

# 개선된 쉘 요소를 이용한 쉘 구조의 유한 요소 해석

## The Finite Element Analysis of Shell Structures Using Improved Shell Element

허 명 재\*  
Heo, Myong-Jae

김 홍 근\*\*  
Kim, Hong-Keun

김 진 식\*\*\*  
Kim, Jin-Sik

### 요 지

기존의 Mindlin이론을 바탕으로 한 감절점 쉘 요소는 두께가 두꺼운 쉘 구조를 해석할 경우 매우 좋은 결과가 얻어지는 것으로 알려져 있다. 그러나 두께가 얇은 쉘의 경우 전단구속 및 막구속 현상으로 인해 요소의 강성이 과대하게 평가되는 것으로 나타났다. 이러한 문제를 해결하기 위해 본 연구에서는 서로 다른 두 가지 막 및 전단 구속 해결방법을 조합하여 쉘 요소에 적용하였다. 첫 번째 요소는 전단 변형률에 가정된 전단변형률을 적용하였고, 막 변형률에는 감차적분법을 적용하였다. 두 번째 요소의 경우, 막 변형률과 전단 변형률 모두에 가정된 전단 변형률을 적용하여 쉘 구조 해석을 수행하였다. 여러 가지 수치 해석을 수행한 결과, 두 가지 쉘 요소가 빠른 수렴성을 가지고 있는 것으로 나타났으며, 막 구속과 전단 구속 현상이 제거된 것을 나타냈다.

**핵심용어** : 유한요소법, 가정된 전단변형률, 가정된 막변형률, 전단구속, 막구속

### Abstract

The original Mindlin-type degenerated shell element perform reasonably well for moderately thick shell structures. However, when full integration for analysis of thin shell is used to evaluate the stiffness matrix, the stiffness of shell element is often over-estimated due to shear or membrane locking phenomena. To correct this problem, the formulation of the new degenerated shell element is derived by the combination of two different techniques. The first type of elements(Type I) has used assumed shear strains in the natural coordinate system to overcome the shear locking problem, the reduced integration technique in in-plane strains(membrane strains) to avoid membrane locking behaviour. Another element(Type II) has applied the assumed strains to both of membrane strain and transverse shear strains. The improved degenerated shell element has been tested by several numerical problems of shell structures. Numerical results indicate that this shell element shows fast convergence and reliable solutions.

**Keywords** : *Finite Element Methods, Assumed Transverse Shear strains, Assumed Membrane Strains, Shear Locking, Membrane locking*

### 1. 서 론

Mindlin이론을 바탕으로 개발된 가장 대표적인 쉘 요소는 Zienkiewicz<sup>1)</sup>에 의해 제안된 감절점 쉘 요소

(Degenerated Shell Element)이다. 이 요소는 휨 요소, 막 요소 그리고 전단요소의 조합을 간단히 만들 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그러나 이 감절점 쉘 요소를 얇은 쉘 구조 해석에 적용할 경우, 얇은 쉘 구

\* 정회원 · 시립인천대학교 건축공학과, 교수

\*\* 학생회원 · 시립인천대학교 건축공학과, 석사과정

\*\*\* 시립인천대학교 건축공학과, 석사과정

· 이 논문에 대한 토론을 2001년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2001년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

조의 유한 요소 해석값과 실제 이론값은 상당한 차이를 가지게 된다. 이는 쉘 요소의 두께가 감소함에 따라 전단구속(Shear Locking)현상과 막구속(Membrane Locking)현상을 수반하기 때문이다. 전단구속현상은 얇은 두께의 감절점 쉘 요소의 전단변형률이 "0"의 값으로 수렴 하지 않음에 따라, 요소의 강성이 과대하게 발생하는 현상을 말한다. 그리고 막구속현상은 막 강성이 쉘 두께가 얇아짐에 따라 더 이상 쉘의 강성을 지배하지 못함에도 불구하고, 요소의 강성을 지배하는 현상을 말한다<sup>2),3)</sup>.

이러한 현상을 해결하기 위해 여러 연구자들에 의해 감차적분법(Reduced Integration) 또는 선택적 적분법(Selective Integration), 그리고 비적합변위모드(Nonconforming Displacement Mode)를 추가하여 해석하는 방법, 그리고 가정된 변형률(Assumed Strain)을 사용하는 방법 등이 제시되었다.

감차 적분법은 Zienkiewicz에 의해 쉘 요소에 처음으로 적용되었다. 그리고 Hughes와 Haroun<sup>4)</sup>에 의해 연구가 활발히 이루어졌다. 이 방법은 쉘 요소의 전단구속 및 막 구속 현상이 가우스 적분점인  $1/\sqrt{3}$ 에서 제거된다는 수학적 해석을 바탕으로 하고 있다. 따라서 2차 요소의 정상 적분점인  $\sqrt{3/5}$ 을 사용하지 않고, 구속 현상이 제거되는 감차적분점  $1/\sqrt{3}$ 에서 쉘 요소의 강성을 구함으로서 전단 및 막 변형률을 평가는 방법이다. 그러나 감차적분법을 사용한 8절점 이상의 요소의 경우, 감차적분법의 사용에도 불구하고 전단 구속 현상을 효과적으로 제거하지 못하였고, 요소의 강성이 과대하게 평가되는 오류가 초래되었다.

Wilson<sup>5)</sup>등에 의해 2차원 요소에 적용된 비적합변위형을 추가하는 방법은 매개변수 요소가 부정확한 값을 주는 가장 큰 요소인 응력 평가에 비적합변위형을 추가함으로써 요소 내에 발생하는 과도한 에너지를 제거하고, 요소의 거동을 유연하게 만드는 방법이다. 그러나 비적합변위형을 추가하는 방법은 원래 요소의 거동을 개선시키는 반면, 요소의 강성을 계산하는 과정을 추가되어야 하기 때문에 추가적으로 강성을 계산하는 시간을 필요로 한다. 또한 요소의 거동을 크게 저하지 않는 범위 내에서 비적합변위형을 최소화하여야 한다는 단점을 가지고 있다.

가정된 변형률을 사용하는 방법은 각각의 요소내의 임의의 위치에서 변형률의 값을 새로운 형태의 가정된 변형률장으로 보간하여 사용하는 방법이다. 이 방법은

Bathe와 Dvorkin<sup>6)</sup>에 의해 처음 제안되었다. 또한 가정된 변형률을 사용한 여러 연구가 Huang<sup>7)~9)</sup>, Jang과 Pinsky<sup>10)</sup>, Park<sup>11)~13)</sup>, 최와 유<sup>14),15)</sup> 등은 막 구속현상과 전단 구속현상을 제거하기 위해 변형률에 대한 형상함수(shape function)를 여러 가지 형태로 쉘 요소에 적용하였다. 그러나 가정된 변형률을 사용하여 쉘 구조를 해석할 경우, 통상적으로 일정한  $\xi$ 값에서 Jacobian 행렬을 계산을 수행하게 된다. 그러나 실제 Jacobian 행렬은 실제로  $\xi$ 의 선형 변화를 포함하고 있다. 다시 말하여 Jacobian 행렬은 쉘 구조의 곡률에 관계된다는 것을 의미한다. 따라서 Jacobian 행렬을 일정하게 가정하게 되면, 자체 변형률(Self-Strain)의 발생으로 인하여 비틀린 보를 해석할 경우, 심각한 오차를 발생시키게 된다.

따라서 본 연구에서는 지금까지 논의된 쉘 요소의 구속 현상을 제거하기 위한 방법들 중 전단 구속 현상을 제거하기 위해 가정된 변형률을, 막 구속 현상을 제거하기 위해 감차적분법을 사용하여 기존의 쉘 요소를 개선하였다. 또한 가정된 변형률을 막 및 전단 구속현상을 제거하기 위해 Huang에 의해 제안된 요소와 본 연구에서 개선된 요소의 성능비교검토를 동시에 수행하였다.

## 2. 감절점 쉘 요소

### 2.1 일반사항

3차원적인 구조를 해석하기 위해 사용되는 3차원적인 요소의 해석은 매우 복잡한 해석과정을 통해 이루어지게 된다. 따라서 복잡한 해석을 간소화하기 위해 쉘의 중립면에 각 절점, 변위벡터, 그리고 위치벡터가 위치하는 것으로 가정한다.

그림 1은 일반적인 감절점 쉘 요소를 나타낸 것이다. 쉘 요소의 형상함수를 사용한 절점의 좌표는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} x_{i, mid} \\ y_{i, mid} \\ z_{i, mid} \end{pmatrix} + \sum N_i(\xi, \eta) \frac{t_i}{2} \zeta v_{3i} \quad (1)$$

여기서  $v_{3i} = X_{top} - X_{bottom} / |X_{top} - X_{bottom}|$ 이고,  $i$ 는 각 절점을 의미한다.

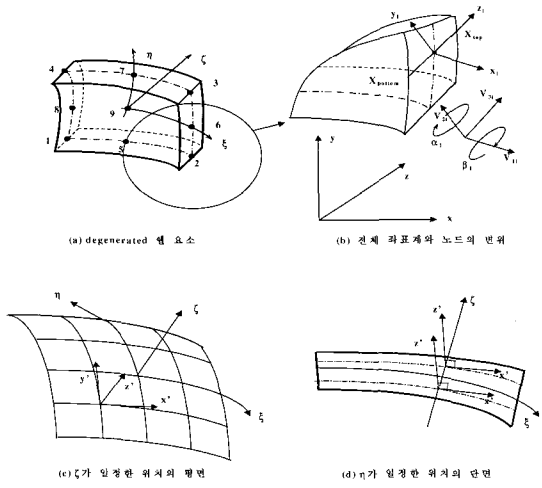


그림 1 9-node degenerate 셸 요소

### 2.2 국부 좌표계

국부 좌표계는 셸 요소 내에서 임의의 점에서 발생하는 변형률과 응력의 방향을 결정하기 위해 이용된다. z'축의 접선벡터는 ζ가 일정한 위치에서 Jacobian 행렬로 결정된다. 이는 요소가 2개의 곡률을 가지고 있다 하더라도, 곡선 좌표계에서 일정한 ζ의 값을 가지는 기준면에 국부 좌표계가 존재하게 된다는 의미이다. 따라서 전체 좌표계에서 각 방향의 국부좌표계 단위벡터는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} V_1 &= X, \xi \\ V_3 &= [x_\xi \ y_\xi \ z_\xi]^T \times [x_\eta \ y_\eta \ z_\eta]^T \\ V_2 &= V_1 \times V_3 \end{aligned} \quad (2)$$

V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>에 대한 단위 벡터 v<sub>1</sub>, v<sub>2</sub>, v<sub>3</sub>이므로 이를 행렬의 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta_0 = [v_1, v_2, v_3] \quad (3)$$

### 2.3 변형률과 응력

일반적으로 셸 요소의 해석은 셸의 표면에 수직으로 작용하는 응력이 0이라는 것을 기본적으로 가정하고 있다. 따라서 전체좌표계 내에 변형률을 사용하여 해석하는 것은 매우 복잡한 계산과정을 수행해야 한다.

본 연구에서는 국부좌표계 내의 변형률을 바탕으로 유한요소해석이 이루어졌다. 국부 좌표계 내의 변형률 (ε')은 다음과 같다.

$$\epsilon' = \begin{pmatrix} \epsilon'_{xx} \\ \epsilon'_{yy} \\ \epsilon'_{zz} \\ \gamma'_{xy} \\ \gamma'_{xz} \\ \gamma'_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{x'} \\ v'_{y'} \\ w'_{z'} \\ u'_{y'} + v'_{x'} \\ u'_{z'} + w'_{x'} \\ v'_{z'} + w'_{y'} \end{pmatrix} \quad (4)$$

여기서 ε'<sub>p</sub>는 면내 변형률(In-plane strain)이고, ε'<sub>s</sub>는 전단 변형률을 의미한다. 응력과 변형률은

$$\sigma' = D \epsilon' \quad (5)$$

와 같은 관계를 가지고 있다.

$$D = \begin{pmatrix} D_p & 0 \\ 0 & D_s \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & KA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & KA \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = (1-\nu)/2 \quad K = 5/6 \quad (6)$$

여기서 우리가 알 수 있는 것은 평면 내 응력과 전단 응력이 서로 독립되어져 있다는 것이다. 결과적으로 식 (5)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma'_p = D_p \epsilon'_p = [\sigma'_x \ \sigma'_y \ \sigma'_z \ \tau'_{xy}]^T \quad (7.a)$$

$$\sigma'_s = D_s \epsilon'_s = [\tau'_{xz} \ \tau'_{yz}]^T \quad (7.b)$$

여기서 σ'<sub>z</sub>=0이다.

### 2.4 요소의 강성

요소의 강성을 구하기 위해 전체 포텐셜 에너지를 사용하면, 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int \epsilon' D \epsilon' dV \\ &= \frac{1}{2} \int \epsilon'_p D_p \epsilon'_p dV + \frac{1}{2} \int \epsilon'_s D_s \epsilon'_s dV - W \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $W$ 는 외부하중에 의한 포텐셜 에너지이고,  $\epsilon_p$ 는 면내 변형률, 그리고  $\epsilon_s$ 는 전단 변형률이다. 따라서 쉘 요소의 강성행렬( $K$ )은 면내 강성( $K_p$ ) 그리고 전단강성( $K_s$ )으로 구성된다는 것을 알 수 있다.

$$K_p = \int B_p^T D_p B_p dV \quad (9)$$

$$K_s = \int B_s^T D_s B_s dV \quad (10)$$

### 3. 적분점 결정

#### 3.1 전단 변형률

쉘 요소 내 전단변형률의 값이 0으로 수렴하는 위치를 구하기 위해, Crisfield<sup>16)</sup>는 일반 보의 이론을 바탕으로 전단변형률의 적분점은 다음과 같이 결정하였다.

$$\gamma_x = \theta + \frac{dw}{dx} \quad (11)$$

그림 2와 같이 절점 1, 2 사이의 회전각은 선형적인 형상함수를, 가상의 중앙절점  $q$ 에서는 2차의 형상함수로 가정한다. 따라서 회전각은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_q \Delta\theta \\ &\equiv \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + N_q \Delta\theta = H_i^T \theta_i + H_q \Delta\theta_q \end{aligned} \quad (12)$$

처짐에 대한 식은 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-\xi \\ 1+\xi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + (1-\xi^2)\Delta w_q \\ &\quad + \frac{8}{3} \xi(1-\xi^2)\Delta w_c \end{aligned} \quad (13)$$

여기서  $\Delta w_q$ 는  $w_1$ 과  $w_2$ 사이의 변형  $w$ 의 상관관계이고,  $\Delta w_c$ 는  $w_1$ 과  $w_q$  또는  $w_q$ 와  $w_2$ 사이의 변형  $w$ 의 상관관계이다. 식(12)과 식(13)을 식(11)에 대입하면, 다음과 같다.

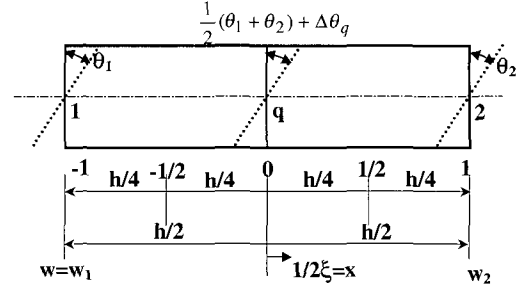


그림 2 보 요소

$$\gamma_x = A_1 + A_2 \xi + A_3 \xi^2 = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + (w_2 - w_1)/h + \Delta\theta_q + [16\Delta w_c/3h]$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - 4\Delta\theta_q/h$$

$$A_3 = -\Delta\theta_q - [16\Delta w_c/h] \quad (14)$$

결과적으로 식(14)가 성립하기 위해서는  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ 와 같이 되어야만 한다. 그러나 이러한 방법은 식(14)를 무용화시키게 된다. 따라서 요소 내 가상 변위  $\Delta w_c$ 의 값을 소거하기 위해  $A_1, A_2, A_3$ 에 대한 식들을 연립방정식으로 풀면, 다음과 같은 결과를 얻게된다.

$$\Delta\theta_q = -\frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2) - \frac{3}{2}(w_2 - w_1)/h \quad (15)$$

이를  $A_1$ 과  $A_3$ 에 대입하면,  $A_1 = -1/3A_3$ 의 관계를 가지고 있다는 것을 알 수 있다. 이를 식(14)에 대입하여 풀면, 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$A_1 - 3A_1 \xi^2 = 0 \quad (16)$$

따라서  $\xi = \pm\sqrt{1/3}$ 에서 0의 전단변형률을 얻게 된다.

#### 3.2 막 변형률

막변형률의 적분점의 위치를 찾기 위해서 Marguerre<sup>17)</sup>과 Huang<sup>18)</sup>은 그림 3과 같은 아치형 보 요소를 고려하였다. 이 요소에 순수 휨 모멘트가 양단에 작용하고 있다.

$$\epsilon_m = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (17)$$

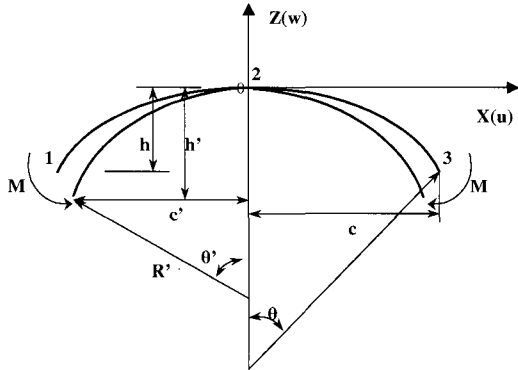


그림 3 아치형 보 요소의 변위

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i, \quad w = \sum_{i=1}^3 N_i w_i \quad (18)$$

$$w_o = \sum_{i=1}^3 N_i w_{oi}, \quad x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i \quad (19)$$

$$N_1 = \xi(\xi - 1)/2 \quad N_2 = 1 - \xi^2 \quad N_3 = \xi(\xi + 1)/2$$

그리고 그림 3에서 보는 것과 같이 아치형 보 요소의 변위는 다음과 같은 결과와 조건을 가지고 있다.

$$u_2 = w_2 = x_2 = 0, \quad u_1 = -u_3, \quad w_1 = w_3 \\ x_1 = -x_3, \quad x_3 = c, \quad w_{o2} = h \quad (20)$$

식(18)에 식(20)을 대입하고 식(17)을 고려하면 다음과 같은 식을 얻게된다.

$$\epsilon_m = \frac{u_3}{c} + \frac{4hw_3}{c^2} \xi^2 = 0 \quad (21)$$

$$\xi = \pm 1/2 \sqrt{u_3 c / hw_3} \quad (22)$$

여기서  $c/h$ 와  $u_3/w_3$ 는 다음과 같은 관계식으로 표현될 수 있다.

$$u_3 = c' - c = R' \sin \theta' - R \sin \theta \\ w_3 = h' - h = (R' - R' \cos \theta') - (R - R \cos \theta) \quad (23)$$

여기서  $\theta' = \theta + \Delta\theta$ 이고,  $R' \theta' = R\theta$ 이다. 그리고  $\Delta\theta$ 는 매우 작은 값을 가지므로  $\sin \Delta\theta = \Delta\theta$  이고  $\cos \Delta\theta = 1$  이 된다.

$$u_3/w_3 = (\sin \theta - \theta \cos \theta) / (\cos \theta + \theta \sin \theta - 1) \quad (24)$$

$$c/h = (\sin \theta) / (1 - \cos \theta) \quad (25)$$

식(24)와 식(25)를 식(22)에 대입하여 풀면 다음과 같은 답을 얻게 된다.

$$\xi = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin \theta (\sin \theta - \theta \cos \theta)}{(1 - \cos \theta) (\cos \theta + \theta \sin \theta - 1)}} \quad (26)$$

식(26)에 의해 나타난 결과는  $\theta$ 의 값이 감소함에 따라  $1/\sqrt{3}$ 으로 수렴하고 있다는 것을 보여준다. 따라서 막변형률의 적분이  $1/\sqrt{3}$ 에서 이루어질 때 막 구속이 제거됨을 알 수 있다.

#### 4. 가정된 변형률(Assumed strain)

본 연구에서는 막구속과 전단구속을 제거하기 위해 Huang과 Hinton<sup>(7)~(9)</sup>이 제시한 방법을 수정하여 사용하였다.

##### 4.1 가정된 전단 변형률

전단구속을 제거하기 위해서는 국부좌표계 내의 전단변형률이 0의 값을 가져야 한다.



$$\epsilon'_s = \begin{bmatrix} \gamma'_{x'z'} \\ \gamma'_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_{z'} + w'_{x'} \\ v'_{z'} + w'_{y'} \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

표 1에서 보여주고 있는 변환 Tensor를 사용하면, 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} \gamma'_{x'z'} \\ \gamma'_{y'z'} \end{bmatrix} = L^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_{\xi\xi} \\ \gamma_{\eta\xi} \end{bmatrix} \\ L = \begin{bmatrix} z'_{\xi} x'_{\xi} & z'_{\xi} y'_{\xi} \\ z'_{\xi} x'_{\eta} & z'_{\xi} y'_{\eta} \end{bmatrix} \quad (28)$$

결과적으로  $\gamma_{\xi\xi} = \gamma_{\eta\xi} = 0$ 이 될 때, 국부 좌표계의 전단 변형률이 0의 값을 가지게 된다는 것을 알 수 있다. 일반적으로 곡선 좌표계 내의 자유도에 대한 형상 함수는  $\xi$ 와  $\eta$ 의 2차 함수로 나타낼 수 있다. 그리고 곡선 좌표계 내의 변형률은 다음과 같다.

표 1 쉘 요소 변형률의 변환

strain			
Transformation into	local coordinate system		Natural coordinate system
	$\epsilon'_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} \frac{\partial x^j}{\partial x'^j} \epsilon_{ij}$		$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta} \epsilon_{ij}$
	$\epsilon'_m$	$\epsilon'_b$	$\epsilon_{\alpha\beta}$
	$\bar{\epsilon}_{mx'x'} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{mx'y'}$		$\bar{\gamma}_{\xi\xi}$
	$\bar{\epsilon}_{my'y'} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{mx'y'}$		$\bar{\gamma}_{\eta\xi}$
Transformation into local coordinate system			$\epsilon_{sij} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^j} \epsilon_{\alpha\beta}$

$$\gamma_{\xi\xi} = \theta_\xi + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (29)$$

식(29)을 바탕으로 가정된 전단 변형률  $\bar{\gamma}_{\xi\xi}$ 는 적어도  $\eta$ 에 대한 2차 함수를  $\bar{\gamma}_{\eta\xi}$ 는 적어도  $\xi$ 에 대한 2차 함수를 얻게 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 가정된 전단 변형률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\xi\xi} &= b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta + b_5\eta^2 + b_6\xi\eta^2 \\ \bar{\gamma}_{\eta\xi} &= c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta + c_5\xi^2 + b_6\xi^2\eta \end{aligned} \quad (30)$$

따라서 가정된 전단 변형률장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\xi\xi} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\eta) Q_j(\xi) \gamma_{\xi\xi}^{ij} \\ \bar{\gamma}_{\eta\xi} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) \gamma_{\eta\xi}^{ij} \end{aligned} \quad (31)$$

$$P_1(z) = \frac{z}{2b} \left( \frac{z}{b} + 1 \right), \quad P_2(z) = 1 - \left( \frac{z}{b} \right)^2,$$

$$P_3(z) = \frac{z}{2b} \left( \frac{z}{b} - 1 \right)$$

$$Q_1(z) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{a} \right), \quad Q_2(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z}{a} \right)$$

여기서 실제 곡선 좌표계 내의 전단 변형률과 가정된 전단 변형률의 관계가 다음과 같은 관계에 있다는 것을 명심해야 한다.

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\xi\xi} &= \gamma_{\xi\xi} & i=1, 2, 3 \\ \bar{\gamma}_{\eta\xi} &= \gamma_{\eta\xi} & j=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (32)$$

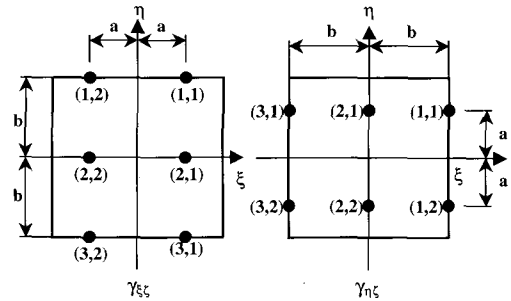


그림 4 쉘 요소의 Interpolation point

여기서  $i, j$ 는 그림 4에 나타난 점을 의미한다.

#### 4.2 가정된 막 변형률

국부 좌표계 내의 평면 내 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u' &= u'_0 + z' \theta_x \\ v' &= v'_0 + z' \theta_y \end{aligned} \quad (33)$$

여기서  $u'_0, v'_0$ 는 쉘의 중립면에서의 변위이다. 그리고 막 변형률은 다음과  $x'$ 와  $y'$ 의 함수로 이루어지게 된다.

$$\begin{aligned} u'_{0,x'} &= \epsilon_{mx'x'}(1, x', y', x'y', x'y'^2, y'^2) \\ v'_{0,x'} &= \epsilon_{my'y'}(1, x', y', x'y', x'y'^2, x'^2) \\ u'_{0,y'} + v'_{0,x'} &= \epsilon_{mx'y'}(1, x', y', x'y', x'^2, x'^2, x'y'^2, y'^2) \end{aligned} \quad (34)$$

결과적으로 국부 좌표계의 가정된 막 변형률은 가정

된 전단 변형률과 동일한 형태를 가지게 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 평면 내 변형률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{x'x'} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\eta) Q_j(\xi) \epsilon_{x'x'}^{ij} \\ \bar{\epsilon}_{y'y'} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) \epsilon_{y'y'}^{ij} \\ \bar{\epsilon}_{x'y'} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\eta) Q_j(\xi) \epsilon_{x'y'}^{ij} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) \epsilon_{x'y'}^{ij} \end{aligned} \quad (35)$$

여기서  $P_i(z), Q_j(z)$ 는 식(31)과 동일하다.

### 5. 수치해석

본 연구에서는 Zienkiewicz와 Huang에 의해 제안된 감질점 쉘 요소를 조합하여 쉘 구조 유한요소해석에 사용하였다. 표 2에 나타나 있는 것과 같이 유한요소는 2가지 종류로 해석이 이루어졌다. Type I는 가정된 전단 변형률과 감차적분법을 조합하여 기존의 감질점 쉘 요소를 개선한 요소이고, Type II는 Huang의 가정된 변형률을 막변형률과 전단 변형률에 적용된 요소이다.

#### 5.1 조각시험(Patch Test) 및 강성의 고유치 해석

##### 5.1.1 조각시험

조각 시험은 쉘 요소의 안정성을 검토하기 위해 널리 활용되어지는 방법이다. 본 연구에서는 MacNeal과 Harder<sup>19)</sup>가 제시한 방법에 따라 수행하였다. 그림 5는 조각 시험을 위한 모델이다.

MacNeal과 Harder의 조각 시험 방법은 표 3에서 주어진 일정한 막변형률과 휨 곡률에 상응하는 경계조건을 바탕으로 해석된 쉘 요소의 응력과 변형률이 이론적으로 해석된 응력과 변형률에 어느 정도 수렴하는지 여

표 2 수치적분방법

element	In-plane strain		Transverse strain
	Membrane	bending	
type I	2×2	3×3	2×3/3×2
type II	2×3/3×2	3×3	2×3/3×2

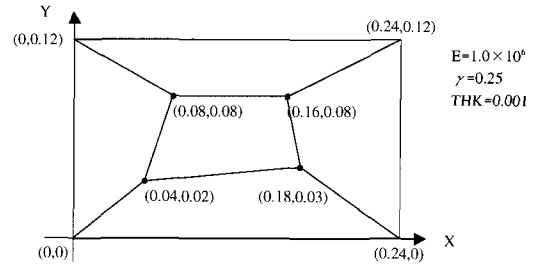


그림 5 조각시험 모델

표 3 조각시험을 위한 경계조건과 응력

(a) Membrane Patch Test
- Boundary Condition
$u = (x + y/2) \times 10^{-3}, \quad v = (y + x/2) \times 10^{-3}$
- Theoretical Solution
$\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma = 10^{-3}, \quad \sigma_x = \sigma_y = 1333, \quad \tau_{xy} = 400$
(b) Bending Patch Test
- Boundary Condition
$\omega = (x^2 + xy + y^2)/2 \times 10^{-3}$
$\theta_x = \partial w / \partial y = (y + x/2) \times 10^{-3}$
$\theta_y = -\partial w / \partial x = (-x - y/2) \times 10^{-3}$
- Theoretical Solution
$\sigma_x = \sigma_y = \pm 0.667, \quad \tau_{xy} = \pm 0.20$

부를 평가하는 방법이다.

본 연구에서 제안한 쉘 요소 Type I의 조각 시험결과, 일정한 막변형률과 일정한 휨 곡률을 가지는 것으로 나타났다. 또한 응력과 변형률의 수렴률은 97%에서 102% 사이에 있는 것으로 나타났다.

##### 5.1.2 요소강성행렬의 고유치해석

본 연구에서 제안한 쉘 요소 Type I의 경우 강성행렬의 고유치 해석결과 강체운동(Rigid Body Motion)에 관련된 5개의 영고유치값이 발생하였다.

### 5.2 해석 예제

수치적인 예제 해석을 통하여 본 연구에서 개발된 요소의 성능을 평가하기로 한다. 비교를 위해 홍<sup>20)</sup>에 의해 개발된 spline 유한 대판요소(RSDS-6)와 감차적분법을 적용한 9절점 요소(QSR)를 사용하였다.

#### 5.2.1 Cook의 평면응력 문제

Cook은 평면요소의 면내 거동을 평가하기 위해

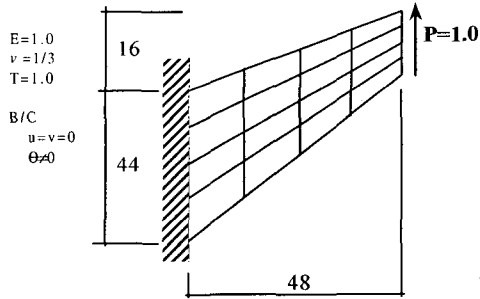


그림 6 Cook의 평면 문제

표 4 캔틸레버 단부 중앙의 수직 처짐(Cook의 문제)

Mesh	Allman	Simo	RSDS-6	Type I	Type II
2×2	20.27	21.12	22.24	23.581	23.118
4×4	22.78	23.02	22.51	23.671	23.43

그림 6과 같은 사다리꼴의 평면 응력을 제안하였다. 캔틸레버 단부에는 등분포 하중을 가하여 단부 중앙의 수직 처짐의 수렴성을 검토하였다. 이 모델에 대한 해는 Began과 Fella의 해석값인 23.91을 사용한다. 결과는 표 4에 나타냈으며, 제안된 요소들의 참고값에 대한 수렴성이 매우 높다는 것을 알 수 있었다.

### 5.2.2 집중하중을 받는 원통형 쉘

그림 7은 고전적인 쉘 이론에 의한 유한 요소 모델을 사용한 많은 초기 연구자들에 의해 원통형 쉘(Cylindrical Shell)에 대한 해석이 수행되었으며, 변형구속의 영향을 검토하기 위해 두꺼운 쉘의 경우와 얇은 쉘의 경우로 나누어 해석하였다. 또한 해석 모델이 대칭이므로 1/4만 해석하였다.

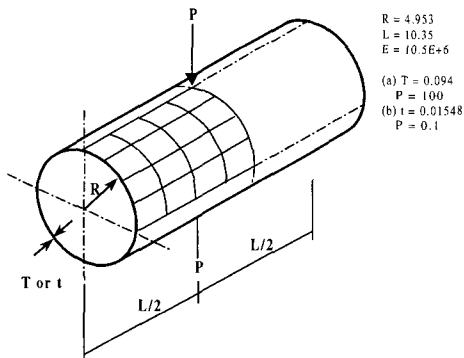
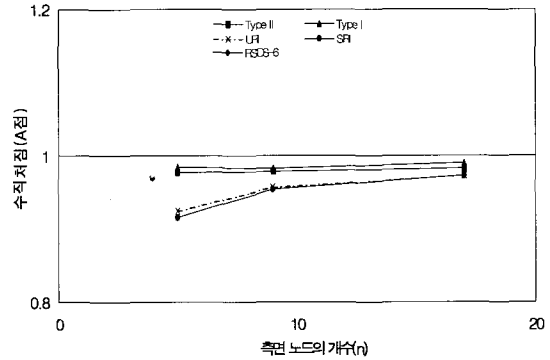
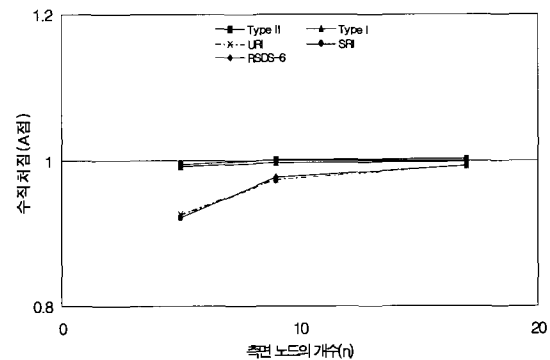


그림 7 양단이 자유 단인 원통형 쉘

이 모델에 대한 참고값은 하중 작용점의 수직 처짐이 두꺼운 쉘의 경우 0.1139를, 얇은 쉘의 경우 0.02511을 사용하였다. 해석결과는 그림 8과 표 5, 표 6에 나타냈으며, 수렴성이 높은 것으로 나타났다.



(a) T=0.01548 일 경우



(b) T=0.094 일 경우

그림 8 원통형 쉘의 수직 처짐(하중작용점)의 수렴도

표 5 원통형 쉘의 수직 처짐 비교(t=0.094)

Mesh	실제변위	RSDS-6	Type I	Type II
t=0.094	2×2	0.10500	0.11300	0.11318
	4×4	0.1139	0.11130	0.11361
	8×8	0.11310	0.11371	0.11422

표 6 원통형 쉘의 수직 처짐 비교(t=0.01548)

Mesh	실제변위	RSDS-6	Type I	Type II
t=0.01548	2×2	0.02299	0.02471	0.02455
	4×4	0.02511	0.02398	0.02469
	8×8	0.02444	0.02485	0.02469



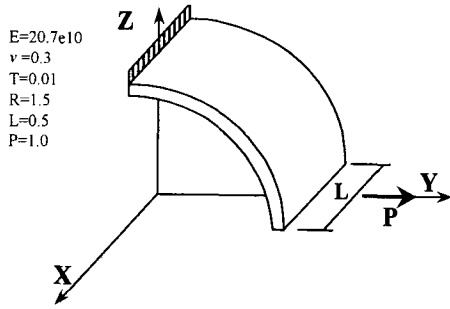


그림 9 굽은 캔틸레버 보

표 7 굽은 캔틸레버 보의 유한요소해석 결과

셀 요소	Mesh	Y축 변위	Z축 변위	BETA-rot
QSR	4	2.7493e-04	1.6993e-04	2.2959e-04
	5	2.7510e-04	1.7019e-04	2.2967e-04
Type I	4	3.0547e-04	1.9339e-04	2.5919e-04
	5	3.0570e-04	1.9356e-04	2.5937e-04
Type II	4	2.9162e-04	1.8530e-04	2.4692e-04
	5	2.9181e-04	1.8543e-04	2.4705e-04
실제 변위		3.07e-04	1.95e-04	2.61e-04

### 5.2.3 굽은 캔틸레버 보

그림 9은 셀 요소를 평가하기 위해 제시된 모델 중에 하나이다. 그림에서 보는 것과 같이 90° 굽은 캔틸레버 보의 경우 요소를 4, 5개를 사용하여 해석하였다. 하중은 캔틸레버 보의 끝단에 y방향으로 1을 가하여 y축, z축, 그리고 회전각(BETA-Rot)에 대하여 참고값과 비교하였다. 표 7은 해석의 결과를 나타낸 것이다.

### 5.2.4 반구형 셀

그림 10는 각 1/4점에 4개의 방사 방향 하중이 반대 방향으로 셀 표면에 수직으로 작용하는 반구형 셀 (Pinched Hemispherical Shell)에 대한 모델이다. 이 모델은 이중 대칭이므로 셀의 1/4만 해석할 수 있다. 이 모델의 이론적인 해는 존재하지 않지만 MacNeal과 Harder는 하중을 받는 방사방향의 변위로 0.094를, Simo는 0.093을 각각 제시하고 있다. 본 연구에서는 위에서 제시하고 있는 값을 참고값으로 사용하여 요소의 수렴정도를 알아보려고 한다.

### 5.2.5 비틀린 캔틸레버 보

그림 12는 비틀린 캔틸레버 보는 MacNeal과 Harder에 의해 제안된 문제이다. 실제 개발된 셀 요소가 찌그

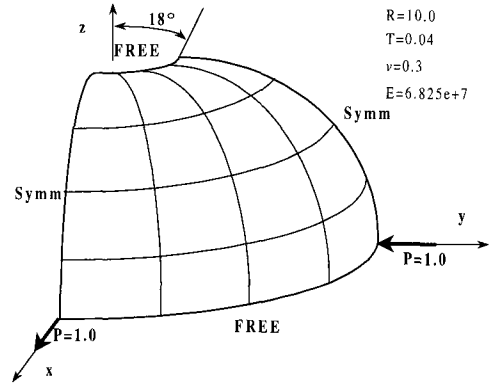


그림 10 반구형 셀

표 8 반구형 셀의 변위

	Taylor	Simo	RSDS-6	Type I	Type II
4×4	0.08652	0.09337	0.08901	0.10608	0.04911
8×8	0.09415	0.09281	0.09220	0.10150	0.09326
비교(%) / 100	1.00164	0.98734	0.98085	1.07980	0.99215

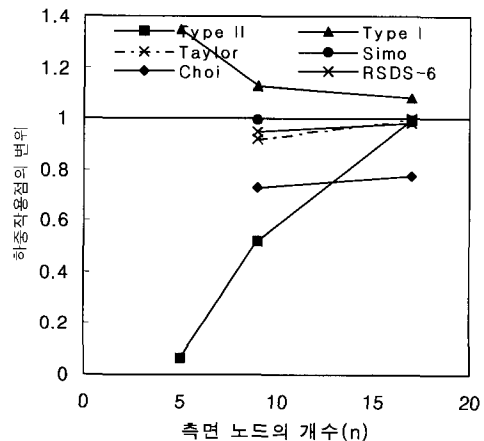


그림 11 반구형 셀의 변위 수렴도

러짐(Warping)의 영향을 고려할 수 있는가를 검토하기 위한 것이다. 또한 Belytschko와 Wong<sup>21)</sup>에 의해 체계적으로 적립되었다. 가정된 변형률을 사용한 셀 요소의 경우, 두께 방향(ξ방향)의 Jacobian의 변화가 일정한 것으로 간주되어진다. 그러나 Belytschko와 Wong는 Jacobian이 일정한 값을 가질 경우, 요소체내의 자체 변형률의 발생시켜 그림 12와 같이 비틀어진 보의 해석의 오류가 발생한다는 것을 지적하였다. 따라서 이를 검토하기 위해 면내 하중과 면 외 하중을

보에 작용하여 수렴성을 검토하였다. 면내 하중이 작용할 경우, 변위 0.005424와, 면 외 하중이 작용할 경우, 변위 0.001754를 각각 참고값으로 사용하였다.

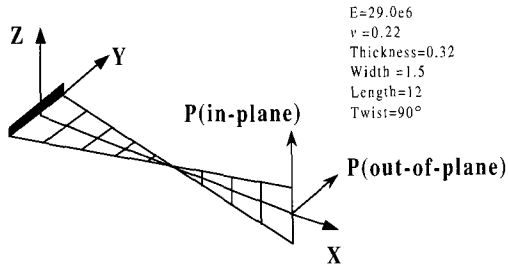


그림 12 비틀린 캔틸레버 보

표 9 비틀린 캔틸레버 보의 변위 결과(t=0.32일 경우)

하중과 변위의 방향		In-Plane	Out-Of-Plane
Nodes/side		3×13	
Formulation	Element		
Degenerated shell	4-node URI	1.009	1.076
	9-node URI	1.002	0.998
	4-node SRI	0.995	0.924
	9-node SRI	0.986	0.992
Resultant stress degenerated shell	4-node URI	1.436	1.377
	9-node URI	1.413	1.359
Present shell	type I	1.001	1.002
	type II	0.966	0.965
Beam Theory F=1		$0.5424 \times 10^{-2}$	$0.1.754 \times 10^{-2}$

표 10 비틀린 캔틸레버 보의 변위 결과(t=0.0032일 경우)

하중과 변위의 방향		In-Plane	Out-Of-Plane
Nodes/side		3×13	
Formulation	Element		
Degenerated shell	4-node URI	1.013	0.990
	9-node URI	1.013	1.002
	4-node SRI	0.983	0.978
	9-node SRI	0.017	0.029
Resultant stress degenerated shell	4-node URI	1.393	1.704
	9-node URI	1.392	1.719
Present shell	type I	1.006	1.004
	type II	-	-
Beam Theory $F=1 \times 10^{-2}$		$0.5256 \times 10^{-2}$	$0.1294 \times 10^{-2}$

## 6. 결 론

본 연구에서는 감절점 쉘 요소 해석 시 발생하는 전단 구속과 막 구속 현상을 제거하기 위해 두 가지 형태의 요소들을 사용하였다. 첫 번째 요소는 감차적분법을 통해 막 구속 현상을 제거하고, 전단 구속 현상을 제거하기 위해 가정된 전단 변형률을 혼합 사용하였다. 나머지 다른 요소는 쉘의 막 구속, 전단 구속 현상을 제거하기 위해 막 변형률과 전단 변형률에 가정된 변형률을 사용하였다.

본 연구에서 수행된 수치해석 결과는 다음과 같은 결과를 얻었다.

첫째로, 일반적인 쉘 요소에 가정된 전단 변형률 (Type I)을 사용한 요소의 경우 전단 구속 현상이 제거된 것으로 나타났다. 또한 가정된 막 변형률과 가정된 전단 변형률 (Type II) 사용된 요소에서도 막과 전단 구속이 발생하지 않은 것으로 나타났다. 그러나, 비틀린 캔틸레버 보에서 막 구속현상에 따른 과대강성으로 인해 참고값과 매우 큰 차이를 가지고 있는 것으로 나타났다. 둘째로 본 연구에서 제안한 Type I 요소가 매우 높은 수렴성을 가지고 있었다.

## 참 고 문 헌

1. S. Ahmad, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz, "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 1972, pp.419~451
2. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too, "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, 1973, pp.275~290
3. K. C. Park and D. L. Flagg, "A Fourier Analysis of Spurious Mechanics and Locking in Finite Element Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 46, 1984b, pp.65~81
4. T. J. R. Hughes, M. Cohen and M. Haroun, "Reduced and Selective Integration Techniques in The Finite Element Analysis in Plates",

- Nuclear Engineering and Design*, Vol. 46, 1978, pp.203~222
5. E. L. Wilson, R. L. Taylor, W. P. Doherty, and J. Ghaboussi, "Incompatible Displacement Models, In Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics", S.T. Fenves et al.(Eds), Academic Press, 1973
  6. E. N. Dvorkin and K. J. Bathe, "A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis", *Engineering Computation*, Vol. 1, 1984, pp.77~88
  7. H. C. Huang and E. Hinton, "A Nine Node Lagrangian Mindlin Plate Element with Enhanced Shear Interpolation", *Engineering Computations* Vol. 1, 1984, pp.369~379
  8. H. C. Huang, *Defect-free shell elements*, Ph.D. Thesis, University College of Swansea, 1986
  9. H. C. Huang, *Theory of Degenerated Curved Shell and Locking in Shell Finite Elements*, Proc. NUMETA87, University College of Swansea, 1987
  10. J. Jang & P. M. Pinsky, "An Assumed Covariant Strain Based 9-Node Shell Element", *International journal for numerical methods in Engineering.*, Vol. 24, 1987, pp.2389~2411
  11. K. C. Park and G. M. Stanley, "A Curved C<sup>0</sup> Shell Element Based on Assumed Natural-coordinate Strain" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 53, 1986, pp.278~290
  12. K. C. Park and D. L. Flagg, "A Fourier Analysis of Spurious Mechanics and Locking in The Finite Element Methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 46, 1984, pp.65~81
  13. K. C. Park and D. L. Flagg, "A Symbolic Fourier Synthesis of A One-Point Integrated Quadrilateral Plate Element", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 48, 1985, pp.203~236
  14. 최창근 & 유승운, "셸 구조 해석을 위한 개선된 Degenerated 셸 유한요소", *전산구조공학*, 제3권 제1호, 1990, pp.97~107
  15. 최창근 & 유승운, "개선된 degenerated 셸 유한 요소의 비선형 해석", *전산구조공학*, 제3권, 1990, pp.113~123
  16. M. A. Crisfield, "A Four-Noded Thin-Plate Bending Element Using Shear Constraints : A Modified Version of Lyons' Element", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 38, 1983, pp.93~120
  17. K. Marguerre, "Zur Theorie der Gekrummten Platte Grosser Formanderung", *In Proc. Inter. Congress Appl. Mech*, 5, 1939, pp.95~101
  18. H. C. huang, "Membrane Locking and Assumed Strain Shell Elements", *Computer & Structures* Vol. 27, 1987, pp.671~677
  19. R. H. MacNeal and R. L. Harder, "A Proposed Standard Set of Problem to Test Finite Element Accuracy", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, 1985, pp.3~20
  20. 최창근, 홍현석, "면내회전을 갖는 SPLINE 유한 대판 요소에 의한 셸의 해석", *한국전산구조공학회*, 제12권, 1999, pp.185~199
  21. T. Belytschko and B. L. Wong, "Assumed Strain Stabilization Procedure for The 9-Node Lagrange Shell Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp.385~414
- (접수일자 : 2000. 6. 28)