
다중비 신호처리에 적용한 선형 주기적 시변 시스템의 입출력 이득

이상철*, 박계원**

Input-Output Gains of Linear Periodic Time-Varying Systems with Applications to Multirate Signal Processing

Sang-Chuel Lee, Key-Won Park

요 약

본 논문에서는, 선형 주기적 시변 시스템에 대해서, 두 개의 입출력 이득을 정의한다. 그 하나는 단위 크기의 l_2 노름을 갖는 모든 입력에 대한 최악의 l_2 노름의 출력의 비로서, $G(l_2, l_2)$ 로 표기한다. 또 다른 하나는 단위 크기의 RMS 값을 갖는 모든 입력에 대한 최악의 RMS 값의 출력의 비로서, $G(\text{RMS}, \text{RMS})$ 로 표기한다. 선형 시불변 시스템에 대해서는 이 두 개의 이득은 등가라는 사실이 잘 알려져 있다. 본 논문에서는 선형 주기적 시변 시스템에 대해서도 이 두 개의 이득이 등가라는 것을 증명한다. 또한, 선형 주기적 시변 시스템에 대한 주파수 응답을 얻는 두 가지 방법 사이의 관계를 유도한다. 이렇게 정의된 입출력 이득은 M-채널 필터뱅크에 적용한다. 필터뱅크는 음성 압축 등에 사용되는 대표적인 다중비 신호처리 시스템이다. 이러한 필터뱅크에는 일반적으로 에일리어징 왜곡, 진폭 왜곡 및 위상 왜곡이 존재한다. 본 논문에서는 오차 시스템의 $G(l_2, l_2)$ 이득을 최적화 하는 방법에 의해 필터뱅크를 설계함으로써, 필터뱅크에서 일반적으로 존재하는 왜곡을 작게할 수 있음을 보인다.

ABSTRACT

In this paper, we define two input-output gains of linear periodic time-varying systems. One is the ratio of

* 재능대학 정보통신계열 전임강사

** 재능대학 정보통신계열 교수

접수일자 : 2000. 10. 6.

output with worst-case l_2 -norm over all inputs with unit l_2 -norm. It denotes $G(l_2, l_2)$. The other is the ratio of output with worst-case RMS value over all inputs with unit RMS value. It denotes $G(\text{RMS}, \text{RMS})$. It is fact that these two gains are equivalent for linear time-invariant system. In this paper, we prove these two gains are also equivalent for linear periodic time-varying system. In addition, the relationship between two method of obtaining the generalized frequency responses for linear periodic time-varying system is derived. Finally, we apply the defined input-output gains to M-channel filter-bank which is multi-rate signal processing system, used to speech coding. In the filter-bank, generally, aliasing distortion, magnitude distortion, and phase distortion are present. It is shown that these are kept small if the filter-bank is designed by a method that optimizes the gain $G(l_2, l_2)$ of an error system.

1. 서론

필터의 입출력 이득에 대한 개념은 매우 중요하다. 예를 들어, 필터의 주파수 응답에서 최대 진폭은 이득에 대한 하나의 개념이 될 수 있으며, 잡음 감쇄의 정도를 정량화하기에 유용하다. 본 논문에서는, 일반적인 경우의 선형 시불변(LTI, Linear Time Invariant) 필터의 결과와 비교해서, 선형 주기적 시변(LPTV, Linear Periodically Time Varying) 시스템에 대한 두가지 개념의 이득을 정의한다. 더욱이, 다중비 필터 뱅크(multirate filter banks)에 이득개념을 적용하여 필터 뱅크에서의 에일리어징 왜곡, 진폭 왜곡, 및 위상왜곡을 작게 할 수 있음을 보인다.

본 논문은 주로 참고문헌 [5]와 [3]을 참조하였다. 참고문헌 [5]에서는, 일반화 주파수 응답을 정의하여, 선형 주기적 시스템을 주파수 영역에서 연구하였다. 또한, 몇몇 다중비 설계 문제가 모델 정합문제로 정식화되었다. 이때, 오차 시스템의 일반화 주파수 응답이 최적화된다. 참고문헌 [3]에서는, 일반화 주파수 응답의 다소 다른 개념을 가지고 다중비 필터뱅크를 설계하였다.

LPTV를 다루기에 앞서, LTI 경우의 이산 시간 신호 $x(k)$ 를 고려한다. 이 신호 $x(k)$ 의 크기를 나타내는 두 개의 대표적인 측도는 l_2 노름(norm)과 RMS 값이 있다. l_2 노름(norm)은 $\|x\|_2 = (\sum_k |x(k)|^2)^{1/2}$ 로 정의된다. 따라서, $\|x\|_2^2$ 는 $x(k)$ 의 에너지이다. 또한, RMS값은 $\text{RMS}(x) = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N |x(k)|^2 \right)^{1/2}$ 로 정의된다. 이 정의는 특히 주기적 신호에 대해 유

용하게 사용될 수 있다. 예를 들어, $x(k) = e^{2\pi j k}$ 신호의 RMS 값은 1이다.

이제, 안정한 LTI 이산시간 필터를 고려한다. 이 필터의 주파수 응답 함수는 $H(f)$ 이고, 입력은 $x(k)$ 이며, 출력은 $y(k)$ 라고 표기한다. 본 논문에서는 이 필터에 대해서, 두 가지 개념의 필터를 정의한다. 그 하나는 l_2 이득으로서, 입출력 신호의 l_2 노름을 취하여 $G(l_2, l_2) = \sup(\|y\|_2 : \|x\|_2 = 1)$ 로 정의한다. 이 정의에서, 입력은 l_2 노름이 1인 임의의 신호임을 의미한다. 이 이득은 그러한 입력에 대하여 출력의 l_2 노름의 최소상계(supremum)을 취한 것이므로, 최악의 경우의 이득이라고 할 수 있다. 수학적으로는 l_2 공간 상의 유계 연산자(bounded operator)로 고려되는 필터의 유도 노름(induced norm)이라고 부른다. 이러한 개념의 이득은 신호의 에너지가 중요한 경우에 많이 사용되며 식(1)과 같이 주파수 응답 함수의 L_∞ 노름과 등가임이 잘 알려져 있다.

$$G(l_2, l_2) = \|H\|_\infty \dots\dots\dots (1)$$

두 번째 개념의 이득은 입출력 신호의 RMS값을 사용하여, 필터이득을 $G(\text{RMS}, \text{RMS}) = \sup(\text{RMS}(y) : \text{RMS}(x) = 1)$ 로 정의한다. 이 이득도 주파수 응답 함수의 L_∞ 노름과 같다는 것이 잘 알려진 사실이다. 이 관계는 식(2)와 같다.

$$G(\text{RMS}, \text{RMS}) = \|H\|_\infty \dots\dots\dots (2)$$

위에서 정의한 두 개의 이득은 입출력의 향으로만 정의되었기 때문에, 선형 시스템에 일반화하여 적용할 수 있다. 따라서, 선형 시스템 중에서도 특

히 다중비 시스템(mutirate system)과 같은 LPTV 시스템에 확대 적용할 수 있다. 본 논문에서는 이들 두 개의 이득을 LPTV 시스템에 확대 적용하여, LPTV 시스템에서도 $G(l_2, l_2) = G(\text{RMS}, \text{RMS})$ 의 관계가 성립함을 보인다. 2절에서는 이들 이득을 계산하는 방법에 관하여 논의하며, 참고문헌 [5]의 일반화 주파수 응답과 참고문헌 [3]에서의 일반화 주파수 응답 사이의 관계를 유도한다. 3 절에서는 M-채널 필터뱅크에 관하여 논의한다. 완벽하게 재구성되는 이상적인 경우를 제외하면, 필터뱅크는 에일리어징 왜곡, 진폭왜곡 및 위상왜곡이 존재한다 [6]. 따라서, 본 논문의 3절에서는 참고문헌 [3]의 방법을 따라 필터뱅크를 설계하여 이들 왜곡을 줄이는 방법을 보인다.

위에서 정의된 이득의 개념을 다중 입출력(multi-input multi-output) LTI 시스템으로 확장하면서 본 절을 마치기로 한다. L_∞ 노름의 정의는 다음과 같이 확장된다. 다중 입출력 LTI 시스템의 주파수 응답 행렬을 $H(f)$ 라 하면, 그 L_∞ 노름은 최대 특이값(maximum singular value)을 취함으로써 다음 식(3)과 같이 정의된다.

$$\|H\|_\infty = \max_f \sigma_{\max}[h(f)] \dots\dots\dots (3)$$

모든 정수의 시간집합에 걸쳐 정의된 이산시간 신호에 대해서, 힐베르트 공간 l_2 는 제곱 가산 가능한 이산신호(square-summable discrete-time signals)로 이루어진다. 이때, l_2 의 n개의 사본들의 직합(direct sum)을 l_2^n 으로 표기한다. 따라서, l_2^n 의 원소는 벡터 값을 갖는 신호가 된다. l_2^n 공간의 한 원소인 신호 $x(k)$ 의 노름은 다음 식(4)와 같이 정의된다.

$$\|x\|_2 = \left(\sum_k x(k)^* x(k) \right)^{1/2} \dots\dots\dots (4)$$

여기서, *는 복소 공액 전치(complex-conjugate transpose)의 표기이다. 입력이 m차의 $x(k)$ 이고, 출력이 p차의 $y(k)$ 인 안정한 LTI 시스템에 대해서, 그 주파수 응답 행렬이 $H(f)$ 라하면, l_2^m 으로부터 l_2^p 로의 유도노름은 $p \times m$ 차의 행렬 $H(f)$ 의 L_∞ 노름과 같다. 즉, 다음 식(5)가 성립한다.

$$\sup_{\|x\|_2=1} \|y\|_2 = \|H\|_\infty \dots\dots\dots (5)$$

이 식은 식(1)의 일반화 식이다. 또한, 벡터 값을 갖는 신호 $x(k)$ 의 RMS값은 다음 식(6)과 같이 정의된다.

$$\text{RMS}(x) = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N x(k)^* x(k) \right)^{1/2} \dots\dots (6)$$

식(5)와 유사하게, 입력이 m차의 $x(k)$ 이고, 출력이 p차의 $y(k)$ 인 안정한 LTI 시스템에 대해서, 그 주파수 응답 행렬이 $H(f)$ 라하면, 다음 식(7)이 만족된다.

$$\sup_{\text{RMS}(x)=1} \text{RMS}(y) = \|H\|_\infty \dots\dots\dots (7)$$

이 식은 식(2)의 일반화 식이다. 다음절에서는 LPTV 시스템의 주파수 응답에 관하여 논의한다.

2. LPTV 시스템의 주파수 응답 함수

주파수 영역에서 LPTV 시스템을 기술하는 방법은 일반적으로 두 가지 방법이 있다. Shenoy 등은 불변 부분공간(invariant subspace)을 이용하여 이러한 방법 중에 하나를 소개하였으며, 다른 방법인 블록화(blocking)를 이용한 것과 등가라는 것도 언급하였다 [5]. 본 절의 목적은 이러한 등가성을 명확히 보이는 것이다. 이러한 연구는 제어이론 분야에서도 매우 유사하게 연구되고 있다. 제어 이론에서도, 두가지 방법의 주파수 응답 해석이 개발되었으며, 이 둘이 등가라는 것이 증명되었다. 제어 이론에서는 연속시간에서 LPTV로 나타나는 샘플치 시스템(sampled-data systems)에 관한 연구가 활발히 이루어 지고 있다 [1,2,7,8,9,10].

먼저, 참고문헌 [5]의 주파수 응답에 대한 정의를 가지고 시작한다. 연속시간에 대한 주파수 응답의 유사 개념은 참고문헌 [1]에 소개되어 있다. 해석의 편의를 위해서, 주파수 f의 지수 신호를 $e_f(k) = e^{j2\pi f k}$ 로 정의하여 사용한다. 주기 M의 주기적 신호 $u(k)$ 를 고려한다. 이 신호는 식(8)과 같은 푸리에 급수(Fourier series)를 갖는다.

$$u(k) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \hat{u}(n) e_{k/M}(n) \dots\dots\dots (8)$$

$$\hat{u}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} u(k) e_{-n/M}(k)$$

다시 말해서, 식(8)의 $\hat{u}(n)$ 은 $u(k)$ 의 DFT이다. 이제, 신호 $u(k)$ 를 변조한 식(9)의 신호를 고려한다.

$$x(k) = e_f(k) u(k) \dots\dots\dots (9)$$

식(8)에 식(9)를 대입하면, $x(k)$ 는 주파수 $f, \frac{f+1}{M}, \dots, f + \frac{M-1}{M}$ 의 복소지수의 선형결합으로 표현된다. 이 선형결합 계수는, $1/M$ 을 곱해주면 $u(k)$ 의 DFT 계수가 된다. 사실, 식(9)의 형태를 갖는 모든 신호의 부분공간은 정확히 다음 식(10)과 같은 M -차원 부분공간이 된다.

$$S_f = \text{span} \{ e_f, e_{f+1/M}, \dots, e_{f+(M-1)/M} \} \dots\dots (10)$$

이제, 시스템에 대해서 고려한다. 주기 M 의 LPTV 시스템을 H 로 표기한다. S_f 는 이 H 에 대한 불변 부분공간이다. 따라서, M -주기적 신호 $u(k)$ 에 대해서, H 의 입력이 $x(k) = e_f(k) u(k)$ 의 형태를 가진다면, 그 출력은 $y(k) = e_f(k) v(k)$ 의 형태를 가질 것이다. 여기서, $v(k)$ 역시 M -주기적 신호이다. $u(k)$ 와 $v(k)$ 의 DFT를 벡터형태로 나타내면 다음 식(11)과 같이 $H_{AC}(f)$ 로 표기되는 $M \times M$ 행렬의 관계를 갖는다.

$$\begin{bmatrix} \hat{v}(0) \\ \vdots \\ \hat{v}(M-1) \end{bmatrix} = H_{AC}(f) \begin{bmatrix} \hat{u}(0) \\ \vdots \\ \hat{u}(M-1) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

여기서, $H_{AC}(f)$ 는 에일리어스 성분(alias component, AC) 행렬이라고 부른다 [5]. 이 행렬은 중파수 응답 함수의 일반화된 것이다. $H_{AC}(f)$ 의 정의에서 f 의 구간은 $-\frac{1}{2M} \leq f \leq \frac{1}{2M}$ 이다.

H 에 대한 주파수 응답 함수를 얻는 두 번째 방법은, LTI 시스템을 얻기 위해 입출력 신호를 블록화 하는 것이다. 그리고 나서, 블록화 된 시스템의 주파수 응답 행렬을 취하는 것이다. 블록화된 시스템의 구체적인 형태는 그림 1과 같다.

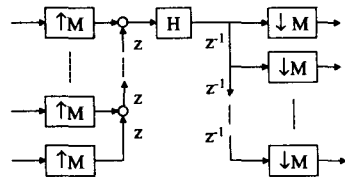


그림 1. LTI 시스템을 얻기위한 H의 블록화
Fig 1. Blocking H to get LTI system

그림 1에서, M -입력, M -출력의 블록화된 시스템이 정의되며, H_B 로 표기한다. H_B 의 주파수 응답 행렬은 $H_B(f)$ 로 표기한다. 이 블록화 방법은 참고문헌 [3]에서 사용한 접근법이다.

$H_{AC}(f)$ 와 $H_B(f)$ 사이의 관계에 대해서 알아본다. 이를 위해서, 다음 식(12)의 행렬을 정의한다.

$$V(f) = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-j2\pi f} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-j2\pi(M-1)f} \\ 1 & e^{j2\pi/M} & \dots & e^{j2\pi(M-1)/M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j2\pi(M-1)/M} & \dots & e^{j2\pi(M-1)^2/M} \end{bmatrix} \times \dots\dots (12)$$

이 식에서, DFT 행렬이 표현된다는 것을 알 수 있다. 이러한 정의 식(12)에서 다음의 정리를 얻는다.

[정리 1] M -주기를 갖는 LPTV 시스템 H 에 대해서, AC 행렬 $H_{AC}(f)$ 와 블록 시스템의 주파수 응답 행렬 $H_B(f)$ 는 다음 식(13)의 관계를 갖는다.

$$V(f)H_{AC}(f) = H_B(Mf) V(f) \dots\dots\dots (13)$$

이 정리와 식 $V(f)^* V(f) = \frac{1}{M} I$ 로부터, 다음의 결과를 얻는다.

[따름정리 1] $-\frac{1}{2M} \leq f \leq \frac{1}{2M}$ 의 영역에 있는 각 주파수 f 에 대해서, 다음 식(14)가 만족된다.

$$\sigma_{\max}[H_{AC}(f)] = \sigma_{\max}[H_B(Mf)] \dots\dots\dots (14)$$

따라서, 위 식(14)로부터, 다음 식(15)의 결과를 얻는다.

$$\max_{-\frac{1}{2M} \leq f < \frac{1}{2M}} \sigma_{\max}[H_{AC}(f)] = \max_{-\frac{1}{2M} \leq f < \frac{1}{2M}} \sigma_{\max}[H_B(f)] = \|H_B\|_{\infty} \dots (15)$$

이 따름정리와 더불어 중요한 사실은 이득 $G(l_2, l_2)$ 가 AC 행렬의 주파수에 따른 최대 특이값중에서 최대값과 같다는 것이다 [5]. 이들 내용을 요약하면 다음 식(16)으로 표현되는 결과를 얻을 수 있다.

$$G(l_2, l_2) = \max_{-\frac{1}{2M} \leq f < \frac{1}{2M}} \sigma_{\max}[H_{AC}(f)] = \|H_B\|_{\infty} \dots (16)$$

다음절에서는, 지금까지 논의한 입출력 이득을 필터뱅크에 적용한다.

3. 필터 뱅크에서의 왜곡

다음 그림 2의 M-채널 필터 뱅크를 고려한다.

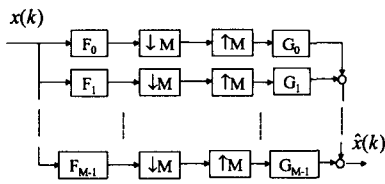


그림 2. M-채널 필터 뱅크
Fig 2. M-channel filter bank

그림 2에서, 재구성 신호(reconstructed signal) $\hat{X}(z)$ 를 $X(z)$ 로 나타내면 식(17)과 같다 [6].

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(zW^l) \sum_{k=0}^{M-1} F_k(zW^l) G_k(z) \dots (17)$$

여기서, $W = e^{-j2\pi/M}$ 이다. 위 식(17)은 등가적으로 다음 식(18)과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{X}(z) = \sum_{l=0}^{M-1} A_l(z) X(zW^l) \dots (18)$$

여기서, $A_l(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F_k(zW^l) G_k(z)$ 이다. 식(18)은 주파수 f의 항으로 식(19)와 같이 표현

하면 해석에 있어서 좀더 편리하다.

$$\hat{X}(f) = \sum_{l=0}^{M-1} A_l(f) X(f - l/M) \dots (19)$$

여기서, $X(f - l/M)$, $l > 0$ 은 다운샘플링과 업샘플링 동작에 의해 나타난 것이다. 따라서, 재구성 신호에는 세 개의 왜곡이 존재한다 [6]. 그 하나는 에일리어징 왜곡이다. 각각의 모든 가능한 입력 $x(n)$ 에 대해서, 에일리어징이 발생하지 않을 필요충분조건은 다음 식(20)을 만족하는 것이다.

$$A_l(f) = 0, 1 \leq l \leq M-1 \dots (20)$$

식(20)으로부터, 주파수 f에서의 에일리어징 왜곡을 측정하는 성능지수를 다음 식 (21)로 정의할 수 있다.

$$AD(f) = \left(\sum_{l=1}^{M-1} |A_l(f)|^2 \right)^{1/2} \dots (21)$$

또한, 최대 에일리어징 왜곡은 식(22)와 같이 정의한다.

$$AD_{\max} = \max_f AD(f) \dots (22)$$

나머지 두 개의 왜곡으로서, 진폭 왜곡과 위상 왜곡이 있다. $l > 0$ 에 대해서, $A_l(f) = 0$ 이 되게 함으로써, 에일리어징 항을 어느 정도 제거한다면, 전체 시스템은 주파수 응답 함수 $A_0(f)$ 를 갖는 LTI 시스템이 된다. 이 경우에, $A_0(f)$ 가 전역통과(allpass) 특성을 갖지 않으면, 그 시스템은 진폭 왜곡을 갖는다고 말한다. 또한, $A_0(f)$ 가 비선형 위상을 가지면, 위상 왜곡을 갖는다고 말한다. 많은 경우에 있어서, 필터 뱅크가 신호 $x(k)$ 를 재구성하려면, 적어도 상수 축척(constant scaling)과 일정한 시간 지연 오차를 갖도록 해야한다. 즉, $x(k)$ 에서 $\hat{x}(k)$ 로의 바람직한 시스템은 식(23)과 같은 주파수 응답 함수를 갖는 LTI 시스템이어야 한다는 것이다.

$$T_d(f) = ce^{-j2\pi f m}, c > 0, m \geq 0 \dots (23)$$

이러한 사실에 착안하여, 주파수 f에서의 진폭 왜곡과 위상 왜곡의 지수를 식(24)와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 MD(f) &= \|T_d(f) - |A_o(f)\| = |c - |A_o(f)\| \\
 PD(f) &= |\angle T_d(f) - \angle A_o(f)| = |-2\pi fm - \angle A_o(f)| \\
 \dots\dots\dots (24)
 \end{aligned}$$

진폭 왜곡과 위상 왜곡을 함께 나타내는 방법으
로, 다음 식(25)와 같은 왜곡 지수를 고려할 수 있
다.

$$D(f) = |T_d(f) - A_o(f)| \dots\dots\dots (25)$$

위 식들로부터, $MD(f) \leq D(f)$ 임을 알 수 있다. 주
파수 f에 걸쳐 최대 지수들은 MD_{max} , PD_{max} , 그리고
 D_{max} 로 표기한다. 특히, $D_{max} = \|T_d - A_o\|_{\infty}$ 이다.

현실적인 제약 때문에, 앞에서 언급한 세 개의
왜곡들을 동시에 제거하는 것은 거의 불가능하다
[6]. 하지만, 체계적인 설계를 통해, 이들 왜곡을
줄일 수 있다.

왜곡을 줄일 수 있는 설계방법으로서, 참고문헌
[3]의 설계절차를 요약하면, 다음과 같다. 입력을
제대로 부호화하기 위해서, 해석필터는 이미 설계
되었다고 가정한다. 그리고 나서, 오차 시스템의
이득을 최소화하기 위해서, 합성필터(synthesis
filter)를 설계한다. 다시 말해서, 필터 뱅크의 시간
영역 연산자를 $T: x \mapsto \hat{x}$ 로 표기하고, 주파수 응
답이 $T_d(f)$ 인 이상적인 시스템을 T_d 로 나타냈을
때, 그 오차시스템 $T_d - T$ 의 $G(l_1, l_2)$ 이득인 J를
최소로 하는 설계방법이다. 이 설계방법이 어떻게
왜곡을 줄일 수 있는지 알아보도록 한다. 이 것은
J값이 작으면, 왜곡지수의 값도 작아진다는 것을
보임으로써 해결된다. 이에 대한 유계조건은 정리
2와 같다.

[정리 2] M-채널 필터뱅크에 대해서, 다음의 부
등식(26)이 만족된다.

$$\begin{aligned}
 D(f)^2 + AD(f)^2 &\leq J^2, \forall f \\
 MD(f)^2 + AD(f)^2 &\leq J^2, \forall f \\
 AD_{max} &\leq J \\
 D_{max} &\leq J \\
 MD_{max} &\leq J \\
 PD_{max} &\leq \sin^{-1}(J/c)
 \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

정리 2의 AD_{max} , MD_{max} , 그리고 PD_{max} 에 대
한 상계(upper bound)의 값을 구체적으로 살펴보기
위해서, 참고문헌 [3]의 예제 2에서 언급한 2-채널 필
터 뱅크를 고려한다. 해석필터 $F_0(z)$ 는 해밍창을
사용한 19차의 FIR 선형위상 저역통과 필터이다. 고
역통과 필터인 $F_1(z)$ 는 단순히 $F_1(z) = F_0(-z)$ 로
선택한다. 합성 필터 $G_0(z)$ 와 $G_1(z)$ 는, 이상적인
지연 시스템 $T_d = z^{-2}$ 를 갖는 오차 시스템의 J를 최
소화함으로써, 설계된다. 최적 필터 G_0 와 G_1 은 고
차의 IIR 필터가 되며, 최적 성능지수는 $J_{opt} = 0.0298$
이다.

이러한 시스템에 대해서, AD_{max} , MD_{max} , 그리
고 PD_{max} 의 실제 값은 정의에 의해 계산될 수 있
으며, 그 값은 표 1과 같다.

표 1 최대 왜곡지수의 실제값
Table 1 True values of maximum distortion
indices

AD_{max}	MD_{max}	PD_{max}
0.01489	0.0150	0.855°

이 시스템에 상응하는 성능 지수 J의 값이
0.0298이므로, 정리 2에서 주어진 3개의 왜곡에 대
한 지수들의 상계는 표 2와 같다.

표 2. 정리 2에 의한 왜곡지수의 상계
Table 2. Upper bound of distortion indices by
Theorem 2

AD_{max}	MD_{max}	PD_{max}
0.0298	0.0298	1.7077°

이상의 결과를 살펴보면, 정리 2의 상계와 실제
값 사이에는 대략 2배 정도의 차이가 있다. 따라
서, 성능지수 J를 최소화하는 필터를 설계하면, 왜
곡을 상당히 줄일 수 있다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는, 다중비 시스템과 같은 LPTV 시

시스템에 대해서, l_2 유도 노름과 RMS 유도 이득이 서로 등가임을 보였다. 특히, 오차 시스템에 대한 이득을 최소화시키는 방법을 사용하여 필터를 효과적으로 설계하는 접근법을 제시하였다. 마지막으로, 다중비 필터 뱅크의 구체적인 예를 통해, 제시된 설계방법으로 왜곡을 최소화시킬 수 있음을 보였다.

참고문헌

[1] M. Araki and Y. Ito, Frequency-response of sampled-data systems I : open-loop considerations, Technical Report, Division of Applied System Science, Kyoto University, 1992.

[2] B. Bamieh and J.B. Pearson, "A general framework for linear periodic systems with application to H_∞ sampled-data control", IEEE Trans. Auto. Control, Vol. 37, pp. 418-435, 1992.

[3] T. Chen and B.A. Francis, "Design of multirate filter banks by H_∞ optimization", IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 43, No. 12, 1995.

[4] R.G. Shenoy, "Analysis of multirate components and application to multirate filter design", Proc. ICASSP, pp. III-121-III-124, 1994.

[5] R.G. Shenoy, D. Burnside, and T.W. Parks, "Linear periodic systems and multirate filter design", IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 42, pp. 2242-2256, 1994.

[6] P.P. Vaidyanathan, Multirate Systems and Filter Banks, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.

[7] Y. Yamamoto, "A new approach to sampled-data control systems-a function space method", Proc. 29th IEEE CDC, pp. 1882-1887, 1990.

[8] Y. Yamamoto and P.P. Khargonekar, "On the frequency response of sampled-data systems", Proc. 32nd CDC, pp. 799-804, 1993.

[9] Y. Yamamoto, "Frequency response and its computation for sampled data systems", Systems

and Networks : Mathematical Theory and Applications, Mathematical Research Vol. 79, Proc. MTNS-93, Regensburg, Germany, U. Helmke, R. Mennicken and J. Saurer Ed. : 573-574, Academie Verlag, 1994.

[10] Y. Yamamoto and M. Araki, "Frequency responses for sampled-data systems-their equivalence and relationships", Linear Algebra and Its Applications, Vol. 205-206, pp.1319-1339, 1994.



이상철 (Sang-Chuel, Lee)
 1990년 : 광운대 대학원 전자공학과 졸업(석사).
 1990년~1995년 : 국방과학연구소 근무.
 2000년 : 광운대 대학원 제어계측 공학과 졸업(공학박).

2000년~현재 : 재능대학 정보통신계열 전임강사.
 ※ 관심분야 : 디지털 신호처리.



박계원 (Kye-Won, Park)
 1972년 : 광운대학교 무선통신과 (공학사).
 1978년 : 건대행정대학원 통신행정 (행정학석사).
 1973년~현재 : 재능대학 정보통신계열 교수.

※ 관심분야 : 통신정책, 데이터통신.