

## 상반일 등고선 적분법을 이용한 이종재 접합계면 균열의 응력강도계수 결정

조상봉\*, 정휘원\*\*, 김진광\*\*

### Determination of Stress Intensity Factors for Interface Cracks in Dissimilar Materials Using the RWCIM

Sang Bong Cho\*, Hwi Won Jeong\*\* and Jin Kwang Kim\*\*

#### ABSTRACT

An interface V-notched crack problem can be formulated as a eigenvalue problem. there are the eigenvalues which give stress singularities at the V-notched crack tip. The RWCIM is a method of calculating the eigenvector coefficients associated with eigenvalues for a V-notched crack problem. Obtaining the stress intensity factors for an interface crack in dissimilar materials is examined by the RWCIM. The results of stress intensity factors for an interface crack are compared with those of the displacement extrapolation method by the BEM

**Key Words** : Reciprocal Work Contour Integral Method(상반일 등고선 적분법), Dissimilar Materials(이종재료), V-notched Crack(V-노치 균열), Interface Crack(접합계면 균열), Eigenvalue and Eigenvector(고유치와 고유벡터), Stress Intensity Factors(응력강도계수).

#### 1. 서론

기계 혹은 구조물이 외부하중을 받고 있을 때 응력집중이나 응력특이성이 있는 부분에서 균열이 발생하고 성장 거동한다는 것은 잘 알려진 사실이다. 응력특이성이 있는 부분은 이종재 접합계면의 V-노치부가 대표적인 예에 해당한다.

이종재료 내의 접합계면 V-노치 균열에 대한 이론적 및 수치해적 연구는 응력특이성과 응력강도 계수에 관한 연구로 나눌 수 있다. 응력특이성에 관한 연구는 Bogy<sup>(1)</sup>를 시작으로 Hein과 Erdogan<sup>(2)</sup>

등이 맵린 변환법을 이용하여 연구한 바 있다. 응력강도계수에 관해서는 이종재료 내의 접합계면 V-노치 균열 문제를 복소포텐셜을 이용하여 고유치와 고유벡터 문제로 만들고 고유벡터를 상반일 등고선 적분법(RWCIM: Reciprocal work contour integral method)으로 Carpenter와 Byers<sup>(3,4)</sup>가 해석한 바 있다.

본 연구에서는 이종재 접합계면 V-노치 균열에서 노치 각도가 영(zero)인 접합계면 균열에 대한 고유벡터의 계수와 응력강도계수의 관계를 유도하고, 상반일 등고선 적분법을 이용하여 접합계면 균열에 대한 응력강도계수를 해석하고자 한다. 또한,

\* 경남대학교 공과대학 기계자동화공학부

\*\* 경남대학교 대학원 기계설계학과

이종재 접합계면 균열의 응력강도계수에 관한 기존의 변위외삽법에 의한 수치해석 결과와 상반일 등고선 적분법의 결과를 비교하여 응력강도계수 해석에 상반일 등고선 적분법이 유용한 지를 검토하고자 한다.

## 2. 접합계면 균열에 대한 고유벡터의 계수와 응력강도계수의 관계

Fig. 1에서 보는 바와 같이 등방성 이종재료 내의 접합계면 V-노치 균열을 해석하고자 할 때 채택력이 없다고 가정하면 응력과 변위는 복소포텐셜  $\phi_j(z)$ ,  $\psi_j(z)$ 로 다음과 같이 표현할 수 있다.

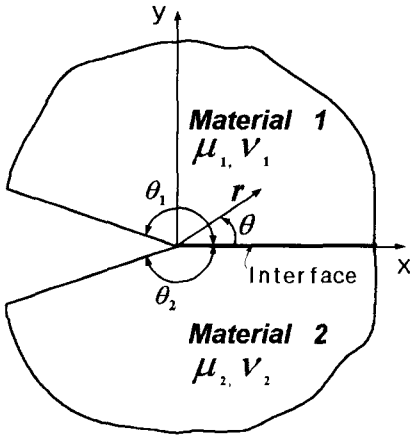


Fig. 1 A V-notched interface crack in dissimilar materials

$$u_{j,r} + iu_{j,\theta} = (2\mu_j)^{-1} e^{i\theta} \left\{ x\phi_j(z) - z \overline{\phi_j'(z)} - \overline{\psi_j(z)} \right\} \quad (1)$$

$$c_{j,rr} + i\sigma_{j,r\theta} = \overline{\phi_j(z)} + \phi_j'(z) - \overline{z\phi_j''(z)} - \overline{z z^{-1} \psi_j'(z)} \quad (2)$$

$$c_{j,\theta\theta} - i\sigma_{j,r\theta} = \overline{\phi_j(z)} + \phi_j'(z) + \overline{z\phi_j''(z)} + \overline{z z^{-1} \psi_j'(z)} \quad (3)$$

여기서,  $z = re^{i\theta}$ ,  $\mu_j$  는 진단 탄성계수,  $\nu_j$  는 포와송의 비이다.

$$x_j = \begin{cases} (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j) & (\text{평면응력}) \\ 3 - 4\nu_j & (\text{평면변형률}) \end{cases} \quad (4)$$

이고, 기호 위의 (-)는 복소 공액을 의미하며, 첨자  $j$  는 재료  $j$  를 의미한다. 다음의 복소포텐셜을 가정하여 이종재료 내의 접합계면 V-노치 균열에 대한 응력과 변위를 구할 수 있다.

$$\phi_j(z) = A_j z^\lambda + a_j z^{\bar{\lambda}} \quad (5)$$

$$\psi_j(z) = B_j z^\lambda + b_j z^{\bar{\lambda}} \quad (6)$$

여기서,  $A_j, a_j, B_j, b_j$  와  $\lambda$  는 복소수라고 가정한다.

식 (5)과 (6)을 식 (1), (2)와 (3)에 대입하면, 다음과 같은 응력과 변위가 구해진다.

$$u_{j,r} + iu_{j,\theta} = (2\mu_j)^{-1} \left[ r^\lambda \{ x_j A_j e^{i\theta(\lambda-1)} - \overline{a_j} \lambda e^{i\theta(-\lambda+1)} - \overline{b_j} e^{i\theta(-\lambda-1)} \} + r^{\bar{\lambda}} \{ x_j a_j e^{i\theta(\bar{\lambda}-1)} - \overline{A_j} \bar{\lambda} e^{i\theta(-\lambda+1)} - \overline{B_j} e^{i\theta(-\bar{\lambda}-1)} \} \right] \quad (7)$$

$$\sigma_{j,rr} + i\sigma_{j,r\theta} = r^{\lambda-1} \{ A_j \lambda e^{i\theta(\lambda-1)} - \overline{a_j} \lambda^2 e^{i\theta(-\lambda+1)} - \overline{b_j} \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)} + 2\overline{a_j} \lambda e^{i\theta(-\lambda+1)} \} + r^{\bar{\lambda}-1} \{ a_j \bar{\lambda} e^{i\theta(\bar{\lambda}-1)} - \overline{A_j} \bar{\lambda}^2 e^{i\theta(-\bar{\lambda}+1)} - \overline{B_j} \bar{\lambda} e^{i\theta(-\bar{\lambda}-1)} + 2\overline{A_j} \bar{\lambda} e^{i\theta(-\bar{\lambda}+1)} \} \quad (8)$$

$$\sigma_{j,\theta\theta} - i\sigma_{j,r\theta} = r^{\lambda-1} \{ A_j \lambda e^{i\theta(\lambda-1)} + \overline{a_j} \lambda^2 e^{i\theta(-\lambda+1)} + \overline{b_j} \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)} \} + r^{\bar{\lambda}-1} \{ a_j \bar{\lambda} e^{i\theta(\bar{\lambda}-1)} + \overline{A_j} \bar{\lambda}^2 e^{i\theta(-\bar{\lambda}+1)} + \overline{B_j} \bar{\lambda} e^{i\theta(-\bar{\lambda}-1)} \} \quad (9)$$

Fig. 1과 같은 이종재료 내의 접합계면 V-노치 균열에서 V-노치 각도가 영인 접합계면 균열에 대한 경계조건과 연속조건은 다음과 같다.

$$\theta = \pi \text{에서 } \sigma_{1\theta\theta} - i\sigma_{1r\theta} = 0 \quad (10)$$

$$\theta = -\pi \text{에서 } \sigma_{2\theta\theta} - i\sigma_{2r\theta} = 0 \quad (11)$$

$$\theta = 0 \text{에서 } \sigma_{1\theta\theta} - i\sigma_{1r\theta} = \sigma_{2\theta\theta} - i\sigma_{2r\theta} \quad (12)$$

$$\theta = 0 \text{에서 } u_{1r} + iu_{1\theta} = u_{2r} + iu_{2\theta} \quad (13)$$

경계조건과 연속조건을 이용하여 이중재료 내의 접합계면 균열 문제를 고유치와 고유벡터 문제로 만들 수 있다. 고유치와 고유벡터 문제를 풀어 다음의 복소수 고유치를 얻는다.

$$\lambda = (n - \frac{1}{2}) \pm i\epsilon, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad (14)$$

여기서,  $\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta}$ ,

$$\beta = \frac{\mu_1(x_2 - 1) - \mu_2(x_1 - 1)}{\mu_1(x_2 + 1) + \mu_2(x_1 + 1)} \text{이다.}$$

복소수 고유치에 대응하는 고유벡터는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} A_{\alpha n} &= e^{(-1)^\alpha \pi \epsilon \zeta} \\ B_{\alpha n} &= -\lambda e^{(-1)^\alpha \pi \epsilon \zeta} \\ \overline{a_{\alpha n}} &= 0 \\ \overline{b_{\alpha n}} &= -\lambda e^{(-1)^{\alpha+1} \pi \epsilon \zeta}, \quad (\alpha = 1, 2) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,  $\zeta = \frac{1}{e^{-\pi \epsilon}} A_{1n}$ ,  $A_{1n} = R_{1n} + i I_{1n}$ 이고,  $\alpha$ 는 재료 1과 재료 2를 의미한다.

식 (15)에서 고유치가 복소수일 때 고유벡터는 복소계수  $A_{1n}$ 에 의해서만 표현되고 있음을 알 수 있다. 또한, 실수 고유치는  $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ 의 정수가 되고 이에 대응하는 고유벡터는 쉽게 구할 수 있으며 생략하기로 한다.

특이응력장이 되는 경우는 복소수 고유치에서  $n = 1$ 일 때이며 식 (14)과 (15)를 식 (7), (8), (9)에 대입하여 특이응력장과 변위장을 구할 수 있다.  $\theta = 0$ 일 때의 식(9)의 공역식과 기존의 특이응력장 식이 같아야 하므로 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta})_{\theta=0} &= (\sigma_{xx} + i\sigma_{xy})_{\theta=0} \\ &= \frac{K_1 + iK_2}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{l}\right)^{i\epsilon} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,  $l = 2a$ 로 잡는다.

식 (16)에서 고유벡터의 계수  $R_{11}$ ,  $I_{11}$ 와 응력강도계수  $K_1$ ,  $K_2$ 의 관계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} K_1 &= 2\sqrt{2\pi} e^{\pi\epsilon} \cosh(\pi\epsilon) \left\{ \left(-\frac{R_{11}}{2} + \epsilon I_{11}\right) \cos(\epsilon \ln l) \right. \\ &\quad \left. - \left(\epsilon R_{11} - \frac{\epsilon I_{11}}{2}\right) \sin(\epsilon \ln l) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= 2\sqrt{2\pi} e^{\pi\epsilon} \cosh(\pi\epsilon) \left\{ \left(\frac{R_{11}}{2} + \epsilon I_{11}\right) \sin(\epsilon \ln l) \right. \\ &\quad \left. + \left(\epsilon R_{11} - \frac{\epsilon I_{11}}{2}\right) \cos(\epsilon \ln l) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

또는,

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{2}{4\epsilon^2 + 1} \{ K_1 \{ \cos(\epsilon \ln l) - 2\epsilon \sin(\epsilon \ln l) \} \\ &\quad + K_2 \{ \sin(\epsilon \ln l) + 2\epsilon \cos(\epsilon \ln l) \} \} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{2}{4\epsilon^2 + 1} \{ K_1 \{ 2\epsilon \cos(\epsilon \ln l) + \sin(\epsilon \ln l) \} \\ &\quad + K_2 \{ 2\epsilon \sin(\epsilon \ln l) - \cos(\epsilon \ln l) \} \} \end{aligned} \quad (20)$$

### 3. 상반일 등고선 적분법<sup>(3,4)</sup>

이중재료 내의 접합계면 V-노치 균열 문제에 대한 고유벡터의 계수를 해석한 Carpenter와 Byers<sup>(3,4)</sup>의 상반일 등고선 적분법을 간단히 설명하기로 한다.

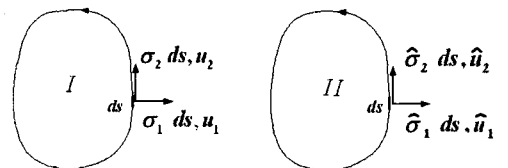


Fig. 2 Closed contour

베티(Betti)의 상반일 원리를 이용하면 Fig. 2의 문제에서 다음의 결과를 얻는다.

$$\int_C \sum_{i=1}^2 (\sigma_i \widehat{u}_i - \widehat{\sigma}_i u_i) ds = \int_C T ds = 0 \quad (21)$$

여기서,  $T = \sum_{i=1}^2 (\sigma_i \widehat{u}_i - \widehat{\sigma}_i u_i) ds$  이다. 첨자 1과 2는 각각 응력과 변위의 등고선에 대한 법선과 접선 방향 성분을 표시한다.

Fig. 3의 V-노치 문제에 식 (21)를 적용하면 폐곡선  $C$ 는 다음과 같다.

$$C = C_\epsilon + C'' + C' + C''' \quad (22)$$

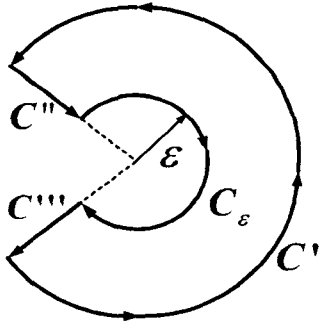


Fig. 3 V-notched configuration to which Betti's law is applied

식 (21)의 선  $C'$ 와  $C''$ 에서 표면력이 영(zero)이므로 식 (21)에서 다음의 결과를 얻는다.

$$\int_C T ds = - \int_{C_\epsilon} T ds \quad (23)$$

외부 등고선  $C'$ 는 반 시계 방향의 적분경로이고, 내부 등고선  $C_\epsilon$ 는 시계 방향의 적분 경로이다. 내부 등고선에서  $-C_\epsilon$ 의 적분 방향은 반 시계 방향을 뜻한다. 또한, 식 (23)은 적분이 적분 경로에 독립임을 의미하고 있다.

계 I에서 응력과 변위  $\sigma_i, u_i$ 는 등고선  $C_\epsilon$ 에서 고유치  $\lambda_1$ 에서  $\lambda_n$ 까지에 대한 응력과 변위의 합을 사용하고, 등고선  $C'$ 의 응력과 변위는 유한요소법(FEM)에서 얻어지는 값을 사용한다. 계 II에서 등고선  $C_\epsilon$ 와  $C'$ 에서 응력과 변위  $\widehat{\sigma}_i, \widehat{u}_i$ 는 고유치  $-\lambda_1$ 에서  $-\lambda_n$ 까지에 대한 응력과 변위의 합을 사용한다. 음의 고유치 즉,  $-\lambda_1$ 에서  $-\lambda_n$ 의 응력과 변위는 단지 미분방정식을 만족하는 해이고 실제의 응력과 변위로는 사용될 수 없다.

이와 같이 하여 고유치  $\lambda_1$ 에서  $\lambda_n$ 까지에 대응하는 고유벡터의 계수 즉, 식(15)의  $A_{1n}$ 을 구할 수 있다<sup>(3,4)</sup>.

#### 4. 수치해석 및 고찰

본 연구에서는 Fig. 4와 같은 이종재료 내의 접합계면 중앙 균열문제를 평면응력 상태로 해석한다. Fig. 4와 같은 모델은 유한요소 해석에서 대칭성을 이용할 수 있고, Fig. 5는  $2a/W=0.5$ 일 때의 대칭성을 고려한 1/2모델의 유한요소 분할 예이다. 유한요소법(FEM)해석은 ANSYS<sup>(5)</sup>를 이용하고, 상반일 등고선 적분법<sup>(3,4)</sup>을 이용하여 고유벡터의 계수를 구하고, 이 고유벡터의 계수로부터 식 (17)과 (18)에서 유도한 응력장도계수  $K$ 를 산출한다.

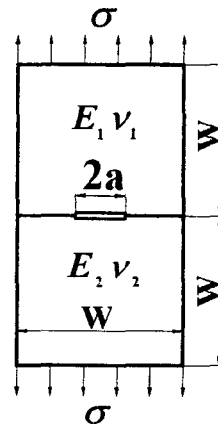


Fig. 4 An interface center crack

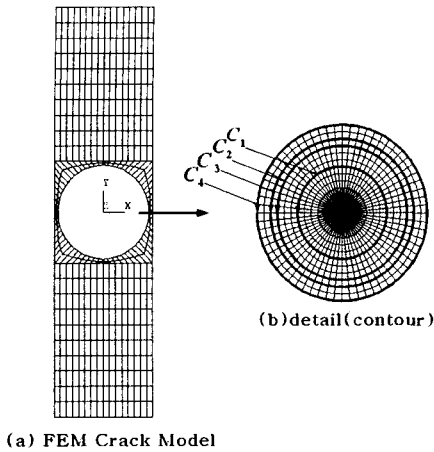


Fig. 5 FEM model and detail

Fig. 4의 모델에 대한 상반일 등고선 적분법으로 구한 응력강도계수와 경계요소법(BEM) 해석 결과에서 변위의삽법으로 구한 기존의 결과<sup>(6)</sup>와 비교하고자 한다. 또한, FEM해석 결과에 의한 변위의삽법으로도  $K$ 값을 구하여 비교 검토한다.

$2a/W=0.5$ 이고  $\nu_1=\nu_2=0.3$ 일 때,  $E1/E2$ 를 2, 3, 4, 10, 100으로 또한 외부 등고선을 4종류로 변화시켜 응력강도계수의 값을 산출하여 보았고, 본 논문에서는  $E1/E2$ 의 비가 2인 경우만을 Table 1에 나타내었다. 여기서  $F_i = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} / \sigma \sqrt{\pi a}$ 와  $K_2/K_1$ 는 무차원 응력강도계수이다. 또한, Table 1에서는 고유치를 1개, 2개, 3개를 사용하는 경우에 대한 결과를 표시하고 있다. 그런데, 균열 근방의 응력장에서는 첫 번째 고유치의 영향이 매우 큰 관계로 고유치의 사용 개수에는 별로 큰 영향이 나타나지 않고 있다. 또한, 고유치를 1개 사용한 경우와 2개 사용한 경우에는 값의 차가 전혀 없다. 이는 2번째 고유치가 1일 때 나타나는 현상으로 판단된다. 따라서, 첫 번째 고유치에 관련된 고유벡터의 계수 즉, 응력강도계수를 비교적 안정되게 구할 수 있음을 알 수 있다.

해석하여 본 모든 결과에서 Table 1에서 보는 바와 같이 BEM이나 FEM의 변위의삽법으로 구한 결과는 대체로 잘 일치함을 알 수 있었다. RWCIM으로 구한 결과에서 보면 고유치의 개수에는 그다지 민감하지 않음을 알 수 있었고, 외부 등고선의 선택에 따라 상당한 오차가 있음을 알 수 있었다.

균열의 끝에 가장 가까운 등고선  $C_1$ 의 경우에 대체로 오차가 크게 발생하고 있다. 이 원인은 RWCIM에서 등고선  $C_1$ 에 사용하는 유한요소 해석 결과의 응력과 변위에 나타나는 오차가 크므로 생기는 현상으로 생각된다. 그러나, 그 외의 등고선에서는 비슷한 결과가 나오고 있었다.

모든 해석에서 내부 등고선  $C_e$ 의 반경  $\epsilon$ 을 0.05로 하였다. 수치해석 결과 반경  $\epsilon$ 이 0.05일 때 가장 안정된 결과가 나오는 것을 확인할 수 있었기 때문이다. Carpenter와 Byers<sup>(3,4)</sup>는 반경  $\epsilon$ 이 아주 작은 경우에도 해석결과가 양호하다고 하였으나 본 수치해석에서는 불안정하였다.

Table 1 Nondimensional stress intensity factors and eigenvectors for the change of eigenvalues  $2a/w=0.5$  ( $E_1/E_2=2, \nu_1=\nu_2=0.3$ )

$\lambda_1 = 0.5 + 0.0373i$

UR	CONTO					FEM	BEM <sup>(6)</sup>
	RWCIM						
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$			
$K_e$ eigenvec.	$r/a=0.46$	$r/a=0.54$	$r/a=0.64$	$r/a=0.92$			
$F_i$	1.099	1.191	1.194	1.198	1.184	1.183	
$K_2/K_1$	0.008	-0.070	-0.095	-0.126	-0.063	-0.066	

$\lambda_1 = 0.5 + 0.0373i, \lambda_2 = 1$

UR	CONTO					FEM	BEM <sup>(6)</sup>
	RWCIM						
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$			
$K_e$ eigenvec.	$r/a=0.46$	$r/a=0.54$	$r/a=0.64$	$r/a=0.92$			
$F_i$	1.099	1.191	1.194	1.198	1.184	1.183	
$K_2/K_1$	0.008	-0.070	-0.095	-0.126	-0.063	-0.066	

$\lambda_1 = 0.5 + 0.0373i, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0.5 + 0.0373i$

UR	CONTO					FEM	BEM <sup>(6)</sup>
	RWCIM						
	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$			
$K_e$ eigenvec.	$r/a=0.46$	$r/a=0.54$	$r/a=0.64$	$r/a=0.92$			
$F_i$	1.104	1.192	1.195	1.200	1.184	1.183	
$K_2/K_1$	0.006	-0.060	-0.085	-0.115	-0.063	-0.066	

Table 2는  $2a/W=0.5, 0.6$ 이고  $E1/E2=2, 3, 4, 10, 100$ 인 경우에 대한 무차원 응력강도계수 해석 결과인데 여러 적분경로에서 오차가 큰 경로를 제외한 나머지 적분경로의 값을 평균하여 구한 결과이다. RWCIM의 결과와 기존의 결과에서  $F_i$ 의 오차는 최대가 9% 정도이고  $K_2/K_1$ 의 비에 대한 오차가 큰 것 같이 보이나  $K_2$ 가 아주 작은 값이기

때문에 생기는 표현상의 현상이고  $K_1$ 의 오차 범위 내에 있다. 전반적으로 볼 때 RWCIM의 결과와 기존의 결과는 거의 잘 일치한다고 할 수 있다. 그러나 RWCIM의 결과가 외삽법에 의한 결과보다 약간 과대 평가되고 있음을 알 수 있었다.

Table 2 Comparison of nondimensional stress intensity factors for RWCIM, FEM and BEM ( $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )

2a/w	EI/E2		K				
			2.0	3.0	4.0	10.0	100.0
0.5	$F_i$	RWCIM	1.196	1.238	1.212	1.248	1.249
		FEM	1.184	1.179	1.173	1.152	1.127
		BEM <sup>(6)</sup>	1.183	1.176	1.170	1.149	1.124
	$\frac{K_2}{K_1}$	RWCIM	-0.087	-0.133	-0.158	-0.219	-0.266
		FEM	-0.063	-0.099	-0.119	-0.162	-0.194
		BEM <sup>(6)</sup>	-0.066	-0.099	-0.118	-0.161	-0.191
0.6	$F_i$	RWCIM	1.309	1.316	1.317	1.336	1.293
		FEM	1.293	1.290	1.283	1.256	1.223
		BEM <sup>(6)</sup>	1.297	1.289	1.281	1.254	1.222
	$\frac{K_2}{K_1}$	RWCIM	-0.055	-0.083	-0.112	-0.142	-0.171
		FEM	-0.067	-0.100	-0.119	-0.162	-0.193
		BEM <sup>(6)</sup>	-0.066	-0.099	-0.119	-0.161	-0.190

### 5. 결론

본 연구에서는 이종재료 내의 접합계면 균열에 대한 고유벡터의 계수와 응력강도계수의 관계를 유도하고, 상반일 등고선 적분법을 이용하여 응력강도계수를 해석할 수 있게 하였다.

기존의 변위의삽법에 의한 이종재료 내의 접합계면 균열에 대한 응력강도계수 해석 결과와 상반일 등고선 적분법에 의한 해석 결과의 비교 고찰로부터 응력강도계수 해석에 상반일 등고선 적분법이 유용하게 적용될 수 있음을 알았다. 다만 적분 경로의 선택에 따른 해석 결과의 불안정이 다소 있어 주의가 요구된다.

### 후 기

이 논문은 1998년도 경남대학교 학술연구조성비 지원에 의하여 쓰여진 것임.

### 참고 문헌

1. D. B. Bogy, "On the Problem of Edge-bonded

Elastic Quarter-planes Loaded at the Boundary," Int. J. Solids Structures, Vol. 6, pp. 1287-1313, 1979.

2. F. Erdogan, "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials With Crack," J. Appl. Mech, Vol. 32, pp. 403-410, 1965.

3. W. C. Carpenter, and C. Byers, "A path Independent integral for computing stress intensities for V-notched cracks in a bi-material," Int. J. Fracture, Vol. 35, pp. 245-268, 1987.

4. W. C. Carpenter, "Insensitivity of the reciprocal work contour integral method to high order eigenvectors," Int. J. Fracture, Vol. 37, pp. 107-121, 1995.

5. ANSYS User's Manual, Revision 5.3

6. R. Yuuki, and S. B. Cho, "Efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface crack in dissimilar materials," Engng. Frac. Mech, Vol. 34, pp. 179-188, 1989.