

Element-free Galerkin 방법을 이용한 적응적 균열진전해석

Adaptive Crack Propagation Analysis with the Element-free Galerkin Method

최 창 근* 이 계 희** 정 흥 진***
Choi, Chang-Koon Lee, Gye-Hee Chung, Heung-Jin

요 지

본 논문에서는 element-free Galerkin(EFG) 방법에 기반한 적응적 정적균열진전해석기법을 제시하였다. 균열진전 매 단계마다 적응적해석을 수행함으로써 전체 해석의 일관성과 정밀성을 동시에 확보할 수 있었다. 균열진전과정에 있어서의 적응적해석은 산정된 오차지표에 따라 적분을 위한 격자구조에 따라 절점을 추가하고 소거하는 과정을 통해 구현되었다. 이 때 사용된 오차지표는 원 EFG해석결과 얻어진 응력과 절점응력을 다시 투영한 응력의 차에 의해 얻어졌다. 제안된 해석기법의 타당성과 효용성을 수치예제에 의해 검증하였다. 그 결과 제안된 해석기법이 균열진전해석시 효율적으로 적용될 수 있음을 보였다.

핵심용어 : EFG 방법, 적응적 균열진전, 투영응력, 적분격자, 세분화-재결합

Abstract

In this paper, the adaptive crack propagation analysis based on the estimated local and global error in the element-free Galerkin (EFG) method is presented. It is possible to keep consistency and accuracy of analysis in each propagation step by adaptive analysis. The adaptivity analysis in crack propagation is achieved by adding and removing the node along the background integration cell that are refined or recovered as estimated error. These errors are obtained by calculating the difference between the values of the projected stresses and original EFG stresses. To evaluate the performance of proposed adaptive procedure, the convergence behavior is investigated for several examples. The results of these examples show the efficiency of proposed scheme in crack propagation analysis.

Keywords : EFG method, adaptive crack propagation, projected stress, integration cell, refinement-recovery

1. 서 론

최근 무요소법(meshless method)의 적용분야는 고체해석분야로부터 유체해석분야까지 폭 넓게 확대되고 있다.^{1)~3)} 무요소법에서는 절점이 모델의 임의의

지점에 자유롭게 위치할 수 있다. 따라서 절점의 추가나 소거에 의한 절점수의 변동이나, 절점의 위치 변화를 고려하는 새로운 모델의 작성이 손쉬우므로 이의 특성을 활용한 해석에 쉽게 적용될 수 있다. 이러한 특성은 특히 적응적 해석에 적합하므로 무요소법의 한 종류

* 정회원 · 한국과학기술원 토목공학과, 석좌교수
** 한국과학기술원 토목공학과, 박사과정
*** 정회원 · 전주대학교 토목환경공학과, 조교수

· 이 논문에 대한 토론을 2001년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2001년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

는 그 이름을 적응적 해석의 종류를 나타내는 접두사 'hp'를 사용하기도 하였다.⁴⁾

이러한 무요소법의 적응적 해석의 적용에 있어서 신뢰성있는 오차의 산정과 효율적인 절점의 배치는 가장 중요한 과정이며 개발된 해석법의 효율을 좌우하는 중요한 요소이다. 따라서 이에 대한 연구는 여러 연구자들에 의해 비중있게 추진되었으며 그 결과 많은 진전을 이룰 수 있었다. 그 중 Duarte와 Oden은 그들이 개발한 hp-cloud방법을 이용해 내부 영역과 Neumann 경계조건에서의 잔차를 계산하고 이를 이용한 오차평가를 수행하였고⁴⁾ Liu 등은 Reproducing Kernel Particle Methods (RKPM)에서 wavelet 분해를 통한 고응력 경사부분 및 경계 탐색 알고리즘을 개발하고 이를 오차지시자로 이용하여 오차분포를 산정하였다.⁶⁾ 또한 Hausser-Combe 등은 변형율의 경사(stain gradient)와 절점간의 거리를 이용해 EFG 방법에 적용 가능한 적응적 해석법을 제시하였다.⁷⁾

한편 앞에서 언급된 무요소법의 특징들은 균열의 해석에도 적합한 특징이 된다. 따라서 개발초기 무요소법의 실용적인 적용예제는 주로 균열의 해석에 집중되어 있었다. 그러나 무요소법의 또 하나의 장점인 적응적해석에 관한 연구결과는 균열의 진전해석에 쉽게 적용되지 못했다. 이는 균열 진전해석의 전체과정을 통해 해석의 정확도와 효율성을 동시에 만족시키는 것이 쉽지 않았기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 무요소법의 특성을 잘 반영하고 있는 적응적 해석법과 균열진전해석의 조합을 통하여 적응적 균열진전에 관한 해석기법을 제시하였다. 이 해석기법에서는 원 EFG의 응력과 절점응력을 투영하여 얻은 투영응력과 차를 오차지시자로 하고, 그 결과 얻어지는 오차의 분포에 따라 적분격자(integration cell)에 절점을 추가 소거하는 방법으로 적응적 해석을 수행하였다.

본 논문의 구성은 2장에서 선형탄성체에 대한 EFG 방법의 기본적인 방정식과 해석후 오차평가에 대한 기본 개념과 방정식이 제시되었다. 3장에서는 본 연구에서 사용된 균열진전과 관련된 기본적인 파괴역학에 대한 설명 및 산정기법이 소개되었다. 4장에서는 본 논문에서 제시된 방법의 효율성을 평가하기 위하여 수치예제에 대한 해석과 분석이 수행되었고 5장에서는 연구결과에 대한 결론이 제시되었다.

2. EFG 방법에 의한 근사 및 해석후 오차(posteriori error)평가

2.1 EFG 방법에 의한 근사

이동최소자승법(moving least square method)에 의하면 함수 $u(\mathbf{x})$ 의 국부적인 근사함수 $u_L^h(\mathbf{x})$ 는 다음 식과 같이 다항식기저 벡터 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 와 계수 벡터 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 의 내적으로 나타낼 수 있다.^{1),8)}

$$u_L^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

여기서

$$\mathbf{x} \in \Omega_x, \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^m$$

위 식에서 m 은 다항식 기저벡터의 항수이다. 이동최소자승법에서는 국부 근사와 절점값의 차를 최소화 시킴으로써 계수벡터 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 의 값을 산정할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{a}(\mathbf{x})] &= \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}, a) [u_i - u_L^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}, a) [u_i - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x})]^2 \end{aligned} \quad \mathbf{x}_i \in \Omega_x \quad (2)$$

위식에서 n 은 영역 Ω_x 안의 절점수이며 $w_i(\mathbf{x}, a) = w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, a\|)$ 는 반경 a 안에 포함되는 국소영역 Ω_i 에서 정의되는 양의 가중함수이다. 이러한 국소영역은 가중함수의 영향영역(influence domain)과 동일하다. 본 연구에서는 다음과 같은 지수형 가중함수를 사용하였다.

$$w_i(\mathbf{x}, a) = \begin{cases} \frac{e^{-(d_i/c)^2} - e^{-(a/c)^2}}{(1 - e^{-(a/c)^2})} & \text{if } d_i \leq a \\ 0 & \text{if } d_i > a \end{cases} \quad (3a)$$

여기서 c 는 상대적인 가중치를 조정하는 상수이고 영향영역의 반지름은 $d_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ 로 정의된다. 각 절점에 대한 영향반경은 기본적으로 인접 절점간의 거리를 기준을 다음식과 같이 나타낸다.

$$a = D_m h \quad (3b)$$

여기서 h 절점간 최소거리이다.

$\mathbf{E}(\mathbf{a})$ 의 최소값을 산정하여 다음과 같은 \mathbf{a} 벡터를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}, a)\mathbf{B}(\mathbf{x}, a)\mathbf{u} \quad (4a)$$

여기서

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, a) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)w_I(\mathbf{x}, a)\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \quad (4b)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, a) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)w_I(\mathbf{x}, a) \quad (4c)$$

전체 영역에 있어서의 근사와 국부근사를 같다고 놓으면

$$u^h(\mathbf{x}) = u_L^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \quad (5)$$

식(1)에 위에서 얻어진 식(4)을 대입하면 다음과 같은 함수 $u(\mathbf{x})$ 의 근사함수를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u^h(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ &= \sum_I^n \sum_J^m p_J(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{JI} u_I \\ &\equiv \sum_I^n \phi_I(\mathbf{x})u_I \end{aligned} \quad (6)$$

2.2 오차의 기준과 평가

유한요소법에서 얻어진 응력이나 결과의 미분값은 요소간의 연속성을 만족시키지 못하기 때문에 절점이나 경계점에서 부정확한 값을 준다는 사실은 널리 알려져 있다. 따라서 많은 연구자들은 보다 정확한 오차분포를 얻기 위하여 형상함수나 절점의 계수를 평활화하거나 연속화하는 다양한 방법을 제시하였다. 그러므로 유한요소법에서의 해석후 오차는 이러한 방법들에서 얻어진 평활화 응력과 유한요소의 해석에서 얻어진 응력을 비교하여 산정한다. 그러나 EFG 방법에서는 요소의 개념이 없기 때문에 요소간 응력의 불연속이 발생하지 않고 응력장이 이미 연속적이기 때문에 연속화를 통해 응력분포의 개선을 얻을 수 없다. 따라서 유한요소에서 사용되는 여러 가지 응력 평활화 기법은 EFG의 응력분포 개선에는 이용할 수 없으며 따라서 평활화된 응력과의 차이로 정의되는 오차평가도 수행될 수 없다. 따라서 EFG에서는 유한요소법과는 다른 응력분포

개선 방법이 제시되어야 하는 데 그 중에 하나가 Chung 등이 제안한 응력 투영법이다.⁹⁾ 이 방법에서 개선된 응력분포는 절점에서의 응력값을 EFG계산시와 다른 영향반경을 갖는 형상함수로 투영해 얻는다. 따라서 얻어지는 오차분포는 투영응력과 EFG해석에서 얻어진 응력의 차로 나타난다. 이 응력 투영법의 기본 개념은 다음과 같은 선형탄성체의 지배방정식을 통해 구현될 수 있다.

$$\mathbf{L}u \equiv \mathbf{S}^T \mathbf{D}\mathbf{S}u = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

여기서 \mathbf{D} 는 탄성 계수 행렬이고 \mathbf{S} 는 변형률을 정의하기 위한 미분연산자이다. 따라서 변형률은 다음과 같이 나타난다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{S}u^h(\mathbf{x}) \quad (8)$$

EFG방법에 의해 직접 계산된 응력은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \sum_I^n \mathbf{S}\phi_I(\mathbf{x})u_I \quad (9)$$

여기에서 n 은 영향영역 Ω_x^a 내의 절점수이다. 영역에 속하는 임의의 지점 $\mathbf{x} \in \Omega$ 에서 어떤 함수 $u(\mathbf{x})$ 의 미분은 계수벡터 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 을 상수로 가정하면 다음과 같이 구할 수 있다.⁸⁾

$$u_j^h \approx \mathbf{p}_j(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

보다 정확한 결과를 위해서는 계수 벡터 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 상수로 가정해서는 안된다. Belytschko등은 계수벡터 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 의 미분항을 고려하지 않으면 해의 정확도를 감소시키고 조각시험(patch test)을 통과하지 못한다는 것을 보였다.¹⁾ 따라서 그들이 제안한 정확한 u_j^h 의 값은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} u_j^h &= \sum_I^n \phi_{I,j}(\mathbf{x})u_I = \sum_I^n \sum_J^m \left\{ p_{J,j}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{JI} \right. \\ &\quad \left. + p_J(\mathbf{A}_j^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_j)_{JI} \right\} u_I \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 썸표는 미분을 나타낸다.

무요소법에서 형상함수 미분의 진동수 성분은 원래의 형상함수보다 높다. 이러한 이유로 균열선단 같은 고응력영역에서 보다 정확한 결과를 얻을 수 있다. 그러나 이러한 고주파수성분은 고응력영역이나 응력불연속 영역에서 응력의 가상진동을 일으킨다. 따라서 이러한 응력의 가상진동성분을 제거한다면 오차산정의 기준값으로 사용할 수 있다.

투영응력법에 의한 오차 산정의 핵심은 투영된 응력 σ^p 와 원래의 EFG응력 σ^h 의 차를 오차지시자로 사용하는 것이다. 이 때 투영응력은 절점응력을 원 EFG계산기와 다른 영향반경을 갖는 형상함수로 다시 투영하여 얻어진다. 이를 식을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma^p(\mathbf{x}) &= \sum_K^l \left\{ \psi_K(\mathbf{x}) \mathbf{D} \sum_I^n S \phi_I(\mathbf{x}_K) \mathbf{u}_I \right\} \\ &= \sum_K^l \psi_K(\mathbf{x}) \mathcal{D}^h(\mathbf{x}_K) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $\sigma^h(\mathbf{x}_K)$ 절점 K 에서의 응력이고, l 은 투영시 사용하는 형상함수의 영향영역 Ω_x^l 내의 절점수이고 $\psi_K(\mathbf{x})$ 는 EFG해석시 사용했던 형상함수와 다른 영향영역을 갖는 EFG 형상함수이다. 따라서 EFG계산시와 투영시에 사용되는 두 개의 형상함수는 다음과 같다.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) \left(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}, a_1) \mathbf{B}(\mathbf{x}, a_1) \right)_{jI} \quad (13)$$

$$\psi_K(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) \left(\mathbf{A}_p^{-1}(\mathbf{x}, a_2) \mathbf{B}_p(\mathbf{x}, a_2) \right)_{jK} \quad (14)$$

여기서 $a_1 \neq a_2$ 이다. $\left(\mathbf{A}_p^{-1}(\mathbf{x}, a_2) \mathbf{B}_p(\mathbf{x}, a_2) \right)_{jK}$ 를 계산하기 위한 과정은 식(1)~(6)에 서술되어 있다. 투영응력은 단순히 계산된 절점에서 응력에 다른 영향영역 Ω_x^l 을 갖는 형상함수로 보간하여 얻어진다. 따라서 이 방법은 대부분의 오차평가에 수반되는 행렬의 연산 과정이 없고 단순히 형상함수의 보간만으로 수행되므로 간단하고 효율성이 높다. 이와 같이 얻어진 투영응력을 정확해라 가정하면 임의점 x 에서의 오차 σ^e 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\sigma^e(\mathbf{x}) = \sigma^p(\mathbf{x}) - \sigma^h(\mathbf{x}) \quad (15)$$

이 오차는 적응적해석의 지시자로 사용된다.

일반적으로 적응적 해석과정에서는 국부적인 세분화를 위한 지표와 전체적인 해석의 정확도를 나타내는 지표를 필요로 한다. 따라서 국부적인 세분화 지표를 산정하기 위해서는 보간오차를 임의의 국부적인 지역에서 평가해야 하고 동시에 해석이 원하는 정도의 정확도에 도달했는지를 검사하기 위해 전체 영역에 걸쳐 보간오차를 평가해야 한다.

따라서 식(15)에서 산정된 절점에서의 오차는 적절한 형태의 오차 놈(norm)으로 다시 계산해야 한다. 본 연구에서는 국부적인 오차를 평가하기 위해서는 각 적분 격자 단위로 오차의 에너지놈(energy norm)을 계산하고 전체영역의 오차 평가를 위해서는 각 적분 격자에서 얻어진 오차의 에너지놈을 합산하였다. 이를 구하기 위하여 적분점 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_g$ 에서 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$\|e(\mathbf{x}_g)\| = \left\{ \frac{1}{2} \sigma^{eT}(\mathbf{x}_g) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}_g) \right\}^{1/2} \quad (16)$$

여기서 아래첨자 g 는 Gauss적분점을 나타낸다. 전체영역 Ω 에서의 보간오차의 에너지 놈과 각 적분격자 Ω_i 에서의 국부적인 보간오차의 에너지 놈은 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$\|E\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (17)$$

$$\|E_i\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (18)$$

위의 식들은 전체 및 국부 오차 평가자로 알려져 있다. 임의의 적분격자 i 에서의 세분화 지표가 되는 국부 오차 지시자(local error indicator)는 다음과 같이 계산한다.

$$\eta_i = \left\{ \frac{\|E_i\|^2}{\|U\|^2 / N_{cell}} \right\}^{1/2} \quad (19)$$

여기서

$$\|U\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T(x) D^{-1} \sigma(x) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (20)$$

전체 영역에서의 해의 정확도는 다음과 같은 상대오차의 향으로 평가될 수 있다. 상대오차(relative error)의 에너지 norm은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R = \frac{\|E\|}{\|U\|} \quad (21)$$

만일 식(21)이 미리 정의된 값보다 작아지면 적응적 해석과정은 종료된다.

3. 균열의 진전방향과 응력강도계수(stress intensity factor)의 산정

3.1 균열 진전방향

균열진전에 대한 해석을 수행하기 위해서는 균열의 진전 방향을 산정해야 한다. 균열의 진전방향을 예측하는데 가장 널리 사용되는 법칙은 1) 최대 주응력법¹⁰⁾ 2) 최대 에너지 방출율법¹¹⁾, 3) 최소 변형에너지 밀도법¹²⁾ 등이 있다. 앞의 두 가지 방법은 Nusimer에 의해 탄성정적문제에서는 동일하다는 것이 증명되었다.¹¹⁾ 본 논문에서는 최대 주응력 기준을 사용해 균열의 성장 방향을 예측하였다.

최대 주응력법에서는 최대 원주방향응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 에 수직인 방향으로 균열이 발생한다고 가정한다. 일반적인 혼합모드의 균열에 대해서 균열선단의 응력은 다음 식과 같이 정의된다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} k_1 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + k_2 \left(\frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ k_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} k_2 \sin \theta \\ \frac{1}{2} k_1 \sin \theta + \frac{1}{2} k_2 (3 \cos \theta - 1) \end{Bmatrix} \quad (22)$$

여기서 k_1, k_2 는 각각 모드 1, 모드 2의 응력강도

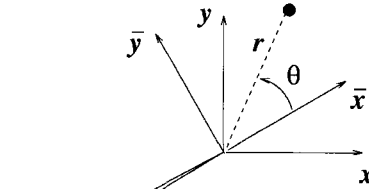


그림 1 균열선단에서의 좌표계

계수이고 다른 변수는 그림 1에서 보는 바와 같다.

이 때 최대 원주방향응력 방향은 전단응력이 소거되는 방향이다.

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2} k_1 \sin \theta + \frac{1}{2} k_2 (3 \cos \theta - 1) \right] = 0 \quad (23)$$

위 식의 해중 $\cos \theta / 2 = 0$ 의 해인 $\theta = \pm 180^\circ$ 는 물리적으로 적절하지 않으므로 무시한다. 따라서 실제로 균열이 진전하는 방향은 다음 식의 값을 0으로 만드는 방향이다.

$$k_1 \sin \theta_m + k_2 (3 \cos \theta_m - 1) = 0 \quad (24)$$

따라서 위 식에서 얻어진 각 θ_m 이 균열의 진전방향을 나타낸다

$$\theta_m = \arctan \frac{1}{4} \left(\frac{k_1}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 + 8} \right) \quad (25)$$

위에서 얻어진 균열진전방향에 대하여 $\sigma_{\theta\theta}$ 은 균열선단의 주응력이다. 따라서 $\sigma_{\theta\theta}$ 을 이용해 다음과 같은 균열선단의 등가 모드 1 응력강도계수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta_m}{2} \left[k_1 \cos^2 \frac{\theta_m}{2} - \frac{3}{2} k_2 \sin \theta_m \right] \\ &= \frac{k_{1eq}}{\sqrt{2\pi r}} \end{aligned} \quad (26)$$

여기서

$$k_{1eq} = k_1 \cos^3 \frac{\theta_m}{2} - 3k_2 \cos^2 \frac{\theta_m}{2} \sin \frac{\theta_m}{2} \quad (27)$$

이 등가 모드 1 응력강도계수 k_{1eq} 를 사용하므로서 혼합 모드의 응력장을 간단히 기술할 수 있고 혼합모드의 외부 하중에 대하여 균열의 증가율을 계산할 수 있다.

3.2 균열 계수의 계산

여러 가지 하중과 모델의 형상에 대한 균열선단의 응력강도계수의 산정법에 대해서는 많은 연구가 진행되어 왔다. 유한요소법이나 경계요소법 같은 해석법을 이용하여 균열선단의 응력장을 계산하는 여러 가지 수치적인 방법들이 개발되어 왔다.¹³⁾ (변위 및 응력의 외삽법, 변위와 응력의 연관을 이용하는 법, 보강 요소의 사용, J 적분 등) 본 연구에서는 높은 안정성으로 혼합 모드의 균열진전문제에 적합한 J 적분법을 사용하였다.

균열선단의 응력등고선이 폐합될 때 에너지-운동량 텐서를 파괴계수의 산정에 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J = \int_{\Gamma} \left[W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] \mathbf{n}_j d\Gamma \quad (28)$$

여기서 $W = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon$ 는 변형에너지 밀도, σ 는 Cauchy 응력, \mathbf{n} 은 균열선단을 폐합하는 임의의 등고선 Γ 에 수직인 외측을 향하는 단위 벡터이다

위 식에서 정의된 J적분은 균열의 진전시 탄성재료의 에너지 방출률(energy release ratio) \mathfrak{R} 과 동일하다. 따라서 일반적으로 혼합모드의 균열에서는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J = \mathfrak{R} = \frac{1}{E'} (k_1^2 + k_2^2) \quad (29)$$

여기서

$$E' = \begin{cases} E & \text{plane stress} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{plane strain} \end{cases} \quad (30)$$

Yau¹⁴⁾, Shih와 Asaro¹⁵⁾ 등은 혼합모드 균열의 응력강도 계수의 계산에 효과적인 상호적분법(interaction integral)을 제안하였다. 상호적분법에서는 우선 균열이 발생한 물체의 독립적인 2개의 평형상태를 고려한다. 상태1은 주어진 경계조건에서의 현재상태(actual state)이고 상태2는 균열진전 후에 얻어질 보조상태(auxiliary state)이다. 두 상태의 중첩된 J적분은 다음과 같다.

$$J^{tot} = \int_{\Gamma} \left[W^{tot} \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] \mathbf{n}_j d\Gamma \quad (31)$$

여기서

$$W^{tot} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}) \quad (32)$$

위의 식에서 위첨자의 괄호는 가정된 평형상태를 나타낸다. 위의 식(31)는 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\begin{aligned} J^{tot} &= \int_{\Gamma} \left[W^{(1)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] \mathbf{n}_j d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} \left[W^{(2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} \right] \mathbf{n}_j d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] \mathbf{n}_j d\Gamma \\ &= J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \end{aligned} \quad (33)$$

여기서 $J^{(1)}$, $J^{(2)}$ 는 상태1과 상태2에 대한 J적분이고 $M^{(1,2)}$ 와 $W^{(1,2)}$ 는 각각 다음과 같이 나타나는 두 평형상태의 상호적분과 중립변형에너지이다.

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] \mathbf{n}_j d\Gamma \quad (34)$$

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)}) = \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)} \quad (35)$$

중첩된 상태의 Irwin의 공식의 공식을 이용하면 J^{tot} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 J^{tot} &= \frac{2}{E'} \left[\left((k_1^{(1)})^2 + (k_1^{(2)})^2 \right) + \left((k_1^{(2)})^2 + (k_1^{(1)})^2 \right) \right] \\
 &\quad + (k_1^{(1)} k_1^{(2)} + k_2^{(1)} k_2^{(2)}) \\
 &= J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E'} (k_1^{(1)} k_1^{(2)} + k_2^{(1)} k_2^{(2)}) \quad (36)
 \end{aligned}$$

식(33)과 식(36)를 비교하면 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E'} (k_1^{(1)} k_1^{(2)} + k_2^{(1)} k_2^{(2)}) \quad (37)$$

위의 식에서 각각의 응력강도계수를 얻기 위해 보조상태를 점근선적인 모드1상태라 가정하면 이 때 $k_1^{(2)} = 1$, $k_2^{(2)} = 0$ 이고 따라서 위 식(37)은 다음과 같이 된다.

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E'} k_1^{(1)} \quad (38)$$

따라서 모드1의 응력강도계수는 다음과 같다.

$$k_1^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{(1,2)} \quad (39)$$

유사하게 모드2의 보조상태를 점근선적인 상태로 가정하면 $k_1^{(2)} = 0$, $k_2^{(2)} = 1$ 이므로 $M^{(1,2)}$ 로부터 모드2의 응력강도계수를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$k_2^{(2)} = \frac{E'}{2} M^{(1,2)} \quad (40)$$

식(34)의 폐합적분은 Gauss의 정리에 의해 다음과 같은 등가의 영역적분으로 치환될 수 있다.

$$M^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (41)$$

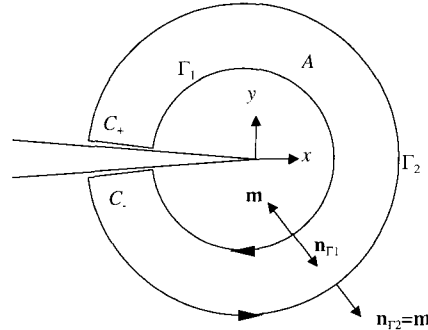


그림 2 적분경로에 독립적인 균열선단에서의 폐합적분

여기서

$$q = \begin{cases} 1 & \text{on } \Gamma_1 \\ 0 & \text{on } \Gamma_2 \\ \text{arbitrary} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (42)$$

상호적분은 보조상태의 선택에 대한 가정 때문에 탄성재료에서만 사용할 수 있다. 그러나 응력강도계수도 또한 균열선단에 무시할 수 있을 정도로 작은 소성영역이 발생하는 경우에만 유효한 계수이기 때문에 상호적분을 사용하는데는 문제가 없다.

4. 적응적 세분화(refinement) 및 재결합(recovery) 기법

균열해석은 응력집중현상이 명확히 나타나고 그 영역이 국부적이기 때문에 적응적 해석의 대상으로 매우 적합하다. 그러나 단순한 정적균열의 해석기법을 균열진전해석에 확장적용하려 하면 균열의 진전에 따른 모델의 재구성이나 각 진전단계의 해석에 있어서 해석의 정밀도를 유지하는 등과 같은 어려운 문제들과 직면하게 된다. 이런 점에서 EFG와 같은 무요소법이 가지고 있는 재모델링이 간편하다는 특성은 균열의 진전해석에 적합한 해법이라 할 수 있다. 그러나 EFG방법을 통한 균열진전해석의 경우에도 해석과정중의 정밀성을 일관성있게 유지하는 기법은 아직 뚜렷이 제시되지 않았다. Belytschko등이 균열선단에서 방사상(star-shaped)의 절점군을 추가하여 균열진전해석을 수행하기도 하였으나²⁾ 이는 해석의 정밀도를 높이는 측면에서 시도 되었을 뿐 적응적해석을 통한 균열진전해석이

라고 볼 수 없다. 적응적 해석의 가장 중요한 특징은 오차의 분포에 따른 최적 모델의 구성이다. 그러나 균열진전문제에 있어서는 응력의 집중점이 매 단계에 따라 계속 이동하기 때문에 전 단계에서 얻어진 세분화된 해석모델이 현 단계의 오차분포의 특징을 반영하지 못하게 된다. 이러한 불일치는 계산상 매우 비효율적이며 오차분포에 따른 최적모델이라는 적응적 해석의 특징을 유지하는데 많은 어려움을 주게 된다. 이러한 문제는 여러 단계의 해석을 수행해야 하는 동적해석에도 나타나게 된다. 유한요소법에서는 Choi등은 산유체역학 부분에서 발생한 이러한 해석단계에 따른 오차분포의 변화를 요소의 세분화와 재결합 기법을 도입하여 효과적으로 해결하였다.¹⁶⁾ 그러나 유한요소법에 대한 재결합 기법은 요소의 절점수에 제한 때문에 전체적으로 매우 복잡하게 된다. 따라서 Choi등은 이 연구에서 "single level rule"라는 제한 조건을 이용해 이 문제를 단순화하였다. 그러나 무요소법에서는 유한요소에서 발생하는 이러한 절점의 배치에 관련된 어려움이 없기 때문에 세분화 및 재결합 과정을 오차분포에 따라서만 구성할 수 있다.

무요소법의 *h-type*의 적응적 세분화 기법은 많은 연구자들에 의해 제안되어 왔다.^{4),3),7)} 이 들이 제안한 방법들을 모두 나름대로의 장점을 가지고 있었으나 일반적인 적용보다는 균열선단과 같은 제한된 경우에만 사용이 가능한 경우도 없지 않았다. 따라서 적분격자를 통한 세분화 기법은 임의의 지점에 대해 적절한 세분화를 수행할 수 있고 국부적인 세분화에 대해서도 적절한 적분차수를 쉽게 구현할 수 있다는 점에서 현 단계에서 바람직한 세분화 기법중의 하나이다. 또한 재결합 정보를 위한 자료를 쉽게 구축할 수 있다는 장점도 있다. 따라서 본 연구에서는 균열진전에 따른 연속적인 적응적 해석을 위해 적분격자에 따른 절점의 추가와 제거를 수행하는 해석기법을 제안하였다.

그런데 적분격자에서 수행하는 수치적분의 적절한 차수에 대해서는 아직 명확한 기준이 제시되어 있지 않다. 무요소법의 형상함수는 연속이고 매우 고차의 함수이기 때문에 유한요소법의 경우와 같이 필요한 적분차수를 해석적으로 구할 수 없다. 다만 Belytschko 등이 다음과 같은 경험적인 적분차수를 제안하였다.¹⁾

$$N_q = \sqrt{M_c} + 2 \quad (43)$$

여기서 M_c 는 적분격자내의 절점 수이다. 따라서 적분격자의 적분차수는 추가되는 절점수에 따라 적절하게 수정되어야 한다. 수치적분의 정확도의 급격한 변화를 피하고 전 해석영역에 걸쳐 일관성있는 적분의 정확도를 유지하도록 적분점의 차수를 수정하는 방법으로는 두 가지를 제시할 수 있다. 첫째 방법은 적분격자내의 절점 수에 따라 적분차수를 늘려주는 방법이고 두 번째 방법은 적분격자를 분할하는 방법이다. 본 연구에서는 절점이 적분격자에 따라 위치하는 방법을 사용하였기 때문에 두 번째 방법을 사용하여 세분화에 따른 적분차수를 유지하였다.

이와 같이 적분격자를 분할하면서 적응적세분화를 수행하는 것은 유한요소에서의 적응적세분화와 유사하나 무요소법의 적응적 세분화와 유한요소에서의 적응적 세분화는 근본적인 차이가 있다. 유한요소는 고정된 절점수를 가지고 있으므로 적응적 세분화의 적용에 있어서는 일반적으로 요소간의 적합성을 만족시키기 위해 인접요소와 연결되지 않는 절점의 자유도를 구속하였다. 그러나 이러한 방법은 전체적인 해석의 정확도를 떨어뜨리므로 이런 종류의 요소만으로 국부적인 세분화를 수행하는 것은 많은 문제가 있었다. 그러나 세분화 정도가 달라지는 경계부분에 위치한 요소간의 적합성을 유지할 수 있는 전이 요소(transition element)가 개발되면서 이러한 문제들을 해결할 수 있었다.^{17),18)} 그러나 무요소법에서는 이산화가 오로지 절점들의 배치에만 기반을 두고 있고 격자망에 의존할 필요가 없다. 또한 절점간의 상관관계는 절점의 배치 형상에 따라 결정된다. 그러므로 유한요소의 경우와 같이 다른 자유도를 갖는 요소의 개발이나 세분화 수준의 차이를 고려하기 위한 처리가 불필요하다. 따라서 오차분포에 따른 적응적 세분화를 수월하게 모델상에 구현할 수 있다.

적응적해석의 첫 번째 단계는 식(21)에 의해서 전체 해석모델의 상대오차를 산정하는 것이다. 만일 이 오차가 제한치내에 들지 않으면 식(19)에 의해 각 격자의 국부오차지시자를 산정한다. 만일 어떤 격자에서 계산된 국부 오차지시자가 미리 규정된 한계값보다 크다면 그 적분격자는 4개로 나누어 지고 5개의 새로운 절점이 추가된다(그림 3). 다음 단계로 추가된 절점이 기존의 절점과 중복되는 지는 검사하고 추가된 절점이 만일 경계상에 있다면 인접한 2개의 경계절점의 평균값으로 경계값을 부여한다. 이러한 세분화가 이루어

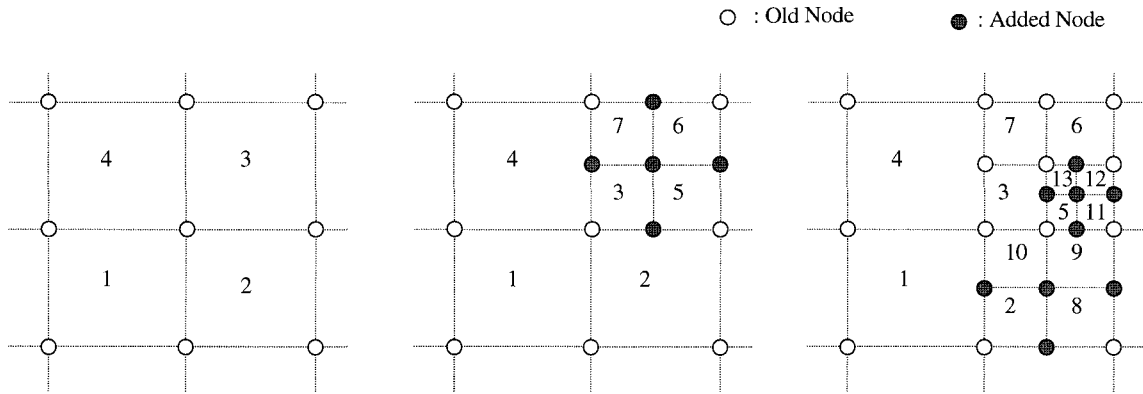


그림 3 세분화에 따른 절점추가 및 규칙과 격자번호 부여 규칙

졌으면 이후에 재결합을 대비하여 각 적분격자는 세분화 수준에 대한 정보와 가족격자에 대한 정보를 저장한다. (그림 4). 4개로 분할된 적분격자중의 하나는 원적분격자의 번호를 그대로 물려받고 다른 3개의 격자는

연속된 격자번호를 새로 부여 받는다. 따라서 원적분격자의 번호를 가지고 있는 적분격자를 모격자(母격자: mother cell)라고 하고 새로 번호를 부여받은 격자를 형제격자(兄弟격자: brother cell)라고 명명한다. 각 형제격자는 모격자에 대한 정보를 가지고 있다. 앞에서 언급했듯이 형제격자는 연속적인 격자번호를 가지고 있기 때문에 가족격자는 연속된 3개의 격자번호를 가진 형제격자와 이들이 공유하는 모격자로 이루어진다. 그리고 이들 가족격자는 동일한 세분화 수준을 가지고 있다. 따라서 그림 3의 5, 11, 12, 13 격자는 가족격자이다. 왜냐하면 11, 12, 13의 연속된 격자번호를 가진 형제격자와 이들과 모격자 5가 동일한 세분화수준을 가졌기 때문이다. 반면에 5, 6, 7 격자는 형제격자가 아니다. 비록 이들이 연속된 격자번호를 가지고 있고 한 개의 모격자를 공유한다 해도 세분화 수준이 다르기 때문이다.

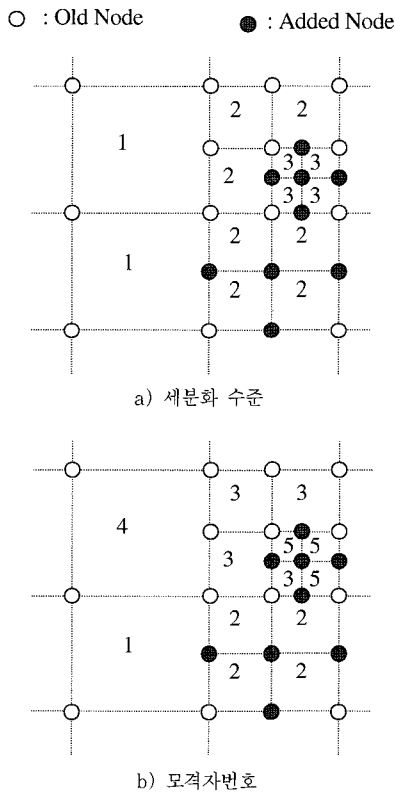


그림 4 재결합을 위한 세분화 정보

재결합 단계에서 만일 계산된 적분격자의 국부오차 지시자가 미리 설정된 값보다 작다면 그 격자는 재결합 대상 격자로 표시된다. 모든 적분격자에 대한 검사가 끝나면 가장 높은 세분화 수준에 대하여 가족격자의 모든 격자(1모격자+3형제격자)가 재결합대상인 경우를 찾는다. 재결합 과정에서는 인접격자와 공유되지 않은 절점을 소거하고 가족격자를 하나의 적분격자로 통합한다. 그리고 통합된 적분격자의 세분화 수준과 오차값을 수정한다. 한 세분화 수준에 대한 재결합과정이 끝나면 모든 절점과 적분격자에 대하여 번호를 다시 매긴다. 이러한 과정은 각 세분화 수준들에 대하여 반복된다.

본 연구에서 제안된 세분화 및 재결합 과정은 표 1, 2의 순서도에 제시되었다.

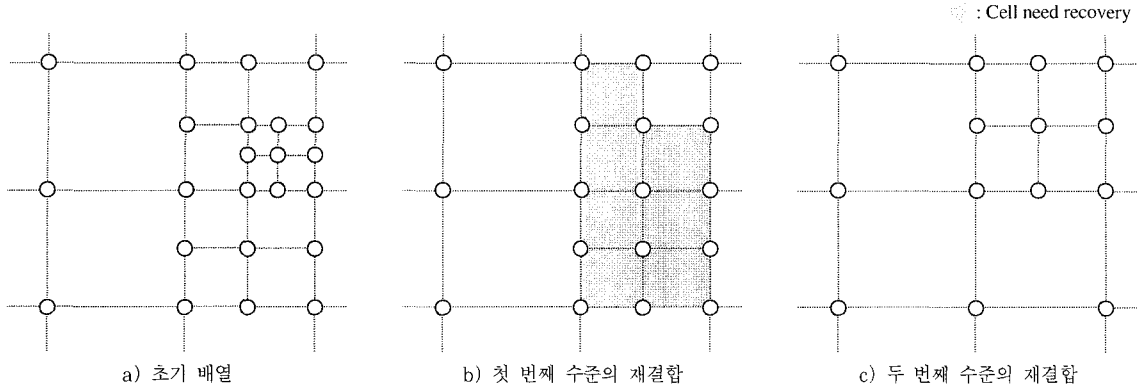


그림 5 재결합 과정

표 1 세분화 알고리즘

```

for each cell
if refinement of cell is need
    add nodes at center of cell and mid-point of cell side
    check the added nodes are duplicated with existing node
    divide original cell to 4 cell
    assign the boundary values to added node.
    1 cell inherit original cell number(mother cell) and
    other 3 cell is numbered sequentially(brother cells).
    modify refinement level of family cells and mother cell
    number of brother cells
end if
end for each cell
    
```

표 2 재결합 알고리즘

```

for each level
for each cell
if recovery of cell is need
    search brother cells
    search mother cell
    if all members of family need recovery
        mark brother cells are inactive
        modify node number of mother cell to corner node
        of family cells
        mark mid side nodes are inactive
        calculate total error norm of family cells
    end if
end if
end for each cell
delete cell marked inactive
delete node marked inactive excluding crack node and
corner node of any active cell
renumbering of cells and nodes for next level recovery
end for each level
    
```

세분화와 재결합의 기준이 되는 국부오차 지시자의 최적값의 산정에 관한 문제는 아직 명확히 해결되지 않은 상태이다. 따라서 많은 연구자들이 국부오차지시자의 최적값을 수치 실험 및 경험적인 방법으로 산정하고 있다.¹⁶⁾ 본 연구에서도 마찬가지로 경험적인 방법으로 얻어진 국부오차 지시자의 값을 사용하였다. 다음 장에 제시된 수치해석에서는 사용된 국부오차지시자의 한계 값을 세분화시 0.15, 재결합시에는 이 값의 75%로 사용 하였다. 재결합시 사용되는 국부오차지시자의 값을 지나치게 낮게 잡으면 많은 절점이 소거되어 경제적인 해석이 될 수 있으나 동시에 해석의 안전성을 저하시킨다

균열선단의 이론적인 응력값은 무한대이기 때문에 균열선단의 이론적인 오차 값 또한 무한대이다. 이것은 보다 정밀한 해석이 수행될수록 균열선단에서의 오차는 증가한다는 것을 의미한다. 그러므로 균열선단의 응력집중영역은 해석의 전체적인 상대오차와는 관계없이 항상 세분화가 필요하게 된다. 균열의 진전을 고려하지 않는 적응적 정적균열문제에서는 전체 문제의 해가 몇 단계 정도의 반복해석을 통해 수렴하게 되므로 이러한 균열선단의 과도한 세분화는 크게 문제되지 않는다. 그러나 적응적 균열진전문제에서는 각 진전단계마다 이러한 반복계산이 요구되므로 항상 세분화가 필요한 균열선단의 경우는 상대오차의 수준에 비해 지나치게 많은 세분화가 발생하게 된다. 이는 해석의 효율성을 떨어뜨리고 수치적인 오차의 발생가능성을 높이는 결과를 가져온다. 이러한 과세분화를 막으려면 다음과 같은 두 가지 접근방법을 생각해 볼 수 있다.

- 1) 각 진전단계마다 새로운 초기 모델의 사용
- 2) 세분화 수준의 한계설정

첫 번째 접근방법은 전단계의 적응적 해석의 결과가 현단계의 해석에 반영되지 않고 또한 무요소법의 특징을 반영하기 어려운 방법이다. 두 번째 방법은 세분화 수준을 제한하여 목표한 상대오차로의 수렴에 실패하는 무한루프에 빠질 위험이 있다. 그러나 이러한 수렴 실패로 인한 무한루프는 최대 반복계산의 수를 제한하여 조절할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 두 번째 방법의 의해 균열선단의 과세분화를 방지하였다.

5. 수치예제

본 연구에서 제시된 적응적 해석기법의 효용성을 검증하기 위하여 2차원 균열진전문제에 대한 해석이 수행되었다. 모든 수치 예제의 해석에서는 적분격자당 4×4 수치적분을 수행하였다.

5.1 Shear Edge Crack

이 수치예제는 전단분포하중 $\tau=1.0$ 이 상부에 작용하는 평판에 대한 균열해석이다. 측면에는 미리 $a=W/2=3.5$ 길이의 균열이 생성되어 있고 평판의 하단은 바닥에 고정되어있다. 평판의 재료상수로 탄성계수 $E=30 \times 10^6$ psi와 포아슨 비 $\nu=0.25$ 를 사용하였고 평면응력상태를 가정하였다. 균열이 진전하지 않는 경우에 이 문제에 대한 응력강도계수는 각각 $k_1=34.0$, $k_2=4.55$ 으로 알려져 있다. 이 문제의 정적적응적 EFG 해석결과는 Chung등의 연구¹⁹⁾에서 찾을 수 있다. 투영응력의 산정시 원 EFG문제에서 보다 작은 영향반경을 사용하여 적절하게 평가된 오차분포를 얻을 수 있었다. 이 때 사용된 영향반경의 계수는 $D_m^a = 2.5$, $D_m^p = 1.8$ 였다. 이 영향반경의 계수는 식(3b)에 제시되었으며 위치자 a 는 일반 EFG의 형상함수의 계산에 사용된 영향반경을 나타내고 위치자 p 는 투영응력의 산정에 사용된 EFG 형상함수를 나타낸다. 그러나 비진전문제에서 얻은 결과와는 다르게 균열진전의 해석에서는 위에서 제시된 정도의 영향반경계수를 사용하면 수렴에 실패하는 경우가 발생한다. 이러한 수렴실패는 세분화수준의 변화에 따른 절점간 거리의 급격한 변화에서 기인한다. 이러한 급격한 세분화 수준의 변화는

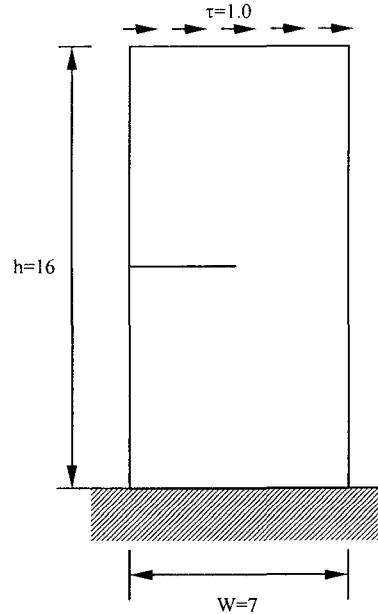


그림 6 Edge Crack 문제의 개요

재결합단계에서 주로 발생한다. 유한요소법의 세분화 재결합 기법에 있어서는 이러한 세분화 수준의 변화는 인접 요소들간의 세분화 수준의 차이를 규정하는 다른 제약조건을 가하여 방지한다.¹⁶⁾ 그러나 무요소법에서는 이러한 제약조건의 부여는 무요소법의 특성을 제거하게 되므로 바람직하지 않은 방법이다. 따라서 이러한 급격한 세분화수준의 변화를 포용할 수 있도록 보다 큰 영향영역을 사용하는 것이 바람직하다. 수치적인 시험결과로는 대부분의 균열진전 문제에 있어서 $D_m^a = 3.5$, $D_m^p = 3.0$ 정도의 값을 사용하면 급격한 세분화수준의 변화에 기인한 수렴실패는 발생하지 않았다. 이보다 큰 값을 사용하면 좀 더 안정적인 해석을 수행할 수 있지만 전체적인 해석의 효율을 저해할 우려가 있으므로 바람직한 방법이 아니다.

이 예제는 모두 15단계의 균열진전해석이 이루어졌고 각 단계에서의 균열 진전량은 0.2in로 하였다. 또한 각 단계마다 만족시켜야할 해석의 상대오차는 0.15로 하였다. 이 문제에 사용된 영향반경 계수는 EFG해석시와 응력투영시 각각 $D_m^a = 3.0$, $D_m^p = 2.5$ 가 사용되었다. 또한 해석 수행시의 다른 제한 조건으로는 최대 세분화수준 7, 각 진전단계에서의 최대 반복계산수 15 등을 사용하였다. 그러나 각 해석단계에서 발생한 최대 반복계산수는 10으로 모든 균열진전단계

에서 목표한 상대오차에 수렴하였다.

적응적 해석을 위한 초기의 절점배치와 균열진전에 따른 적응적 세분화가 이루어진 형상은 그림 7, 8에서 보는 바와 같다. 이 그림에서는 균열선단 주변의 응력 집중에 대하여 적응적으로 추가된 절점의 집단이 균열 선단을 따라 이동하는 것이 잘 나타나 있다. 즉 이전단계의 해석에서 세분화된 절점의 배치가 응력집중점의 변화에 따라 다시 원 상태로 돌아오는 과정이 잘 작동하고 있음을 알 수 있다.

이러한 세분화의 회복은 전체적인 해석의 효율성을

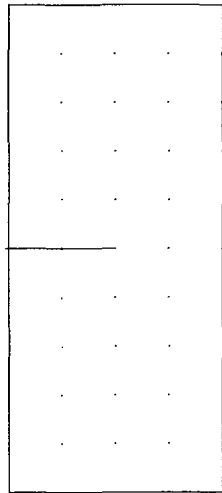


그림 7 초기 절점배치

증대시키고 오차분포에 보다 적합한 최적절점배치를 작성할 수 있게 한다. 그림 9에는 균열의 진전에 따른 von Mises응력의 분포를 나타내고 있다. 균열의 진전에 따른 응력강도계수의 변화는 그림 9에 나타나 있다. 이 그림에서 볼 수 있듯이 균열의 진전에 따라 모드 1의 응력강도계수가 모드2의 응력강도 계수에 비해 급속히 증가되는 것을 알 수 있다. 이것을 균열의 진전에 따라 균열의 거동이 벌어지는(opening) 모드1 현상에 지배되는 것을 나타낸다.

5.2 Double Cantilever

이 예제에는 균열이 준정적으로 성장하는 이중 외팔보 모델에 대한 예제이다.²⁰⁾ 문제의 개략적인 구성은 그림 11에 나타나 있다. 시편은 평면 응력상태로 가정되었으며 탄성계수와 포아슨 비는 각각 $E=3 \times 10^7$ psi, $\nu=0.3$ 로 가정되었다. 균열선단에는 그림 11에서 보는 바와 같이 초기기울기 1/30, 1/20, 1/10을 갖는 0.3in 길이의 균열이 추가되었다. 이 문제의 해석에 사용된 영향반경계수는 EFG계산시와 응력의 투영시 각각 $D_m^u = 3.0$, $D_m^p = 2.5$ 이다. 전체 해석의 균열진전단계는 모두 25 단계이고 각각의 단계에서는 0.1in의 균열의 성장을 가정하였다. 각 단계에서 적응적 해석으로 만족시켜야 한 목표상대오차는 0.12이고 최대 세분화수준은 7이다. 이 문제에 서는 초기에 모두 영역에서 같은 크기의 적분격자를 사용했으므로 가장

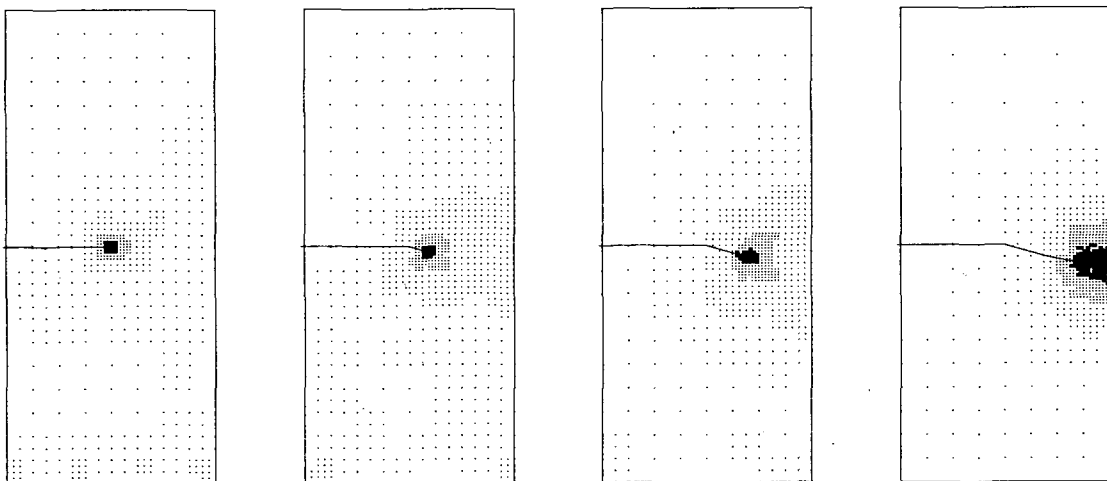


그림 8 균열의 진전에 따른 절점배치와 균열진전 경로 (Step 1, 6, 10, 15)

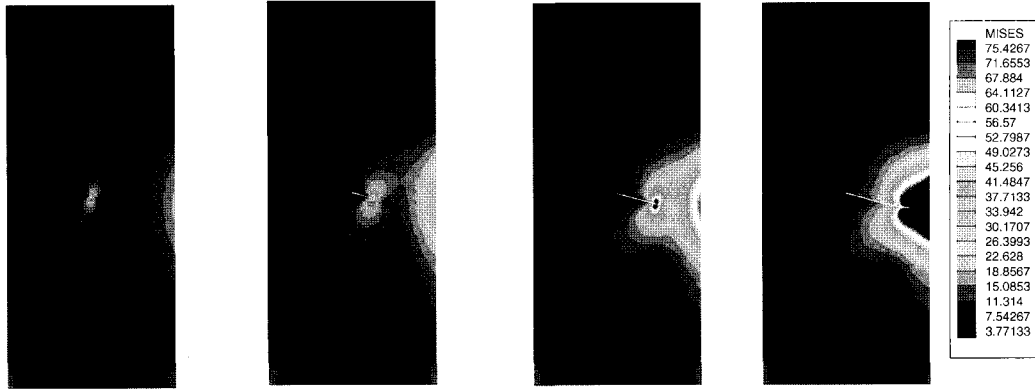


그림 9 균열 진전에 따른 Von Mises 응력의 분포 (Step 1, 6, 10, 15)

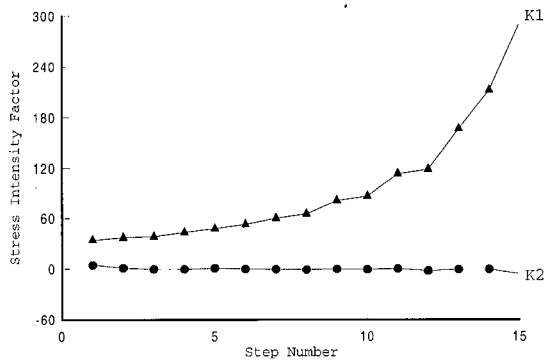


그림 10 응력강도계수의 변화

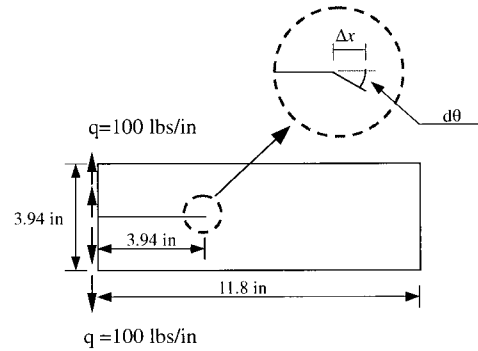


그림 11 Double Cantilever 문제의 개요

가까운 절점간의 거리는 가장 큰 절점간의 거리의 $1/2^7=1/128$ 이다. 그림 13은 적응적 해석에 따라 얻어진 균열진전의 경로와 이에 따른 절점의 배치를 나타내고 있다. 앞 절에서도 언급했듯이 본 연구에서 제안한 절점의 소거기법으로 각 균열진전단계에서 얻어진 오차분포에 적합한 최적의 절점배치가 이루어지고 있다. 따라서 마지막 균열진전단계에서 외팔보의 자유단 부근의 절점배치는 초기의 배치로 다시 복귀한 것을 볼 수 있다.

그림 14는 초기의 균열 경사에 따른 균열경로의 변화를 보여주고 있다. 이 그림에서 볼 수 있듯이 초기의 균열기울기는 전체 균열의 경로를 결정하는 중요한 요소이다. 그러나 이 때 해석의 정확도를 유지하지 않는다면 해석전체에 걸쳐 일관된 결과를 얻을 수 없다. 또한 초기 기울기에 대한 균열 경로의 민감도는 해석의 정밀도와 관계가 있다. 초기기울기가 $1/30$ 인 경우 보다 높은 목표상대오차(0.20)를 설정하면 균열은 아래쪽으로 기

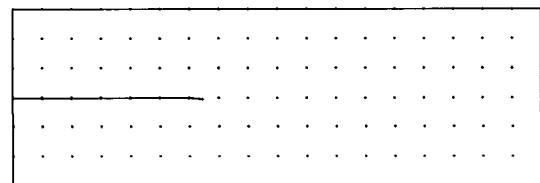


그림 12 초기 절점배치

울지 않고 수평방향으로 진전된다. 위에서 제시된 세가지 경우의 해석에 있어서 발생한 최대 절점수는 1191 개였다.

5.3 Rivet Holed Plate

마지막 예제로 2개의 구멍을 가진 평판에 인장력이 작용하는 모델에 있어서의 균열진전문제를 해석하였다. 그림 15은 모델의 형상과 재하상태를 나타낸다. 초기 모델에 있어서 균열길이는 0.1in이며 각각 $\theta=45^\circ$ 와

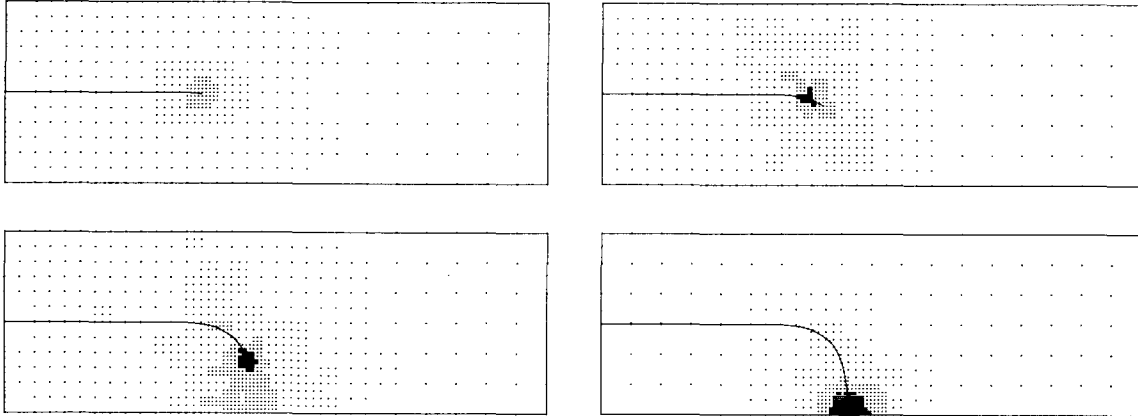


그림 13 균열의 진전에 따른 절점배치와 균열진전 경로

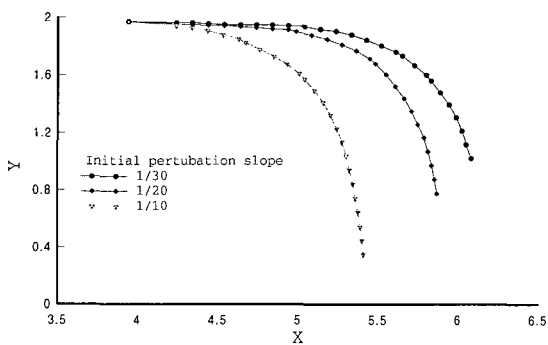


그림 14 균열의 초기 기울기에 따른 진전경로의 비교

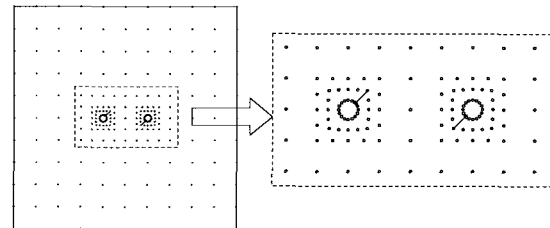


그림 16 초기 절점배치

이며 최대 세분화 수준은 8이다. 즉 초기 절점간격의 $1/2^8 = 1/256$ 까지 세분화가 허용된다.

초기 모델은 그림 16에선 볼 수 있듯이 229개의 절점과 180개의 적분격자로 이루어져 있다. 이러한 초기 모델은 유사한 연구²¹⁾에서 사용된 절점에 비하면 매우 적은 수이다. 그러나 적응적 해석기법에 의해 목표한 정확도와 오차분포에 부합하는 최적의 절점분포로 해석이 이루어지게 된다.

6. 결 론

본 논문에서는 EFG방법에 의한 균열진전해석을 위해 적응적 세분화와 재결합기법이 제시되었다. 이 기법에서는 균열의 진전에 따라 연속적으로 변화하는 오차분포에 따른 최적의 절점배치를 얻기 위해 적응적 해석을 수행한다. 그 결과 계속적인 균열의 진전과정에서 일정한 해석의 정밀도를 유지하여 전체해석을 통해 일관성있는 결과를 도출할 수 있었다. 또한 응력집중점의 이동에 따라 이전 단계 산정되었던 조밀한 절점배치를 복귀시키면서 해석의 효율성을 증대시켰다. 이러한 과정

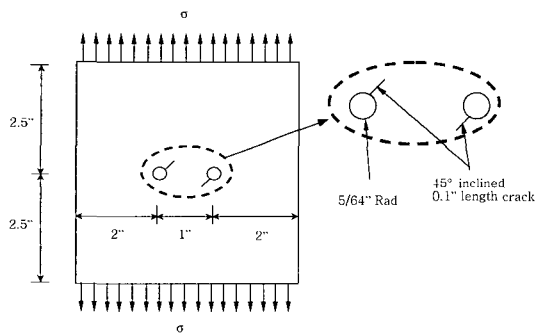


그림 15 Rivet Holed Plate문제의 개요

$\theta = -45^\circ$ 의 각을 가지고 있다.

이 문제는 EFG해석시와 응력투영시의 영향반경 계수로 각각 $D_m^a = 2.5$, $D_m^p = 2.0$ 을 사용하였다. 전체 균열진전단계는 10 단계이며 각각의 단계에 0.1in의 균열진전을 가정하였다. 각 단계의 목표 상대오차는 0.08

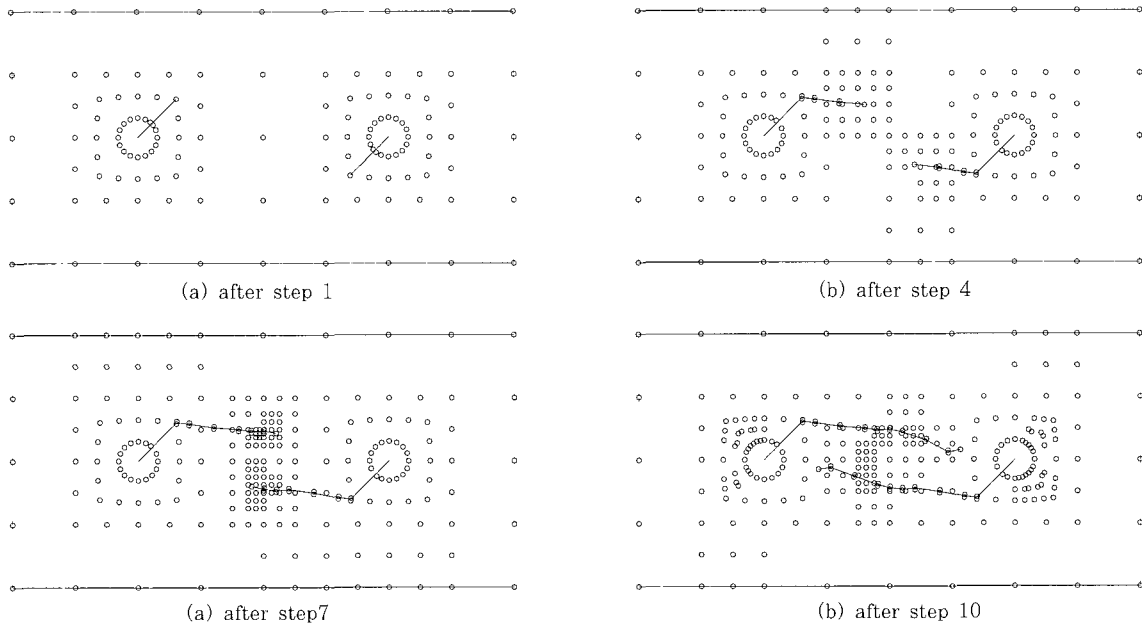


그림 17 균열의 진전에 따른 절점배치의 균열진전 경로

에 필요한 절점의 추가와 소거는 적분격자의 구조를 따랐다. 이러한 절점배치에 기준이 되는 오차분포는 투영 응력법에 의해 산정하였다.

제안된 방법의 타당성을 검토하기 위하여 수치예제에 대한 해석이 수행되었다. 이러한 예제들의 해석결과는 제안된 방법이 균열의 진전에 따른 구조물의 응답을 적응적해석에 의해 적절하게 나타낼 수 있음을 보여 주었다.

참 고 문 헌

1. Belytschko, T., Y. Y. Lu and L. Gu. "Element-free Galerkin methods", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp.229~256
2. Belytschko, T., Y. Krongauz, M. Fleming, D. Organ and W. K. Liu. "Smoothing and accelerated computations in the element-free Galerkin method", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 74, 1996a, pp.111~126
3. Lui, W. K., S. Jun and D. T. Sihling. "Multi-resolution reproducing kernel particle method for computational fluid dynamics", *International Journal of Num. Method in Fluids*, Vol. 24, 1997, pp.1391~1415
4. Duarte, C. A. and J. T. Oden. "An *hp* Adaptive Method Using Clouds", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, 1996, pp.237~262
5. Liu, W. K., W. Hao, Y. Chen, S. Jun and J. Gosz. "Multiresolution reproducing kernel particle methods", *Computational Mechanics*, Vol. 20, 1996, pp.295~309
6. Hausser-Combe, U. and Korn, C., "An adaptive approach with the EFG method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 162, 1998, pp.203~222
7. Organ, D., M. Fleming, T. Terry and T. Belytschko. "Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency", *Computational Mechanics*, Vol. 18, 1996, pp.225~235
8. Nayroles, B., G. Touzot and P. Villon. "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, Vol. 10, 1992, pp.307~318

9. Chung, H. J. and Belytschko, T., "An error estimate in the EFG method", *Computational Mechanics*, Vol. 21, 1998, pp.91~110
10. Erdogan, F. and G. C. Sih, "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear", *Journal of Basic Engineering*, 1963, Vol. 85, pp.519~527
11. Nuismer, R. J., "An energy release rate criterion for mixed mode fracture", *International Journal of Fracture*, 1975, Vol. 11, pp.245~250
12. Sih, G. C., "Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems", *International Journal of Fracture*, Vol. 10, 1974, pp.305~321
13. Anderson, T. L., *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications (second edition)*. CRC press, 1991
14. Yau, J. F., S. S. Wang, and H. T. Corten, "A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, 1980, pp.335~341
15. Shih, C. H. and R. J. Asaro., "Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interface: Part I - Small scale yielding", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, 1988, pp.299~316
16. Chang-Koon Choi and Won-Jin Yu, "Adaptive Mesh Refinement and Recovery using Variable-node Element for Finite Element Wind Analysis", *Journal of Aerospace Engineering*, Vol.12, 1999, pp.168~175
17. Chang-Koon Choi, Sun-Hoon Kim, Yong-Myung Park, and Keun-Young Chung, "Two-dimensional Nonconforming Finite Elements : A State-of-the-Art", *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*, Vol. 6, 1998, pp.41~61
18. Chang-Koon Choi and Yong-Myung Park. "Conforming and Nonconforming Transition Plate Bending Elements for an Adaptive h-refinement", *Thin-Walled Structures*, Vol. 28, 1997, pp.1~20
19. Chung, H. J., Lee, G. H., Choi, C. K., "Adaptive nodal generation with the element-free Galerkin method", *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal.*, Vol. 10, 2000, pp.635~650
20. Belytschko, T. and T. Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 45, 1999, pp.601~620
21. Moses, N., Dolbow, J., T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 46, 1999, pp.131~150

(접수일자 : 2000. 9. 15)