

# 중하중을 받는 이동로봇의 슬라이딩모드 제어

홍대희\*, 정재훈\*\*

## Sliding Mode Control for a High-Load Wheeled Mobile Robot

Daehie Hong\* and Jae H. Chung\*\*

### ABSTRACT

This paper discusses the dynamic modeling and robust control development for a differentially steered mobile robot subject to wheel slip according to high load. Consideration of wheel slip is crucial for high load applications such as construction automation tasks because wheel slip acts as a severe disturbance to the system. It is shown that the uncertainty terms due to the wheel slip satisfy the matching condition for the sliding mode control design. From the full dynamic model of the mobile robot, a reduced ideal model is extracted to facilitate the control design. The sliding mode control method ensures the dynamic tracking performance for such a mobile robot. Numerical simulation shows the promise of the developed algorithm.

**Key Words** : Wheeled Mobile Robot (WMR)(이동로봇), Differentially steered WMR(차동구동이동로봇), Tire model(타이어모델), Construction automation(건설자동화), Wheel slip (휠슬립)

### 1. 서론

강체의 평면운동은 위치  $(x, y)$ 와 방향  $\theta$ 를 포함하는 3 자유도로 기술된다. 평면에서 운동하는 이동로봇은 이와 같은 관점에서 크게 홀로노믹(Holonomic) 형과 비홀로노믹(Non-holonomic) 형 두 가지로 대별된다. 홀로노믹 형은 휠의 구조와 배열이 특수한 형태로 되어 있어서 적당한 제어를 통해 3 자유도 운동이 가능하다. 반면에, 비홀로노믹 형은 일반 자동차와 같이 휠축 방향, 즉, 횡방향 운동이 불가능한 2 자유도 운동만이 가능하다. 이 때 구속조건이 속도 항의 미분방정식으로 표시되며, 구성변수(configuration variables)인 위치와 방향으로 직접 적분이 불가능하기 때문에 비홀로노믹이라 불린다. 비홀로노믹 이동로봇은 다시 크게

조향방식과 차동구동 방식으로 나누어진다. 조향 방식은 일반 자동차와 유사하게 구동과 조향이 이루어지고, 차동구동 방식은 양 타이어의 구동 속도 차에 의해 방향과 속도가 제어된다.

차동구동형 이동로봇은 구조가 간단하며, 한 점을 중심으로 회전이 가능할 정도로 운동의 유연성이 뛰어나다. 또한, 휠의 구조가 복잡한 홀로노믹 형의 이동로봇보다 지면과의 마찰 능력에 의해 지배되는 견인력이 뛰어난 장점이 있다. 이와 같은 이유로 차동구동형 이동로봇은 건설자동화 등과 같은 중하중이 작용하는 응용 분야에서 주목을 받아왔다<sup>[1]</sup>. TMR (Tethered Mobile Robot)은 저자 등이 이러한 목적으로 개발한 이동로봇이다. 건설자동화 작업 중 많은 분야가 로봇의 정확한 추적 제어 성능을 필요로 한다. 그러나 이러한 작업들은

\* 고려대학교 기계공학과

\*\* Dept. of Aeronautical & Mechanical Engr., Univ. of California, Davis

대부분 큰 외력변동과 하중, 이에 따른 휠슬립을 동반하기 때문에 로봇의 추적제어에 많은 어려움이 존재한다.

지금까지 이동로봇의 추적제어에 관한 많은 연구가 있어왔다<sup>[2,3,4]</sup>. 그러나 이러한 연구는 대부분 힘을 포함하는 동역학모델(dynamic model)이 아니라 운동학모델(kinematic model)을 기반으로 개발되었기 때문에 저속과 저하중 조건에서만 유효하다. 지금까지 이동로봇의 응용분야가 대부분 실내나 잘 정리된 공장 등과 같은 환경 하에서 사용되는 것을 (예, AGV; Automated Guided Vehicle) 전제로 했기 때문에 문제가 없었으나, 본 연구와 같이 응용범위가 건설자동화와 같은 중하중을 받고 환경이 열악한 조건에서는 유효성이 없다고 할 수 있다. 특히 강력한 견인력(traction force)은 휠슬립을 유발시키게 되기 때문에 슬립이 없다는 가정으로 유도되는 운동학모델은 더 이상 타당성이 없으며 이를 기반으로 유도된 제어 알고리즘은 성능이 떨어질 수 밖에 없다. 그러므로, 이러한 응용분야를 위해서는 지면과 타이어의 역학을 고려한 동역학 모델 기반의 개발된 추적제어 알고리즘이 필요하다.

이상적인 동역학모델은 타이어-지면 접촉이 이상적이어서 슬립이 없다는 가정 하에서 유도된다. 이상적 동역학 모델을 가지고 귀환선형화(feedback linearization)에 관해 d'Andrea-Novel 등이 논하였다<sup>[5]</sup>. Sarker 등은 holonomic 과 non-holonomic 구속조건을 받는 역학계에 대해 연구하고 그 결과를 이동로봇에 적용하였다<sup>[6]</sup>. 그러나 이상적인 동역학모델은 휠슬립을 배제하였기 때문에 운동학모델을 기반으로 한 제어알고리즘의 한계를 크게 벗어나지 못한다.

Hamdy 와 Badreddin 은 차동구동 이동로봇에 대해 동역학 모델을 유도하였지만, 종방향 슬립만을 고려하였다<sup>[7]</sup>. 타이어의 슬립을 모두 고려한 완전한 동역학적 모델은 조향형과 차동구동형에 대해 Boyden 과 Velinsky 에 의해 유도되었다<sup>[8]</sup>. 이들은 Dugoff 의 타이어 모델<sup>[9]</sup>을 채용하여 지면과 타이어의 상호작용을 모델에 포함시켰다. Hong 등은 중하중이 작용하는 이동로봇이 비교적 높은 속도로 운동할 때 운동학모델의 한계와 이를 기반으로 유도된 제어알고리즘의 한계를 실험과 시뮬레이션을 통해 확인하였다<sup>[10]</sup>.

그러나 슬립을 포함하는 완전한 동역학모델은

차수가 증가하고 계산이 복잡하다. 또한, 슬립의 예측이 지면과 타이어의 특성 변화와 외력인 견인력 등에 의해 많은 불확실성을 포함할 수 밖에 없다. 그러나, 우리가 원하는 중하중용 이동로봇은 이와 같은 불확실성에 대해 강인성(robustness)과 적당한 추적성능을 갖추어야 하는데, 슬라이딩모드 제어는 이러한 조건을 만족하는 대표적인 강인 제어 방법이다<sup>[11,12]</sup>. 본 논문은 이러한 노력의 일환으로 강인제어의 한 방법인 슬라이딩모드 제어 기법을 중하중을 받는 이동로봇에 적용하고 이에 따른 제반 문제와 결과에 대해 논하고자 한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저, 차동구동 이동로봇의 동역학 모델을 Dugoff 타이어모델을 포함하여 유도하고, 슬립과 외력 등을 포함하는 불확실성 관련 항을 분리하여 정리한다. 다음에 이 동역학 모델에 대해 정합조건(matching condition)을 증명하고, 슬라이딩 모드 제어 알고리즘을 유도한다. 마지막으로, 제어알고리즘의 타당성을 검토하기 위하여 다양한 시뮬레이션 결과를 제시한다. 시뮬레이션에 있어서, 이동로봇의 동역학모델은 타이어와 지면의 특성 등을 포함해 모든 파라미터를 저자가 [10]에서 실험을 통해 정확성을 입증한 것을 사용하였다.

## 2. 이동로봇의 모델링

그림 1 은 외력을 받고 있는 이동로봇의 자유물체도를 나타낸 것이다. 이 그림에서 좌표계는 SAE 의 차량동역학에 대한 규정에 따라,  $x_2$  는 로봇의 종방향( $\hat{i}_2$ )을,  $y_2$  는 횡방향( $\hat{j}_2$ ), 그리고  $\psi$  는 회전을 각각 나타내며, 이들 좌표는 로봇 몸체의 무게중심(CG)에 고정된 이동좌표계이다. 또한,  $u, v$  는  $x_2, y_2$  방향의 속도를,  $r$  은  $z_2$  축을 중심으로 한 회전각속도(yaw rate)를 나타낸다. 차동구동형 WMR(Wheeled Mobile Robot)은 전륜에 수동륜인 caster 를 설치하고, 후륜 양 측의 속도차와 토크차에 의해 운동이 제어된다.

차동구동 이동로봇의 운동방정식(kinematic equations)은 각 구동휠의 회전각속도  $\omega_b, \omega_r$  과 슬립으로 표시할 수 있다. 여기서, 첨자  $l$  과  $r$  은 각각 좌·우 측을 나타낸다. 즉,  $u, v, r$  은

$$u = \frac{1}{2}(u_l + u_r), \quad v = \frac{b}{T_r}(u_l - u_r) + v^s, \quad r = \frac{1}{T_r}(u_l - u_r) \quad (1)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서,  $v^s$  은 횡방향 슬립 속도이며, 구동휠 사이의 축을 강체라 가정할 수 있기 때문에 각 휠에 대해 하나의 성분으로 표시된다.  $T_r$ 와  $b$ 는 휠 간의 간격과 휠축에서 CG까지의 거리이다. 또한,  $u_l, u_r$ 은 휠 중심점의 종방향 속도이며 종방향 슬립속도  $u_l^s, u_r^s$ 와 휠 반경  $R$ 을 포함하면 다음과 같다.

$$u_l = R\omega_l - u_l^s, \quad u_r = R\omega_r - u_r^s \quad (2)$$

위 식들은 로봇에 설정된 이동좌표계에 대한 운동방정식이며, 제어점 O의 위치좌절과 로봇의 각위치를 절대좌표계로 나타내면 다음과 같다[8].

$$\dot{X}_1(t) \equiv U = u \cos \psi - (v + er) \sin \psi \quad (3)$$

$$\dot{Y}_1(t) \equiv V = u \sin \psi + (v + er) \cos \psi \quad (4)$$

$$\dot{\psi}(t) = r \quad (5)$$

여기서,  $e$ 는 좌표원점에서 속도를 알고자 하는 점까지의 거리를 나타낸다.

그림 1에서 caster에 작용하는 힘을 무시하고, 로봇의 CG를 중심으로 한 이동좌표계에 대해 힘과 모멘트 평형을 취하면,

$$\dot{u} = \frac{1}{m}(F_{xrl} + F_{xrr} + P_x) + vr \quad (6)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}(F_{yrl} + F_{yrr} + P_y) - ur \quad (7)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{I_z} \left[ \frac{T_r}{2}(F_{xrl} - F_{xrr}) - b(F_{yrl} + F_{yrr}) - dP_y \right] \quad (8)$$

$$\dot{\omega}_l = \frac{1}{I_e} [n\tau_l - F_{xrl}R] \quad (9)$$

$$\dot{\omega}_r = \frac{1}{I_e} [n\tau_r(t) - F_{xrr}R] \quad (10)$$

와 같은 상태변수로 표현된 동역학방정식(dynamic equations)을 얻을 수 있다. 여기서  $m$ 은 로봇의 질량,  $I_z$ 는  $z$  축을 중심으로 한 관성모멘트,  $P_x$ 와  $P_y$ 는 작업을 수행하는 틀에 작용하는 힘,  $d$ 는 CG부터 틀의 거리,  $F_{xrr}, F_{yrr}, F_{xrl}$ 와  $F_{yrl}$ 는 구동휠에 작용하는 타이어 힘을 나타낸다.  $I_e$ 는 휠과 모터가 조합된 구동계의 유효관성모멘트를 나타낸다. 또한,  $\tau_l, \tau_r$ 은 모터가 발생시키는 구동토크를,  $n(>1)$ 은 토크 증가를 위한 감속기의 기어비를 나타낸다.

위 동역학방정식에서 타이어 힘을 구하기 위

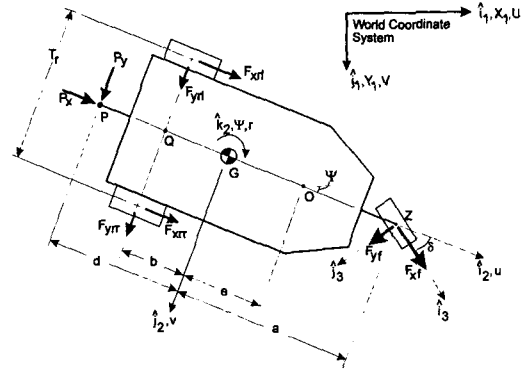


Fig. 1 Overhead view of a differentially steered WMR

해서는 지면과 타이어 간의 상호작용에 대한 이해가 있어야 한다. 이것은 자동차 공학자들이 심도 깊게 연구해왔으며, 이들은 종방향 견인력(tractive force)과 횡방향 코너링힘(cornering force) 사이에 상호작용이 존재한다는 것에 주안점을 두어 마찰원(friction circle) 개념을 도입하였다. 마찰원 개념은, 타이어는 지면과의 동마찰계수, 수직하중 등에 의해 작용력에 한계가 있으며, 견인력과 코너링힘이 동시에 존재할 때 각 힘의 크기가 이 한계에 의해 제한을 받는다는 것이다. Dugoff는 이러한 마찰원 개념을 이용하여 타이어 힘을 예측하는 모델을 만들었다[9]. 이를 Gunter와 Sankar가 시뮬레이션을 위해 계산을 간단히 할 수 있는 방법을 제시하였다[13]. Boyden 등은 이러한 타이어모델을 보완하여 이동로봇에 적용할 수 있도록 하였으며[8], 본 논문에서는 이 모델을 이용하여 타이어 힘을 예측하였다.

그러나 제어 알고리즘을 구성할 때, 타이어 모델은 자체의 복잡성과 비선형성 때문에 고려하기가 적당치 않다. 따라서, 타이어 힘을 예측하는 것 보다는 타이어 슬립을 추정하는 것이 보다 적당하다. 동역학식 (6)-(10)에서 타이어힘을 소거하고 식 (1)-(5)를 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uc_w - (e+b)rs_v \\ us_v + (e+b)rc_v \\ r \\ \frac{mbR^2}{\Theta_u} r^2 \\ -\frac{2bmR^2}{\Theta_r} ur \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2nR}{\Theta_u} & 0 \\ 0 & \frac{2nRT}{\Theta_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_u \\ \tau_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \\ \delta_u \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서,

$$\Theta_u = mR^2 + 2I_e, \quad \Theta_r = I_e T_r^2 + 2R^2(I_z + mb^2) \quad (12)$$

$$\delta_u = \frac{1}{\Theta_u} \{ R^2 P_x + mR^2 r v^s - I_e (\dot{u}_i^s + \dot{u}_r^s) \} \quad (13)$$

$$\delta_r = \frac{1}{\Theta_r} \{ -I_r T_r (\dot{u}_i^s - \dot{u}_r^s) - 2mbR^2 \dot{v}^s(t) \} \quad (14)$$

$$\delta_x = -v^s \sin \psi, \quad \delta_y = v^s \cos \psi \quad (15)$$

$$\tau_u = \frac{1}{2}(\tau_l + \tau_r), \quad \tau_r = \frac{1}{2}(\tau_l - \tau_r) \quad (16)$$

$$s_\psi = \sin \psi, \quad c_\psi = \cos \psi \quad (17)$$

이며, 벡터  $\delta_m \equiv [\delta_x \ \delta_y \ 0 \ \delta_u \ \delta_r]^T$  는 틀에 작용하는 외력과 타이어 슬립에 의한 외란을 나타낸다. 윗 식을 가지고 불확실성을 포함하는 외란 항을 정확하게 예측 가능할 때 이동로봇의 운동을 완벽하게 기술할 수 있다. 그러나 일반적으로 이들의 시간에 따른 정확한 크기를 측정하거나 계산하는 것은 불가능하다. 반면에 크기의 일정 범위를 추정하는 것은 가능한 경우가 많다. 본 논문에서는 이러한 불확실성의 범위가 주어졌을 때, 이에 강인한 제어 알고리즘을 개발하려고 한다.

### 3. 출력변환과 정합조건

#### 3.1 출력변환

Zhang 등은 차동구동 이동로봇에 있어서 제어 목표점이 구동륜 축선 상에 존재하지 않을 때, posture vector  $(X_1, Y_1, \psi)$  3 요소 모두에 대해 오차 없는 추적제어는 불가능하며, 2 요소 만이 가능하다는 것을 증명하였다<sup>[14]</sup>. 따라서, 우리는 목표점 O의 위치 만을 제어 대상으로 선정하려고 한다. 즉,

$$q_1 = [X_1 \ Y_1]^T, \quad q_2 \equiv \dot{q}_1 = [\dot{X}_1 \ \dot{Y}_1]^T \quad (18)$$

고정좌표계에 대한 속도식 (3)-(5)를 시간에 대해 미분한 후 필요한 항을 대입하여 정리하면, 다음과 같은 동역학 방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{q} = f(q, \psi, \delta_m) + \xi(q, \psi, \delta_m) + B(\psi)\tau \quad (19)$$

$$\dot{\psi} = r(\psi, q_2, \delta_m) \quad (20)$$

여기서,

$$q = [q_1 \ q_2]^T \quad (21)$$

$$B(\psi) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ D(\psi) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$f(q, \psi, \delta_m) = \begin{bmatrix} q_2 \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} + B(\psi)s(\psi, q_2, \delta_m) \quad (23)$$

$$\xi(q, \psi, \delta_m) = B(\psi)\zeta(\psi, q_2, \delta_m) \quad (24)$$

$$D(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2nr}{\Theta_u} & 0 \\ 0 & \frac{2nRT_r(b+e)}{\Theta_r} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$s(\psi, q_2, \delta_m) = \begin{bmatrix} \frac{-emR^2 - 2(b+e)I_e}{2nR} r^2(\psi, q_2, \delta_m) \\ \frac{I_e T_r^2 + 2R^2[I_z - mbe]}{2rad} u(\psi, q_2) r(\psi, q_2, \delta_m) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\zeta(\psi, q_2, \delta_m) = \begin{bmatrix} \frac{\Theta_u}{2nR} [\delta_u(\psi, q_2, \delta_m) - v^s r(\psi, q_2, \delta_m)] \\ \frac{\Theta_r}{2nRT_r(b+e)} [(b+e)\delta_r(\psi, q_2, \delta_m) - \dot{v}^s r] \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$r(\psi, q_2, \delta_m) = \frac{1}{b+e} [ -(\dot{X}_1 - \delta_x) f_\psi + (\dot{Y}_1 - \delta_y) f_\psi ] \quad (28)$$

$$\tau = [\tau_u \ \tau_r]^T \quad (29)$$

모든 외력이 0 이고 타이어와 지면 사이의 슬립이 없는 이상적인 경우, 윗 식은 다음과 같이 단순화 된다.

$$\dot{q}_1 = q_2 \quad (30)$$

$$\dot{q}_2 = D(\psi)[s_0(\psi, q_2) + \tau] \quad (31)$$

$$\dot{\psi} = \omega_0(\psi, q_2) \quad (32)$$

여기서,

$$s_0(\psi, q_2) = \begin{bmatrix} \frac{-emR^2 - 2(b+e)I_e}{2nR} r^2(\psi, q_2) \\ \frac{I_e T_r^2 + 2R^2[I_z - mbe]}{2RT_r(b+e)} u(\psi, q_2) r_0(\psi, q_2) \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$r_0(\psi, q_2) = \frac{1}{b+e} [\dot{Y}_1 \cos \psi - \dot{X}_1 \sin \psi] \quad (34)$$

#### 3.2 정합조건 (Matching Condition)

지금까지 차동구동 이동로봇의 동역학적 모델을 모든 불확실성을 포함하여 살펴보고, 불확실성이 제거된 이상적인 상태에 대한 단순화된 모델을 유도하였다. 그런데 이러한 동역학식을 자세히 살펴보면, 중요한 특징을 발견할 수 있다. 즉 모든

추정 가능한 불확실성 요소들이 제어입력과 같은 경로를 통해 시스템에 반영된다는 것이다. 이와 같은 성질을 정합조건(matching condition)이라 하며, 강인제어 알고리즘을 유도하기 위한 기본적인 조건이다. 또한 슬라이딩모드 제어에 있어서, 정합조건이 만족되면 시스템의 슬라이딩모드가 불확실성에 대해 불변하는 성질이 있다<sup>[15]</sup>.

*Lemma 1* (정합조건): 동역학 모델 (19)는 정합조건을 만족한다. 즉,

$$f(q, \psi, \delta_m) = f_0(q, \psi) + B_0(\psi) \tilde{f}(q, \psi, \delta_m) \quad (35)$$

$$B(\psi, \delta_m) = B_0(\psi) + B_0(\psi) \tilde{B}(\psi) \quad (36)$$

$$\xi(q, \psi, \delta_m) = B_0(\psi) \tilde{\xi}(q, \psi, \delta_m) \quad (37)$$

여기서, 첨자 0 는 불확실성이 제거된 기지함수를 나타낸다.

*Proof:*  $B$  와  $f$  는 기지함수  $B_0$  와  $f_0$ , 불확실성을 나타내는  $\Delta B$  와  $\Delta f$ 를 가지고 다음과 같이 표현된다.

$$B(\psi) = B_0(\psi) + \Delta B(\psi) \quad (38)$$

$$f(q, \psi, \delta_m) = f_0(q, \psi) + \Delta f(q, \psi, \delta_m) \quad (39)$$

정합조건 (35)-(37)이 성립함을 보이려면, 다음의 관계를 증명하면 된다.

$$\Delta B(\psi) = B_0(\psi) \tilde{B}(\psi) \quad (40)$$

$$\Delta f(q, \psi, \delta_m) = B_0(\psi) \tilde{f}(q, \psi, \delta_m) \quad (41)$$

$$\xi(q, \psi, \delta_m) = B_0(\psi) \tilde{\xi}(q, \psi, \delta_m) \quad (42)$$

첫 식은 정의 (22)-(28)로부터 직접 증명이 될 수 있다. 먼저 (25)로부터  $D(\psi)$ 는 nonsingular 이므로 다음식이 성립한다

$$\begin{aligned} \Delta B(\psi) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta D(\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_0(\psi) \end{bmatrix} D_0^{-1}(\psi) \Delta D(\psi) \\ &= B_0(\psi) D_0^{-1}(\psi) \Delta D(\psi) =: B_0(\psi) \tilde{B}(\psi) \end{aligned} \quad (43)$$

따라서 조건 (40)이 증명되었다. 또한 이 조건과 (26)을 (23)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \Delta_s^T(q, \psi, \delta_m) &= \{[q_2 \ 0]^T + B(\psi)s(\psi, q_2, \delta_m)\} - \{[q_2 \ 0]^T + B_0(\psi)s_0(\psi, q_2)\} \\ &= B_0(\psi)\Delta s(\psi, q_2, \delta_m) + \Delta B(\psi)\{s_0(\psi, q_2) + \Delta s(\psi, q_2, \delta_m)\} \\ &= B_0(\psi)\{\Delta s(\psi, q_2, \delta_m) + \tilde{B}(\psi)[s_0(\psi, q_2) + \Delta s(\psi, q_2, \delta_m)]\} \\ &=: B_0(\psi) \tilde{f}(q, \psi, \delta_m) \end{aligned} \quad (44)$$

으로 정리될 수 있어서, 조건 (51)이 증명된다. 마지막으로 (26)과 (40)을 (24)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \xi(q, \psi, \delta_m) &= [B_0(\psi) + \Delta B(\psi)]\zeta(\psi, q_2, \delta_m) \\ &= B_0(\psi)[I + \tilde{B}(\psi)]\zeta(\psi, q_2, \delta_m) =: B_0(\psi) \tilde{\xi}(q, \psi, \delta_m) \end{aligned} \quad (45)$$

이 되어 조건 (42)가 성립한다.

#### 4. 슬라이딩모드 제어

슬라이딩모드 제어는 정합조건이 만족되면 시스템의 불확실성에 관계없이 슬라이딩 모드가 불변인 특성이 있다. 정합조건은 이미 증명이 되었으므로 제어알고리즘 설계를 완료한다면, 한계치를 추정할 수 있는 불확실성에 대해 강인성을 가지는 추적제어 시스템을 얻을 수 있다.

##### 4.1 추적오차 방정식

추적제어 문제는 시스템을 오차의 항으로 기술하면 안정성 문제로 변환이 된다. 기준궤적 벡터가  $q^d(t)$ 라고 하면 추적오차벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e(t) = q(t) - q^d(t) \quad (46)$$

행렬  $D(\psi)$ 가 nonsingular 이기 때문에, 다음의 제어입력벡터,

$$\tau(t) = D^{-1}(\psi(t))[v(t) + \dot{q}_2^d(t)] - s_0(\psi(t), q_2(t)) \quad (47)$$

은 단순화된 동역학식 (30)-(31)을 다음과 같이 변환시킨다.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + Bv(t) \quad (48)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (49)$$

이며,  $v \in R^2$  는 새로운 제어입력벡터이다. 또한, 제어입력 (47)은 불확실성이 포함된 동역학식 (19), (20)을 다음과 같이 변환한다

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B[v(t) + \chi(\psi, q_2, \delta_m)] \quad (50)$$

여기서,

$$\chi(\psi, q_2, \delta_m) = D(\psi)[\Delta s(\psi, q_2, \delta_m) + \zeta(\psi, q_2, \delta_m)] \quad (51)$$

이며, 이것은 불확실성을 나타내는 항이다. 이 불확실성 항이 다음과 같이 상하한이 존재한다고 가

정하자.

$$\|\chi(\psi, q_2, \delta_m)\| = \|D(\psi)[\Delta s(\psi, q_2, \delta_m) + \zeta(\psi, q_2, \delta_m)]\| \leq \chi_m \quad (52)$$

그리고,  $0 \leq \chi_m < \infty$  (53)

### 4.2 슬라이딩모드 제어

먼저 이상적 모델 (48)과 완전한 모델 (50)에 대한 슬라이딩모드가 같은 스위칭다양체(switching manifold) 하에서 동등함을 증명하고자 한다.

*Theorem 1:* 다음 (54)와 같은 스위칭다양체가 존재하고  $C_2$ 가 nonsingular 라고 하면, 이상적 모델 (48)과 완전한 모델 (50)에 대한 슬라이딩 모드가 동등(equivalent)하다.

$$S(e) = Ce = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (54)$$

*Proof:* 식 (54)를 이상적 모델의 궤적에 따라 시간에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{S} = CAe + CBv = 0 \quad (55)$$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$C_1 e_2 + C_2 v = 0 \quad (56)$$

$C_2$ 가 nonsingular 이기 때문에 동치제어(equivalent control)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$v_{eq} = -C_2^{-1} C_1 e_2 \quad (57)$$

이 식을 이상적 모델 (48)에 대입하면, 이 모델에 대한 슬라이딩 모드는 다음과 같이 기술된다.

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -C_2^{-1} C_1 \end{bmatrix} e(t) \quad (58)$$

유사하게 (54)를 모델 (50)의 궤적을 따라 시간 미분을 취하면, 다음과 같은 동치제어를 얻는다.

$$v_{eq} = -C_2^{-1} C_1 e_2 - \chi \quad (59)$$

이 식을 모델 (50)에 대입하면 (58)과 같은 슬라이딩 모드를 얻을 수 있다. 그러므로, 두 시스템에 대한 슬라이딩 모드는 동등하다.

스위칭 다양체에 있어서, 행렬  $C$ 를 대각 행렬  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1 \lambda_2]$ , ( $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ )와 단위행렬  $I$ 의 조

합으로 다음과 같이 놓자.

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & I \end{bmatrix} \quad (60)$$

그러면, 두 모델에 대한 슬라이딩 모드는 다음과 같다.

$$\dot{e}_1(t) = -\Lambda e_1(t) \quad (61)$$

즉, 슬라이딩 모드 내에서 추적오차가 지수함수적으로 0에 수렴한다.

다음으로 도달조건(reaching condition)을 만족하도록 제어 알고리즘을 결정한다. 다음 식은 도달조건을 표현하는 대표적인 관계 중의 하나이다.

$$S^T \dot{S} < 0 \quad (62)$$

이 식은 모델 (50)의 궤적 상에서 다음과 같다.

$$S^T \dot{S} = S^T [CAe + CB(v + \chi)] = S^T (CAe + v + \chi) \quad (63)$$

다음과 같은 제어를 선택한다면,

$$v = -CAe - \Delta v = -\Lambda e_2 - \Delta v \quad (64)$$

여기서,  $\Delta v = \begin{cases} \frac{S}{\|S\|} \chi_m, & \|S\| \neq 0 \\ 0, & \|S\| = 0 \end{cases}$  (65)

식 (63)는  $\|S\| \neq 0$ 일 때, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S^T \dot{S} &= S^T (-\Delta v + \chi) = -\|S\| \chi_m + S^T \chi \\ &\leq -\|S\| \chi_m + \|S\| \|\chi\| = -\|S\| (\chi_m - \|\chi\|) < 0 \end{aligned} \quad (66)$$

즉, 도달조건 (62)를 만족한다. 또한, 일단 스위칭면에 도달하면, 거동이 식 (61)에 의해 지배되기 때문에 지수함수적으로 수렴하게 된다.

Table 1 Parameter values for WMR for simulations

WMR mass, $m$	419 kg
Tire radius, $R$	0.1746 m
Lateral tire stiffness, $C_y$	30 kN/rad
Longitudinal tire stiffness, $C_x$	30 kN/unit slip
Road/tire coefficient of friction, $\mu$	0.5
Yaw moment of inertia, $I_z$	120 kg·m <sup>2</sup>
CG to front axle distance, $a$	0.48 m
CG to rear axle distance, $b$	0.2311 m
CG to tool location distance, $d$	0.6 m
CG to tracking point distance, $e$	-0.2311 m
Rear Track, $T_r$	1.1811 m
Gear Ratio, $n$	100:1

슬라이딩모드 제어의 단점 중의 하나는 식 (65)로 표현되는 스위칭 작용 때문에 시스템이 모델링 되지 않은 고주파수 성분이 존재한다면 이를 가진하게되어 채터링을 유발하게 되는 것이다. 이를 제거하기 위해 스위칭 함수를 다음과 같이 수정한다.

$$\Delta v = \begin{cases} \frac{S}{\|S\|} \chi_m, & \|S\| > \epsilon \\ \frac{S}{\epsilon} \chi_m, & \|S\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (67)$$

여기서,  $0 < \epsilon \leq 1$ 의 값을 가진다.

### 5. 결과 및 고찰

슬라이딩모드 제어의 추적제어 성능을 고찰하기 위해 슬립을 포함하는 완전한 동역학모델을 가지고 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션에 사용된 로봇에 관한 파라미터는 [10]에서 실험을 통해 정확성이 입증된 것이다.

스위칭다양체에 있어서 C 행렬을 위해 다양한 시뮬레이션을 수행하여 가장 적당한 제어성능을 나타내는  $A = [0.75 \ 0; 0 \ 0.75]$ 을 선택하였으며, 제어 입력식 (67)에서 경계층의 폭  $\epsilon = 0.5$ 를 다양한 시뮬레이션 결과 분석을 통해 선택하였다. Dugoff의 타이어 모델을 포함하는 동역학식은 4 차 Runge-Kutta 방법을 사용하였다. 시뮬레이션에 사용된 궤적은 다음과 같이 원과 삼각함수 형태를 선택하여 궤적에 대한 여러 가지 결과를 그림 2 에서 6 까지 도시하였다.

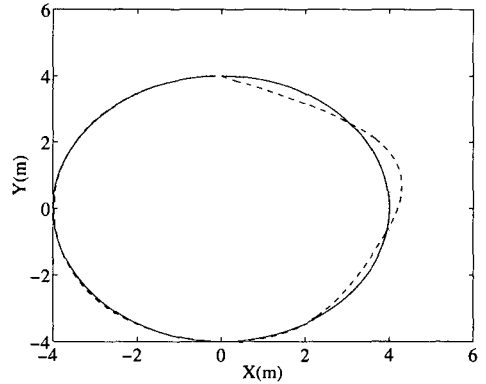
Trajectory I:  $X = 4 \cdot \sin(t/4); Y = 4 \cdot \cos(t/4)$

Trajectory II:  $X = t; Y = t + 4 \cdot \sin(t/4)$

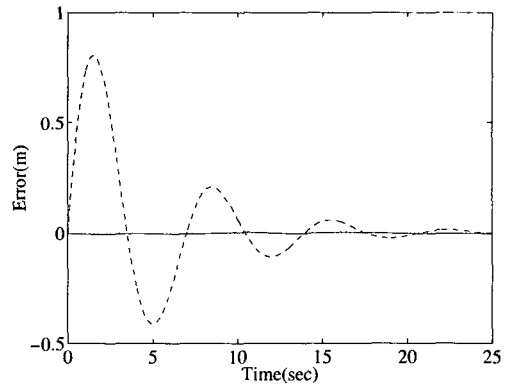
슬라이딩모드 제어의 결과를 비교하기 위해 본 논문에서는 슬립이 없는 이상적 모델에 대해 PID 를 포함하는 귀환선형화제어(Feedback Linearization Control)를 함께 나타내었다. 그림 2 의 (a), (b), (c)는 각각 궤적 I 에 대해 귀환선형화제어를 적용했을 때 위치추적결과, 추적오차, 제어입력을 보여주고 있다. 같은 궤적에 대해 슬라이딩모드제어의 결과를 그림 3 의 (a), (b), (c)에 도시하였다. 또한 궤적 II 에 대해 귀환선형화제어와 슬라이딩모드제어를 적용했을 때 위치추적결과를 그림 4

와 5 에 나타내었다.

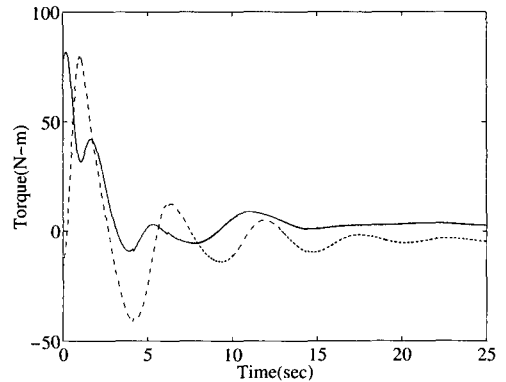
귀환선형화제어는 일반적으로 시스템의 불확실성과 외란에 강인성을 보장할 수 없다. 반면에



(a) Trajectory tracking (...actual, -desired)

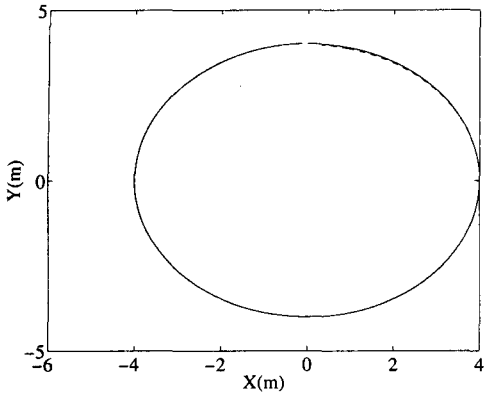


(b) Tracking errors (.... x, -y)

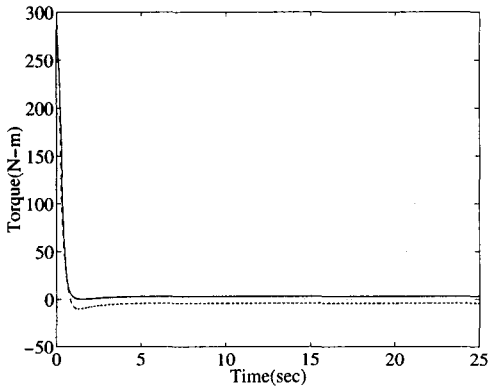


(c) Control inputs (.... right wheel, - left wheel)

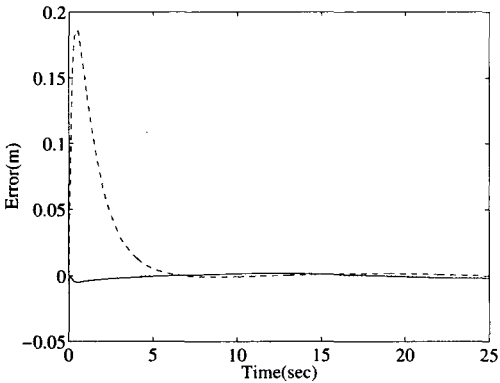
Fig. 2 Feedback linearization control for the trajectory I



(a) Trajectory tracking (.... actual, - desired)



(b) Tracking errors (.... x, - y)



(c) Control inputs (... right wheel, - left wheel)

Fig. 3 Sliding mode control for the trajectory I

슬라이딩모드제어는 한계를 알고 있는 불확실성과 외란에 대해서는 강인성이 보장된다. 뿐만 아니라, 시뮬레이션 결과에서 제어성능도 뛰어남을 확인할 수 있다. 그러나, 제어입력은 그림 2-(c)와 3-(c)에

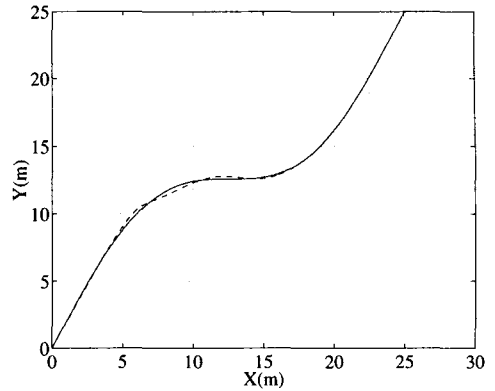


Fig. 4 Trajectory tracking with feedback linearization control for the trajectory II (... actual, - desired)

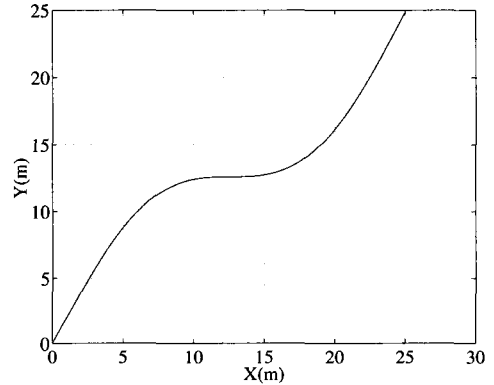


Fig. 5 Trajectory tracking with sliding mode control for the trajectory II (... actual, - desired, both are overlapped)

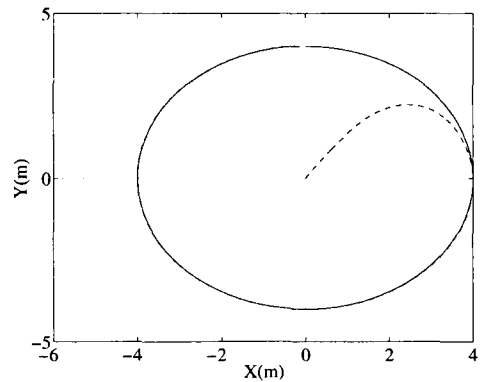


Fig. 6 Trajectory tracking for the trajectory I with initial condition  $(0, 0, \pi/2)$  (... actual, - desired)

서 슬라이딩모드 경우가 더욱 큼을 알 수 있는데,



본 논문에서 예시한 결과 외에 제어이득 변화에 따른 다양한 시뮬레이션을 수행한 결과, 같은 수준의 제어입력에 대해 슬라이딩모드제어가 귀환선형화제어보다 제어성능이 우수함을 확인할 수 있었다. 즉, 귀환선형화제어가 같은 성능을 달성하기 위해서는 더 큰 제어입력을 필요로 하였다.

그림 6에서는 궤적 I에 대해 초기조건을 변화시켰을 때의 슬라이딩모드제어 결과이다. 즉, 출발점을 기준 궤적 상에서 상당히 벗어난 곳을 설정하여, 제어알고리즘의 안정성을 검증하기 위한 것이다. 시뮬레이션 결과 알고리즘이 최소한의 극소 안정성을 만족함을 확인할 수 있었다.

## 6. 결론

이동로봇의 응용분야는 공장자동화나 사무자동화 등의 잘 정돈된 공장이나 실내에서, 건설자동화 등과 같이 큰 힘을 필요로 하고 휠과 지면의 상호작용이 복잡한 분야로 확대되고 있다. 본 논문에서는 이러한 분야에 사용하기 위한 이동로봇의 한 연구로써, 시스템의 불확실성에 강인한 슬라이딩모드 제어알고리즘을 차동구동 이동로봇에 대해 유도하였다. 또한, 이를 위한 동역학식과 결합조건 등 이론적 배경을 확립하였다. 개발된 제어알고리즘은 실험을 통해 정확도가 확인된 모델을 가지고 시뮬레이션을 수행해 타당성을 입증하였다

## 참고문헌

- Hong, D., Velinsky, S. A., and Yamazaki, K., "Tethered Mobile Robot for Automating Highway Maintenance Operations," *Robotics & CIM*, Vol. 13, No. 4, pp. 297-307, 1997.
- Lee, S. S. and Williams, J. H., "A Fast Tracking Error Control Method for an Autonomous Mobile Robot," *Robotica*, Vol. 11, pp. 205-215, 1993.
- Kanayama, Y. Kimura, Y. Miyazaki, F. and Noguchi, T., "A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot," *Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pp. 384-389, 1990.
- Sjrdalen, O. J. and de Wit, C. C., "Exponential Control Law for a Mobile Robots: Extension to Path Following," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 11, pp. 1791-1797, 1993.
- d'Andrea-Novel, B., Bastin, G. and Campion, G., "Dynamic Feedback Linearization of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots," *Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2527-2532, 1992.
- Sarkar, N., Yun, X. and Kumar, V., "Control of Mechanical Systems with Rolling Constraints: Application to Dynamic Control of Mobile Robots," *Int. J. of Robotics Research*, Vol. 13, No. 1, pp. 55-69, 1994.
- Hamdy, A. and Badreddin, E., "Dynamic Modeling of a Wheeled Mobile Robot for Identification and Control," *Robotics and Flexible Manufacturing Systems*, J. C. Gentina and S. G. Tzafestas, eds, Elsevier Science, North-Holland, pp. 119-129, 1992.
- Boyden, F. D. and Velinsky, S. A., "Dynamic Modeling of Wheeled Mobile Robots for High Load Applications," *Proc. IEEE Conf. On Robotics and Automation*, pp. 3071-3078, 1994.
- Dugoff, H., Fancher, P. S., and Segal, L., "An Analysis of Tyre Traction Properties and Their Influence on Vehicle Dynamic Performance," *SAE Transactions*, Paper #700377, pp. 1219-1243.
- Hong, D., Velinsky, S. A., and Feng, X., "Verification of a Wheeled Mobile Robot Dynamic Model and Control Ramifications," *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 121, No. 1, pp. 58-63, 1999.
- Utkin, V. I., "Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems," Mir Publishers, Moscow, 1978.
- Utkin, V. I., "Sliding Modes in Control Optimization," Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- Guntur, R. and Sankar, S., "A Friction Circle Concept for Dugoff's Tyre Friction Model," *Int. J. of Vehicle Design*, Vol. 1, No. 4, pp. 373-377, 1980.
- Zhang, Y. L., Velinsky, S. A., and Feng, X., "On the Tracking Control of Differentially Steered Wheeled Mobile Robots," *ASME J. of Dyn. Sys., Meas., and Control*, Vol. 119, pp. 455-461, 1997.
- Gao, W. B. and Hung, J. C., "Variable Structure Control of Nonlinear Systems: a New Approach," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 40, No. 1, pp. 45-55, 1993.