

# 최소자승법을 이용한 선형시불변시스템의 간소화

## Simplification of Linear Time-Invariant Systems by Least Squares Method

추연석, 문환영

(Younseok Choo and Hwan-Young Moon)

**Abstract** : This paper is concerned with the simplification of complex linear time-invariant systems. A simple technique is suggested using the well-known least squares method in the frequency domain. Given a high-order transfer function in the  $s$ - or  $z$ -domain, the squared-gain function corresponding to a low-order model is computed by the least squares method. Then, the low-order transfer function is obtained through the factorization. Three examples are given to illustrate the efficiency of the proposed method.

**Keywords** : transfer function, simplification, least squares method, squared-gain function

### I. 서론

복잡한 선형시스템의 간소화문제는 공학의 여러 분야에서 매우 중요한 역할을 하고 있다[1]. 예를 들어 제어시스템을 설계하고자 하는 경우 복잡한 모델 대신 차수가 비교적 낮은 근사모델을 사용하면 주어진 요구조건을 만족시키면서 소프트웨어 혹은 하드웨어 관점에서 보다 쉽게 분석 및 구현을 할 수 있다. 물론 이때 간소화된 모델(즉, 근사모델)은 본래 시스템의 특성을 가능하면 많이 유지하도록 구해져야 한다.

지난 30여년간 이에 대한 연구가 꾸준히 수행되어온 결과, 주파수영역 및 시간영역상에서의 수많은 간소화 기법들이 발표되었으며 전력계통을 포함한 많은 시스템에 성공적으로 응용되었다[1,2]. 특히, 주파수영역상의 기법들은 대부분의 경우  $s$ - 혹은  $z$ -영역에서의 정보(Taylor 급수의 계수, Markov 매개변수 등)를 이용하는데 치중되어 있으며, 본래모델이 가지고 있는 주파수 응답특성을 직접 이용하는 방법은 [3-6] 이외에는 별로 알려진 것이 없다. [3]에서는 본래모델의 주요 주파수응답특성(이득 및 위상여유, 최대이득, 대역폭 등)을 보존하는 근사모델을 구하였으나, 복잡한 비선형 방정식들을 수치해석적 방법으로 풀어야 한다. [4]에서는 본래모델과 근사모델에 대한 주파수응답의 이득제공함수들이 선택된 몇 개의 주파수에서 같은 기울기 혹은 값을 갖도록 한 후 인수분해에 의해 근사모델을 계산하였으나, 역시 이득제공함수의 Taylor급수를 구해야 하는 등 많은 노력이 필요하다.  $s$ -영역과 주파수영역에서의 정보를 동시에 이용하는 방법이 [5]에 제안되었으나, 근사모델의 성능이 선택된 주파수에 매우 민감하므로, [7]에서 지적되었듯이 수많은 시뮬레이션이 필요하며 매번 주파수영역에서의 정보에 해당하는 복잡한 방정식을 세우야 하는 불편이 있다. 또한 [6]에서는 본래모델과 근사모델에 대한 주파수응답의 이득제공함수의 차이가 최소가 되도록 근사모델에 해당하는 함수의 계수를 LP(Linear Pro-

gramming)기법에 의해 계산하였으나 여러 개의 미지수에 대한 제약조건 때문에 프로그래밍이 쉽지 않으며 또한 가중함수의 영향을 많이 받을 것으로 보인다.

본 논문에서는 주파수영역에서 최소자승법을 이용하여 복잡한 선형시불변시스템의 간소화된 모델을 구하는 간단한 방법을 제시한다. 차수가 높은 전달함수가 주어진 경우 근사모델에 해당하는 주파수응답의 이득제공함수를 최소자승법을 이용한 Curve Fitting에 의해 구한 다음 인수분해를 통하여 간소화된 시스템의 전달함수를 계산한다. 주파수영역에서의 정보를 이용한다는 측면에서 위에 언급된 기법들과 비슷하다고 볼 수 있으나, 공식화 및 프로그래밍이 훨씬 간편하다는 이점이 있다. [6]의 경우와는 달리 근사모델의 안정성이 미리 보장되지는 않으나, Curve Fitting이 잘 이루어질 경우 안정성 문제는 발생하지 않는다. 세 가지 예제를 통하여 본 논문에서 제안된 방법의 효율성을 살펴본다.

### II. 모델 간소화

#### 1. 연속시간시스템

다음과 같은 전달함수로 표현되는 두 선형시불변시스템을 고려한다.

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n} \quad (1)$$

$$G_p(s) = \frac{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_qs^q}{c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_ps^p} \quad (2)$$

단,  $m < n$ ,  $q < p < n$ 이며 분자, 분모 다항식의 모든 계수는 실수이다. (1)에 의해 주어진 최소위상의 안정된  $n$ 차 시스템을 차수가 낮은 (2)의 전달함수를 갖는  $p$ 차 시스템으로 간소화하고자 한다. 이때 두 시스템의 주파수응답이 가능하면 일치하도록 (2)의 계수들을 결정한다. 이를 위하여 (2)에 대한 주파수응답의 이득제공함수를 최소자승법에 의한 Curve Fitting을 이용하여 구한다.

(1)과 (2)에 대한 주파수응답의 이득제공함수  $F(w)$ 와

$F_p(w)$ 는 각각 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$F(w) = \frac{G(jw)G(-jw)}{A_0 + A_2w^2 + \dots + A_{2n}w^{2n}} \quad (3)$$

$$F_p(w) = \frac{G_p(jw)G_p(-jw)}{C_0 + C_2w^2 + \dots + C_{2p}w^{2p}} \quad (4)$$

(1)과 (2)의 dc이득을 같게 하기 위해  $C_0 = A_0$ ,  $D_0 = B_0$ 로 가정한 후( $B_0/A_0 = D_0/C_0$ 를 만족하는 임의의  $C_0, D_0$ 를 선택해도 같은 결과가 얻어짐)  $F(w) = F_p(w)$ 로 놓으면, 미지수  $C_2, \dots, C_{2p}$ 와  $D_2, \dots, D_{2q}$ 에 대한 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$h(w)X = y(w) \quad (5)$$

단,

$$\begin{aligned} h(w) &= [w^2 \dots w^{2q} - w^2 F(w) \dots - w^{2p} F(w)] \\ X &= [D_2 \ D_4 \ \dots \ D_{2q} \ C_2 \ C_4 \ \dots \ C_{2p}]^T \\ y(w) &= A_0 F(w) - B_0 \end{aligned}$$

(5)는 각각의 주파수  $w$ 에 대하여  $(p+q)$ 개의 미지수가 포함된 방정식이며,  $F(w)$ 의 형태를 고려하여 적절히 선택된 구간에서 샘플링된 주파수  $w_1, w_2, \dots, w_r$  ( $r > p+q$ )에 대한  $r$ 개의 방정식은 아래와 같은 행렬형태로 나타낼 수 있다.

$$HX = Y \quad (6)$$

단,  $H$ 와  $Y$ 는 각각  $r \times (p+q)$  행렬,  $r$ 차원 열벡터이며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H &= [h(w_1)^T \ h(w_2)^T \ \dots \ h(w_r)^T]^T \\ Y &= [y(w_1) \ y(w_2) \ \dots \ y(w_r)]^T \end{aligned}$$

(6)의 최소자승해는  $X = (H^T H)^{-1} H^T Y$ 로 주어지며, 이로써  $p$ 차 근사모델에 대한 주파수응답의 이득제공함수  $F_p(w)$ 가 구해진다.

$G_p(s)$ 는 (2)와 (4)의 관계로부터 쉽게 결정할 수 있다 [6]. 즉, Curve-Fitting이 잘 이루어질 경우  $F_p(w)$ 의 영점과 극점은  $\omega^2$ 에 대해서는 공액복소수로,  $\omega$ 에 대해서는 원점에 대하여 대칭인 공액복소수로 나타난다. 따라서,  $F_p(w)$ 에  $\omega^2 = -s^2$ 을 대입한 함수  $F_p(s)$ 는 다음과 같은 형태로 인수분해된다.

$$F_p(s) = K \frac{\prod_{i=1}^p (s+z_i)(s-z_i)}{\prod_{i=1}^p (s+p_i)(s-p_i)} \quad (7)$$

단,  $Re\{z_i\}, Re\{p_i\} > 0$ 이다.  $F_p(s) = G_p(s)G_p(-s)$ 이므로, 근사모델  $G_p(s)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$G_p(s) = \sqrt{|K|} \frac{\prod_{i=1}^p (s+z_i)}{\prod_{i=1}^p (s+p_i)} \quad (8)$$

2. 이산시간시스템

이산시간시스템에 대한 간소화 과정도 연속시간시스템의 경우와 비슷하다. 두 이산시간시스템이 다음과 같은 전달함수를 갖는다고 가정한다.

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (9)$$

$$G_p(z) = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_q z^{-q}}{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_p z^{-p}} \quad (10)$$

단  $m \leq n$ ,  $q \leq p < n$ , 모든 계수는 실수이며, 최소위상의 안정한  $n$ 차 전달함수 (9)를  $p$ 차 전달함수 (10)으로 간소화하고자 한다.

(9)와 (10)에 대한 주파수응답의 이득제공함수  $F(w)$ 와  $F_p(w)$ 는 각각 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$F(w) = \frac{G(e^{jw})G(e^{-jw})}{A_0 + A_1 \cos w + \dots + A_n \cos nw} \quad (11)$$

$$F_p(w) = \frac{G_p(e^{jw})G_p(e^{-jw})}{C_0 + C_1 \cos w + \dots + C_p \cos pw} \quad (12)$$

(9)와 (10)의 dc이득을 같게 하기 위해 다음과 같이 가정한다.

$$C_0 = \sum_{i=0}^n A_i - \sum_{i=1}^n C_i \quad (13)$$

$$D_0 = \sum_{i=0}^m B_i - \sum_{i=1}^q D_i \quad (14)$$

$F(w) = F_p(w)$ 로 놓으면, 미지수  $C_1, C_2, \dots, C_p$ 와  $D_1, D_2, \dots, D_q$ 는 다음 방정식을 만족한다.

$$[h_1(w) \ h_2(w)]X = y(w) \quad (15)$$

단,

$$\begin{aligned} h_1(w) &= [1 - \cos w \ 1 - \cos 2w \ \dots \ 1 - \cos qw] \\ h_2(w) &= [\cos w - 1 \ \cos 2w - 1 \ \dots \ \cos pw - 1] F(w) \\ X &= [D_1 \ D_2 \ \dots \ D_q \ C_1 \ C_2 \ \dots \ C_p]^T \\ y(w) &= (1 - F(w)) \sum_{i=0}^n A_i \end{aligned}$$

$F(w)$ 의 형태를 고려하여 적절히 선택된 구간에서 샘플링된 주파수  $w_1, w_2, \dots, w_r$  ( $r > p+q$ )에 대하여 (15)는 다음의 행렬형태로 표현된다.

$$HX = Y \quad (16)$$

단,

$$H = \begin{bmatrix} h_1(w_1) & h_2(w_1) \\ h_1(w_2) & h_2(w_2) \\ \vdots & \vdots \\ h_1(w_r) & h_2(w_r) \end{bmatrix}$$

$$Y = [y(w_1) \ y(w_2) \ \dots \ y(w_r)]^T$$

(16)의 최소자승해  $X = (H^T H)^{-1} H^T Y$ 와 (13) 및 (14)로부터 (12)의 모든 계수가 구해진다.

Euler 법칙  $\cos \omega = (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) = (z^l + z^{-l})/2$ 를 이용하여 (12)의  $F_p(w)$ 를  $z$ 의 함수로 표현하면 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$F_p(z) = K^* \frac{z^{-q}}{z^{-p}} \frac{A(z)}{B(z)} \quad (17)$$

단,

$$A(z) = z^{2q} + a_1 z^{2q-1} + a_2 z^{2q-2} + \dots + a_q z^q + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + 1$$

$$B(z) = z^{2p} + b_1 z^{2p-1} + b_2 z^{2p-2} + \dots + b_q z^p + \dots + b_2 z^2 + b_1 z + 1$$

즉,  $A(z)$ ,  $B(z)$ 의 계수는 각각  $z^q$ ,  $z^p$ 의 계수를 중심으로 대칭구조를 이루고 있다. 이러한 다항식을 인수분해할 경우 한 인자와 그 인자의 역수가 반드시 나타나므로,  $F_p(z)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_p(z) = K^* \frac{z^{-q}}{z^{-p}} \frac{\prod_{i=1}^q (z - z_i)(z - 1/z_i)}{\prod_{i=1}^p (z - p_i)(z - 1/p_i)} \quad (18)$$

단,  $|z_i|$ ,  $|p_i| < 1$ 이다. (18)로부터  $G_p(z)$ 는 다음과 같이 주어지며

$$G_p(z) = K \frac{z^{-q}}{z^{-p}} \frac{\prod_{i=1}^q (z - z_i)}{\prod_{i=1}^p (z - p_i)} \quad (19)$$

이때  $K$ 는 dc이득 보존조건, 즉,  $G_p(1) = G(1)$ 의 관계로부터 쉽게 계산된다.

### III. 예제

이 장에서는 참고문헌[3]의 연속시간시스템, 참고문헌 [6,8]의 이산시간시스템에 본 논문에서 제시된 기법을 적용하여 근사모델을 구한 후, Bode 선도와 단위계단응답의 적분자승오차 및 오차제곱적분을 통해 근사성능을 비교해 본다. 특히 예제 3에서는 고차시스템이 비최소위상인 경우에도 적절히 근사모델의 영점을 선택함으로써 본 논문에서 제안된 방법에 의해 근사성능이 우수한 모델을 구할 수 있음을 보인다.

예제 1: 어떤 유도탄의 단위궤환 제어시스템이 다음의 11차 전달함수로 표현된다[3].

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_5 s^5}{a_0 + a_1 + a_2 s^2 + \dots + a_{11} s^{11}} \quad (20)$$

단,

$$a_0 = 8.80215851 \times 10^{18}, \quad a_1 = 2.41904742 \times 10^{19}$$

$$a_2 = 2.91192056 \times 10^{18}, \quad a_3 = 2.42040543 \times 10^{18}$$

$$a_4 = 6.66739703 \times 10^{18}, \quad a_5 = 9.74992321 \times 10^{14}$$

$$a_6 = 9.36032997 \times 10^{12}, \quad a_7 = 6.23167531 \times 10^{10}$$

$$a_8 = 2.97695069 \times 10^8, \quad a_9 = 9.31623904 \times 10^{18}$$

$$a_{10} = 1.92355400 \times 10^{18}, \quad a_{11} = 1$$

$$b_0 = 8.80215851 \times 10^{18}, \quad b_1 = 4.61000467 \times 10^{19}$$

$$b_2 = 2.92634434 \times 10^{18}, \quad b_3 = 5.01721204 \times 10^{16}$$

$$b_4 = 2.56339637 \times 10^{14}, \quad b_5 = 1.49452331 \times 10^{14}$$

[3]에서 유도된 3차 근사모델은 다음과 같다.

$$G_3(s) = \frac{0.243466s^2 + 20.55661s + 6.37807}{s^3 + 1.259008s^2 + 10.46222s + 6.37807} \quad (21)$$

본 논문에서 제안된 방법을 이용하여 구한 3차 모델과 (21)의 근사성능을 비교해본다. (20)에 대한 주파수 응답의 이득제곱함수  $F(w)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$F(w) = \frac{G(jw)G(-jw)}{A_0 + A_2 w^2 + A_4 w^4 + \dots + A_{22} w^{22}}$$

단,

$$A_0 = 7.74779944 \times 10^{37}, \quad A_2 = 5.33916671 \times 10^{38}$$

$$A_4 = -1.0744848 \times 10^{38}, \quad A_6 = 5.51707012 \times 10^{36}$$

$$A_8 = -2.2283173 \times 10^{32}, \quad A_{10} = 2.40422632 \times 10^{27}$$

$$A_{12} = 1.29742906 \times 10^{24}, \quad A_{14} = -1.2467929 \times 10^{20}$$

$$A_{16} = 6.57101639 \times 10^{15}, \quad A_{18} = -1.5270848 \times 10^{11}$$

$$A_{20} = 1.83681218 \times 10^6, \quad A_{22} = 1$$

$$B_0 = 7.74779944 \times 10^{37}, \quad B_2 = 2.07369801 \times 10^{39}$$

$$B_4 = 3.9421297 \times 10^{36}, \quad B_6 = 1.03074509 \times 10^{33}$$

$$B_8 = 5.0713329 \times 10^{28}, \quad B_{10} = 2.23359993 \times 10^{22}$$

$A_0 = B_0$ 이므로, 구하고자 하는 3차 근사모델에 대한 주파수 응답의 이득제곱함수  $F_3(w)$ 를 다음과 같이 가정한다.

$$F_3(w) = \frac{1 + D_2 w^2 + D_4 w^4}{1 + C_2 w^2 + C_4 w^4 + C_6 w^6}$$

함수  $F(w)$ 의 형태를 고려하여 구간 [2,5]에서 0.01 [rad/sec] 간격으로 선택된  $w$ 값들을 이용하여 curve fitting을 수행한 결과  $F_3(w)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$F_3(w) = \frac{1 + 27.05067w^2 + 0.05323w^4}{1 + 6.96927w^2 - 1.40192w^4 + 0.07194w^6}$$

$F_3(w)$ 를 (7)의 형태로 표현하면

$$F_3(s) = -0.73991 \frac{\prod_{i=1}^2 (s + z_i)(s - z_i)}{\prod_{i=1}^3 (s + p_i)(s - p_i)}$$

단,

$$z_1 = 0.192277, \quad z_2 = 22.54302$$

$$p_1 = 0.288937 + 3.146037i$$

$$p_2 = 0.288937 - 3.146037i$$

$$p_3 = 0.37335$$

따라서

$$G_3(s) = \frac{3.7285 + 19.5564s + 0.86018s^2}{3.7285 + 10.1969s + 0.95143s^2 + s^3} \quad (22)$$

그림 1에 (20)-(22)의 Bode선도를 비교한 결과가 나타나 있다. (21)과는 달리 (22)의 경우 약  $w=20[\text{rad/sec}]$ 까지 본래의 11차 모델과 거의 같은 주파수응답 특성을 보이고 있다. [9]의 방법을 이용하여 단위계단응답의 오차제곱적분값을 계산해 보면 (21)이 0.0972인 반면 (22)는 0.00213으로서 약 1/40로 줄어들고 있다. 따라서 (21)에 비해 (22)가 훨씬 더 좋은 근사성능을 보이고 있는 것을 알 수 있으며, [3]의 매우 복잡한 계산과정을 고려할 때 본 논문에서 제안된 방법의 효율성을 엿볼 수 있다.

예제 2 : 다음과 같은 4차 전달함수로 표현되는 이산시간 시스템을 2차 시스템으로 간소화하고자 한다[6].

$$G(z) = \frac{0.547377 - 0.40473z^{-1} + 0.319216z^{-2} - 0.216608z^{-3}}{1 - 1.36178z^{-1} + 0.8756z^{-2} - 0.551205z^{-3} + 0.28215z^{-4}} \quad (23)$$

LP기법을 이용하여 [6]에서 다음의 2차 근사모델이 유도되었다.

$$G_2(z) = \frac{0.487448 - 0.326732z^{-1}}{1 - 1.515292z^{-1} + 0.675683z^{-2}} \quad (24)$$

(23)에 대한 주파수응답의 이득제공함수  $F(w)$ 를 구해보면

$$F(w) = \frac{B_0 + B_1 \cos w + B_2 \cos 2w + B_3 \cos 3w}{A_0 + A_1 \cos w + A_2 \cos 2w + A_3 \cos 3w + A_4 \cos 4w}$$

단,

$$\begin{aligned} B_0 &= 0.612246, & B_1 &= -0.839762 \\ B_2 &= 0.524799, & B_3 &= -0.237133 \\ A_0 &= 4.004551, & A_1 &= -6.384615 \\ A_2 &= 3.746530, & A_3 &= -1.870849 \\ A_4 &= 0.56429 \end{aligned}$$

$F(0) = 0.06015/0.05991$ 이므로,  $F_2(w)$ 를 다음과 같이 가정한다.

$$F_2(w) = \frac{0.06015 - D_1 + D_1 \cos w}{0.05991 - C_1 - C_2 + C_1 \cos w + C_2 \cos 2w}$$

구간  $[0.2, 0.7]$ 에서  $0.01[\text{rad}]$ 간격으로 샘플링한 후 Curve Fitting을 수행했을 때의 결과는 다음과 같다.

$$F_2(w) = \frac{0.931743 - 0.871593 \cos w}{9.206418 - 12.439776 \cos w + 3.293268 \cos 2w}$$

$F_2(w)$ 를 (18)의 형태로 나타내면

$$F_p(z) = -0.26466 \frac{z^{-1}}{z^{-2}} \frac{(z - z_1)(z - 1/z_1)}{\prod_{i=1}^2 (z - p_i)(z - 1/p_i)}$$

단,

$$\begin{aligned} z_1 &= 0.691142 \\ p_1 &= 0.755454 + 0.3097369i \\ p_2 &= 0.755454 - 0.3097369i \end{aligned}$$

따라서, 2차 근사모델은 다음과 같이 구해진다.

$$G_2(z) = \frac{0.50525 - 0.3492z^{-1}}{1 - 1.51091z^{-1} + 0.66665z^{-2}} \quad (25)$$

그림 2는 (23)-(25)의 Bode 선도를 비교한 것이다. Bode 선도의 경우, (24)와 (25)가 전체적으로 거의 비슷하나,  $w=0.4[\text{rad}]$ 의 peak 부근에서 (25)가 약간 더 정확한 주파수응답을 보이고 있는 것을 볼 수 있다. [9]의 방법에 의해 (24)와 (25)의 오차제곱합을 계산해 보면 각각 0.00565, 0.00388로 (25)가 약간 더 우수한 근사성능을 보이고 있음을 알 수 있다. [6]의 LP기법보다는 본 논문에서 제안된 방식의 공식화 및 프로그래밍 과정이 더 간편한 것을 고려할 때, 이 예제를 통해서도 본 논문에서 제안된 방식의 효율성을 또한 엿볼 수 있다.

예제 3 : 다음과 같은 5차 전달함수를 갖는 이산시간시스템을 2차 모델로 간소화하고자 한다[8].

$$G(z) = \frac{z^{-1} + 3.2z^{-2} - 2.9z^{-3} + 2z^{-4} + 0.5z^{-5}}{1 - 0.3z^{-1} - 0.87z^{-2} + 0.307z^{-3} + 0.0822z^{-4} - 0.0216z^{-5}} \quad (26)$$

위의 두 예제와는 달리 (26)은 -4.03에 한 개의 영점을 갖는 비최소위상의 안정한 시스템이나, 본 논문의 방법을 똑같이 적용할 수 있다. [8]에서 근사모델의 임펄스응답오차에 대한  $l_1$ ,  $l_2$  및  $l_\infty$  norm을 성능평가지수로 사용하여 구한 3개의 근사모델 중  $l_2$  최적근사모델은 다음과 같다.

$$G_2(z) = \frac{1.2444z^{-1} + 6.0633z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.72z^{-2}} \quad (27)$$

구간  $[0, 3.14]$ 에서  $0.01[\text{rad}]$  간격으로 Curve-Fitting을 수행한 결과 구해진 주파수응답의 이득제공함수를  $z$ 의 함수로 변환한 후 (18)의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$F_2(z) = -4.5442 \frac{z^{-1}}{z^{-2}} \frac{(z - z_1)(z - 1/z_1)}{\prod_{i=1}^2 (z - p_i)(z - 1/p_i)}$$

단,

$$\begin{aligned} z_1 &= -0.1462 \\ p_1 &= -0.944 \\ p_2 &= 0.8472 \end{aligned}$$

이 경우 본래의 시스템이 비최소위상이므로 근사모델의 영점으로  $1/z_1$ 을 택하면  $G_2(z)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$G_2(z) = \frac{0.7287z^{-1} + 4.9837z^{-2}}{1 + 0.0968z^{-1} - 0.7998z^{-2}} \quad (28)$$

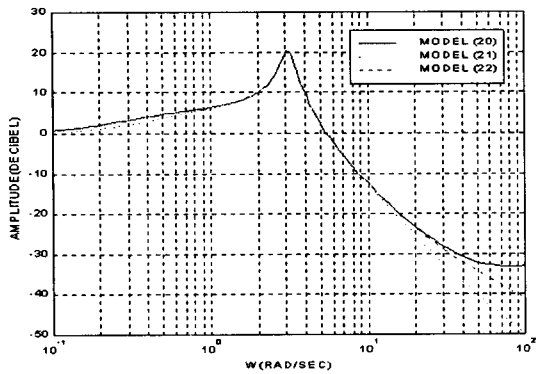


그림 1. Bode 선도의 비교.  
Fig. 1. Comparison of bode diagrams.

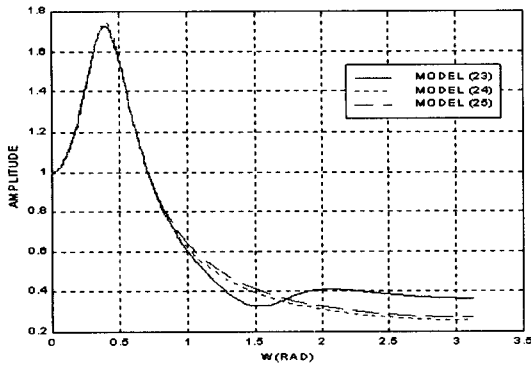


그림 2. Bode 선도의 비교.  
Fig. 2. Comparison of bode diagrams.

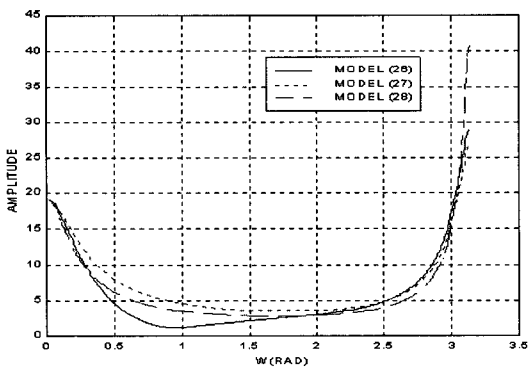


그림 3. Bode 선도의 비교.  
Fig. 3. Comparison of bode diagrams.

그림 3은 (26)-(28)의 Bode 선도를 비교한 것으로서,  $\omega > 2.5[\text{rad}]$  일 경우 (27)이 (28)보다 약간 더 본래모델에 가까우나  $\omega \leq 2.5[\text{rad}]$  일 경우에는 (28)이 더 좋은 근사 성능을 보이고 있음을 알 수 있다. 단위계단응답의 경우 오차계급합을 계산해 보면 (27)이 3.6096인데 비해 (28)은 1.9083으로 약 1/2로 줄어들고 있다. [8]과 본 논문의 근사 모델 유도과정을 고려해 볼 때 이 예제에서도 역시 같은 결론을 내릴 수 있다.

#### IV. 결론

본 논문에서는 주파수영역에서 최소자승법을 이용하여 복잡한 선형시불변시스템의 근사모델을 구하는 간단한 방법을 제시하였다. 차수가 높은 전달함수가 주어진 경우 근사모델에 해당하는 주파수응답의 이득계급합수를 최소자승법을 이용하여 구한 다음 인수분해에 의해 근사모델의 전달함수를 계산하였다. 선택된 주파수 구간에 따라 Curve Fitting의 결과가 약간씩 달라지므로 본래모델의 Bode선도로부터 적합한 구간을 설정해야 한다. 이때 주파수 구간을 약간씩 변화시켜 가면서 가장 좋은 근사모델이 유도되는 구간을 택하는 과정이 필요할 수도 있으나 이는 기존의 방법들과 비교할 때 쉬운 과정이라 볼 수 있다.

본 논문에서 제시된 방법의 주 적용대상은 최소위상의 안정된 시스템이나, 마지막 예제에서와 같이 인수분해 과정에서 영점과 극점을 적절히 선택해 줌으로써 비최소위상의 불안정한 시스템에도 적용할 수 있다. 다만 이 경우에는 양의 실수부를 갖거나(연속시간시스템의 경우) 혹은 크기가 1보다 큰(이산시간시스템의 경우) 영점과 극점의 수에 따라 여러 가지 경우를 비교해야 하는 약간의 번거로움이 있을 수 있다. 이러한 문제는 참고문헌 [4,6]도 가지고 있으며 [3,5]는 불안정한 시스템에 적용할 수 없다.

주파수 구간과 샘플링 주파수의 선정문제는 단순한 Curve-Fitting 문제로 볼 수 있기 때문에 아날로그 신호를 샘플링 할 때의 Nyquist 샘플링 주파수와 같은 구체적인 기준을 제시하기는 힘들 것으로 보인다. 다만 샘플링 구간은 주파수응답곡선의 Peak 부분이 반드시 포함되도록 설정해야 하며, 샘플링 주파수는 곡선의 형태를 고려하여 적절히 선정하면 무난할 것으로 보인다.

논문에 제시된 것 이외에 더 많은 예제에 본 논문에서 제안된 방법을 적용해본 결과 매우 우수한 근사모델을 얻을 수 있음이 확인되었다.

#### 참고문헌

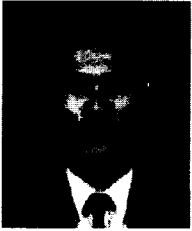
- [1] L. Fortuna, G. Nunnari, and A. Gallo, *Model order reduction techniques with applications in electrical engineering*, Springer-Verlag, N.Y., 1992.
- [2] R. Genesio and M. Milanese, "A note on the derivation and use of reduced order models," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21, pp. 118-122, 1976.
- [3] L. S. Shieh, M. Datta-Baura, and R. E. Yates, "A method of modelling transfer function using dominant frequency-response data and its application," *Int. J. Sys. Sci.*, vol. 10, pp. 1097-1114, 1979.
- [4] A. Lepschy, G. Mian, and U. Viaro, "Frequency-domain approach to model reduction problem," *Electron. Lett.*, vol. 18, pp. 829-830, 1982.
- [5] H. Xiheng, "FF-Pade method of model reduction in frequency domain," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, pp. 243-246, 1987.
- [6] M. H. Cheng and J. Y. Chang, "Model reduction for continuous and discrete-time systems via squared-

magnitude responses matching by linear programming," *Int. J. Sys. Sci.*, vol. 22, pp. 723-734, 1991.

- [7] L. A. Aguirre, "The least squares Pade method for model reduction," *Int. J. Sys. Sci.*, vol. 23, pp. 1559-1570, 1992.

- [8] O. A. Sebakhy and M. N. Aly, "Discrete-time model reduction with optimal zero locations by norm minimization," *IEE Proc. Part D, Contr. Contr. Th. Appl.*, vol. 145, pp. 499-506, 1998.

- [9] K. J. Astrom, *Introduction to stochastic control theory*, N. Y., Academic Press, 1970.



**추연석**

1980년 서울대학교 전기공학과 졸업.  
1980년 ~ 1989년 국방과학연구소 연구원.  
1991년 The Univ. of Texas at Austin 전기 및 컴퓨터 공학과 석사.  
1994년 동대학원 박사. 1994년 한국전  
자통신연구소 박사후 연수연구원. 1995년-현재 홍익대학교 과학기술대학 전자·전기·컴퓨터공학부 조교수. 주 관심분야는 스토캐스틱 제어, 적응제어, 모델 간소화.



**문환영**

1998년 홍익대학교 전자전산공학과 졸업.  
2000년 2월 동대학원 석사. 2000년 ~ 현재 (주)선양테크 자동제어부 근무. 주 관심분야는 제어이론 응용, 모델 간소화.