fig. 4에서는 두 해석적 방법의 결과와 Monte Carlo 시뮬레이션의 결과가 잘 일치하고 있음을 나타내며 세 모드 사이에 에너지 전달이 이루어지고 있음을 보여 준다. 이 두 그림에서 정상상태(steady state)에 도달했을 때 Gaussian closure 방법에 의한 응답과 non-Gaussian closure 방법에 의한 응답은 정상 과정(stationary process)을 나타내고 있다.

Fig. 5와 6은 가진력이 각각 두 번째 고유모드의

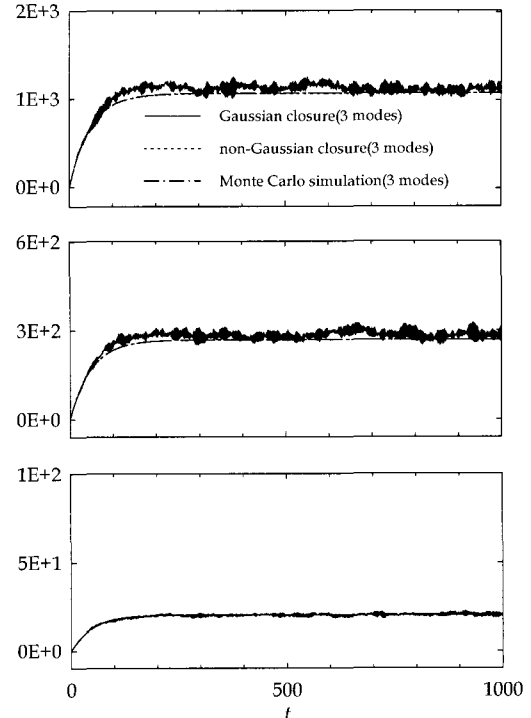


Fig. 4 Mean square time histories according to Gaussian closure, non-Gaussian closure, and Monte Carlo simulation when the excitation is applied at the antinode of the second mode ($c_1 = c_2 = c_3 = 100, \epsilon = 0.0001, 2\epsilon^2 D = 1500$)

절점과 최대변위점에 외부 가진력이 가해진 경우에 제곱평균값의 한계를 가진력의 제곱평균값에 비례하는 (또는 스펙트럼밀도 $2D$ 에 비례하는) $2\epsilon^2 D$ 의 함수로 나타낸 것이다. Fig. 5(b)를 제외한 모든 그림에서 두 해석적 방법의 결과와 Monte Carlo 시뮬레이션의 결과는 잘 일치하고 있음을 나타내며 가진력의 크기가 작을 때는 선형해석의 결과와 일치한다. Fig. 3에서도 나타난 것처럼 Monte Carlo 시뮬레이션의 결과는 Gaussian closure 방법의 결과보다도 오히려 non-Gaussian closure 방법의 결과와 더 잘 일치하고 있다. 2 번째 모드는 비선형 연성을 통하여 가진되기 때문에 선형해석의 결과는 이 그림에 나타나지 않는다. Fig. 5(a), 5(b), 6(a), 그리고 6(b)에서 가진력의 크기가 $z-z$ 선을 벗어나서는 2 모드 근사된 non-Gaussian closure 방법으로는 수치적분이 불가능하였다. Fig. 5와 6에서 Gaussian closure 방법에 의한 두 번째 모드의 응답은 non-Gaussian closure 방

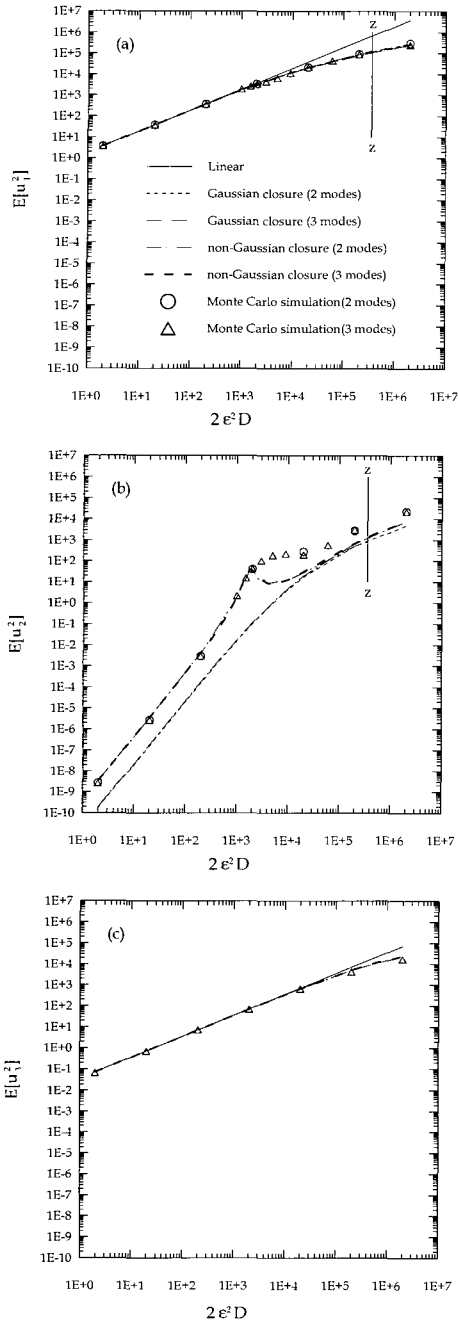


Fig. 5 Limits of mean square value plotted against $2\epsilon^2 D$ according to Gaussian closure, non-Gaussian closure, and Monte Carlo simulation when the excitation is applied at the nodal point of the second mode ($c_1 = c_2 = c_3 = 100, \epsilon = 0.0001$)

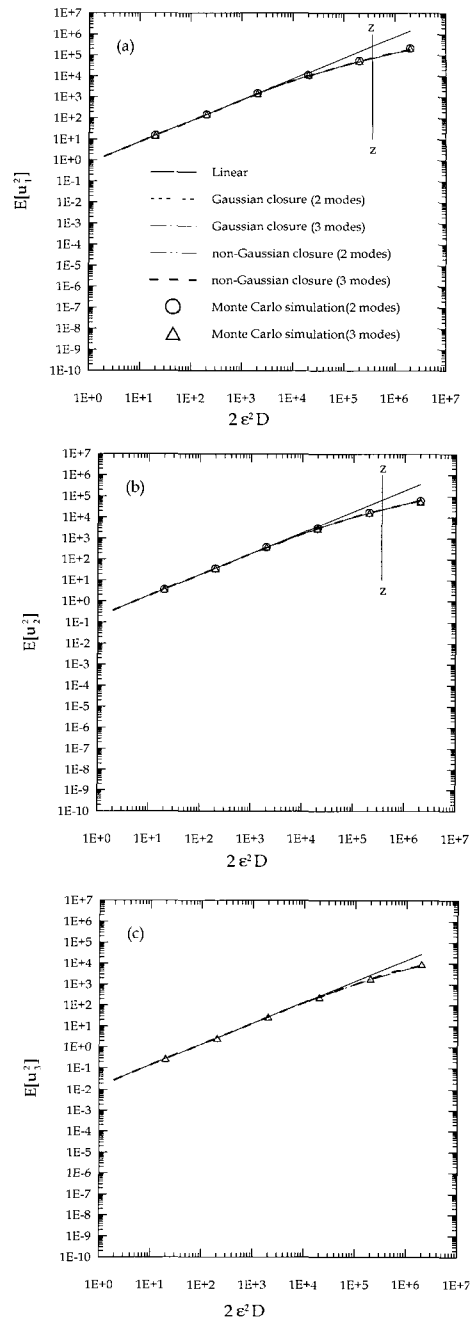


Fig. 6 Limits of mean square value plotted against $2\epsilon^2 D$ according to Gaussian closure, non-Gaussian closure, and Monte Carlo simulation when the excitation is applied at the antinode of the second mode ($c_1 = c_2 = c_3 = 100, \epsilon = 0.0001$)

법과 Monte Carlo 시뮬레이션의 응답과 달리 예측되고 있지만 하나의 공통점은 2 모드 근사해와 3 모드 근사해가 거의 일치함을 알 수 있다. 이 결과로부터 계의 비선형 연성에 의하여 직접 가진되지 않는 두 번째 모드로 에너지 전달은 내부공진조건인 관계 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 이 $\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$ 보다 더 지배적임을 알 수 있다. 조화 가진의 결과⁸⁾와 마찬가지로 불규칙 가진의 경우도 첫 번째 모드가 계의 응답을 지배함을 감안한다면 3 번째 모드를 해석에 추가한다고 해서 해석결과에 별 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있다.

7. 결 론

불규칙 가진력을 받는 연속계의 내부공진효과를 조사하기 위하여 회전-고정모를 선택하였다. 불규칙 가진력은 각각 두 번째 고유모드의 절점과 최대변위점에 가했다. 해석과정에 더 많은 모드를 포함시키면 어떤 결과를 낳게 될 것인지를 알아보기 위하여 2 모드 및 3 모드 내부공진효과를 고려하였다. 내부공진 영역에서 계의 비선형 연성으로 인하여 직접 가진되는 첫 번째 모드와 세 번째 모드로부터 직접 가진되지 않는 두 번째 모드로 에너지가 전달됨을 확인하였다. 정상상태에 도달했을 때 Gaussian closure 방법에 의한 응답과 non-Gaussian closure 방법에 의한 응답은 모두 정상 과정을 나타내고 있다. 두 번째 고유모드의 절점에 가진력이 가해진 경우 Monte Carlo 시뮬레이션의 결과는 Gaussian closure 방법의 결과보다 non-Gaussian closure 방법의 결과와 더 잘 일치함을 알 수 있었다. Gaussian closure 방법에 의한 두 번째 모드의 응답은 non-Gaussian closure 방법과 Monte Carlo 시뮬레이션의 응답과 달리 예측되고 있지만 하나의 공통점은 2 모드 근사해와 3 모드 근사해가 거의 일치함을 알 수 있었고 2 모드 내부공진만 고려하여도 해석결과에 별 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. W. Y. Tseng and J. Dugundji, "Non-linear Vibrations of a Beam under Harmonic Excitation", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 37, 1970, pp.292~297
2. S. Atluri, "Nonlinear Vibrations of a Hinged Beam including Nonlinear Inertia Effects", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 40, 1973, pp.121~126
3. C. L. Lou and D. L. Sikarskie, "Nonlinear Vibration of Beams Using a Form-Function Approximation", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, 1975, pp.209~214
4. R. Lewandowski, "Application of the Ritz method to the Analysis of Nonlinear Free Vibrations of Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 114, No. 1, 1987, pp.91~101
5. A. H. Nayfeh, D. T. Mook, and S. Sridhar, "Nonlinear Analysis of the Forced Response of Structural Elements", *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 55, No. 2, 1974, pp.181~291
6. S. Sridhar, A. H. Nayfeh, and D. T. Mook, "Nonlinear Resonances in a Class of Multi-Degree-of-Freedom Systems", *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 58, No. 1, 1975, pp.113~123
7. A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons Inc., 1979, p.704
8. W. K. Lee and K. Y. Soh, "Nonlinear Analysis of the Forced Response of a Beam with Three Mode Interaction", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 6, 1994, pp.49~68
9. W. K. Lee and M. R. Ghang, "Domains of Attraction of a Forced Beam by Interpolated Mapping", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, 1994, pp.144~151
10. W. K. Lee and C. H. Kim, "Evolution of Domains of Attraction of a Forced Beam with Two-Mode Interaction", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 14, 1997, pp.37~48
11. R. A. Ibrahim, B. H. Lee, and A. A. Afaneh, "Structural Modal Multifurcation With Internal Resonance-Part 2: Stochastic Approach", *Transactions of the ASME, Journal of Vibration*,

- Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 115, 1993, pp.193~201
12. B. H. Lee and R. A. Ibrahim, "Stochastic Bifurcation in Non-linear Structural Systems near 1:1 Internal Resonance", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 9, 1994, pp.23~32
13. T. T. Soong, *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press Inc., 1973, p.402
14. R. A. Ibrahim, *Parametric Random Vibration*, John Wiley & Sons Inc., 1985, p.342
15. Y. K. Lin and G. Q. Cai, *Probabilistic Structural Dynamics Advanced Theory and Application*, McGraw-Hill, Inc., 1995, p.476
16. M. Shinozuka and G. Deodatis, "Simulation of Stochastic Processes by Spectral Representation", *Applied Mechanics Review*, Vol. 44, 1991, pp.191~204
17. C. Y. Yang, *Random Vibration of Structures*, John Wiley & Son, Inc., 1986, p.295
(접수일자 : 2000. 2. 24)