

# 연삭수돌 주축 및 공작물 회전체 진동을 고려한 원통 연삭 가공의 동특성 해석

최상현\*, 김덕현\*\*, 안유민\*\*\*

## Dynamic Analysis of External Cylindrical Grinding Considering Spindle and Workpiece Vibrations

Sang Hyun Choi\*, Duck Hyun Kim\*\* and Yoomin Ahn\*\*\*

### ABSTRACT

This paper presents multi degree analysis of self-excited vibration of grinding system including spindle and workpiece rotational effect. The governing equations are derived by applying the finite element method to structure of spindle and workpiece rotor and by estimating the grinding force. Vibration analysis is carried out for external cylindrical plunge grinding. Displacement of workpiece and grinding force is simulated with machining time. Using this model, effects of characteristics of spindle bearing and major grinding conditions on chatter growth rate are predicted. Some of results are compared with those of other previous model and show good agreements.

**Key Words :** External Cylindrical Grinding(원통 외경 연삭), Chatter (채터), Spindle and workpiece vibration (주축 및 공작물 진동), Computer simulation(컴퓨터 시뮬레이션), Dynamic analysis(동특성 해석)

### 1. 서론

산업기술의 발달로 각종 첨단제품이 개발되면서 기계부품의 정밀가공에 대한 수요가 증가하고 있다. 이와 같은 정밀가공의 중요성 증대에 따라 연삭가공에 대한 관심이 높아지고 있다. 연삭가공 중에 하나인 원통외경 연삭가공에서는 가공면 형상이 원형이기 때문에 연삭기의 연삭수돌 주축과 공작물 회전축의 회전정밀도에 의하여 가공정밀도가 크게 영향을 받게 된다. 연삭가공 공정 중에 회전축 중심의 편심량과 진동량이 클수록 가공물의 가공정도가 나빠지게 된다. 연삭가공에서 발생

되는 진동 형태들 중에서 채터라고 불리는 자려 진동은 한번 가공되어진 부분이 다시 가공되어질 때에, 진동에 영향을 주는 현상이 반복적으로 일어나 진동이 계속 증폭되는 것으로서 재생적 불완전 상태를 유도한다. 따라서 채터 진동이 연삭가공의 정밀도에 큰 영향을 미치게 된다.

Hahn<sup>(1)</sup>은 공작물의 연삭마모에 의해 채터가 발생한다는 가정하에 처음으로 연삭기 진동을 해석하였다. Snoney 와 Wang<sup>(2)</sup>은 해석에 있어서 공작물 뿐만 아니라 연삭수돌의 마모에 의해 발생되는 채터까지 고려하였다. 그 후 여러 연구자들<sup>(3,4)</sup>이 고전적 제어 이론에 근거한 주파수 영역 관점에서

\* 서울대학교 터보동력기계연구센터  
\*\* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과  
\*\*\* 한양대학교 기계공학과

연삭 가공 공정의 안정성을 해석 하였으며, Thomson<sup>(5)</sup>에 의해서는 시간 영역 관점에서의 해석이 시도되었다. 그리고 Srinivasan<sup>(6)</sup>에 의해서는 재생 스펙트럼 방식이 이용되어 진동의 재생 효과와 채터와의 관계 등이 연구되었다. 이론적 해석 방법이외에 수치적 계산에 의한 가공공정 시뮬레이션을 이용한 연삭 공정의 진동 해석도 Liao 와 Shiang<sup>(7)</sup>에 의해 연구되었다. 이와 같은 연구들은 의의의 가공조건에 대한 연삭가공 공정의 안정성 여부를 어느 정도 판단할 수 있게 해준다.

지금까지의 연구들은 연삭가공 진동 시스템이 가장 영향이 큰 고유진동수에 의해서만 지배된다 는 가정 하에 1 자유도계로만 모델링 하였다. 본 연구에서는 보다 정확하고 다양하게 연삭가공 동 특성을 해석하기 위해서 연성된 연삭기 주축 및 공작물의 회전운동을 고려하여 다 자유도계 모델링 하였다. 유한요소 빔 모델을 기본으로 모델링 하였으며, 회전에 의한 자이로효과(gyro effect) 및 전단력의 영향을 고려한 티모센코(Timoshenko) 빔 모델을 적용하였다.

유도된 모델링 결과를 사용하여 원통외경 연삭기의 프런지(plunge) 가공을 시뮬레이션 해석하였다. 시뮬레이션은 가공 공정 자체에 의해 발생 되는 가공력을 외력으로 한 수치적분을 통해 수행 하였다.

## 2. 연삭기 시스템 모델링

### 2.1 연삭기 진동계

연삭기의 진동계는 주축과 연삭수들이 이루는 회전축과 공작물이 이루는 회전체의 2 축 시스템 으로 모델링 하였으며, 가상일 원리 및 에너지 법 을 이용하여 유한요소 모델링을 수행하였다.

연삭수들은 주축에 비해서 상대적으로 큰 강 성을 갖는 것으로 간주하여 강체디스크로 가정하였다. 공작물과 회전축과의 연결부위는 가공력 모델에 의해 연성된다. 주축과 회전축은 전단력의 영향을 고려한 티모센코 빔 이론을 기초로 하여 유한 요소로 모델링 하였다. Fig.1 과 같이 유한 요소 당 두 개의 절점을 갖으며 각 절점 당 두 개의 횡 방향 변위와 두 개의 회전 변위를 갖는 8 자-유도계의 모델을 사용하였다. 각축의 지지 베어링들은 점 지지의 스프링 및 댐퍼로 모델링 하였으며 지지부의 각 동 특성 계수들은 해석적인 방

법을 통해 구하였다.

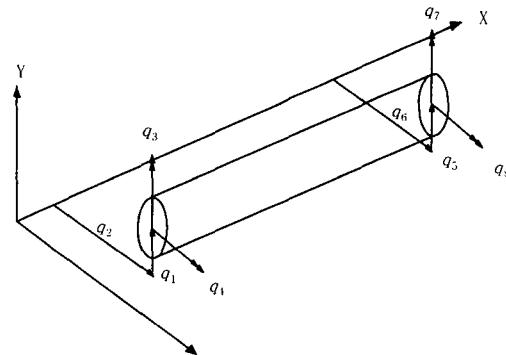


Fig. 1 Finite beam element

전단력, 자이로 효과 등의 보전력 계에 의한 탄성에너지 및 운동에너지를 구한 후 Lagrange 식을 이용하면 다음과 같은 연삭기 시스템에 대한 운동 방정식을 얻을 수 있다.<sup>(8)(9)</sup>

$$([M_T] + [M_R])\{\ddot{q}\} + \left( [C] - \sum_{i=sW} \Omega_i [G_i] \right) \{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\} \quad (1)$$

식(1)에서, 하첨자  $s$ 는 주축 및 연삭수들의 회전체를 나타내며, 하첨자  $w$ 는 공작물 회전체를 나타낸다. 또한,  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[G]$  및  $[K]$ 는 각각 질량, 댐핑, 자이로 및 강성 행렬이며,  $\Omega$ 는 각 축의 회전 속도이다. 단, 변위벡터  $\{q\}$ 는 아래와 같이 구성된다.

$$\{q\} = \begin{cases} \{q_s\} \\ \{q_w\} \end{cases} \quad (2)$$

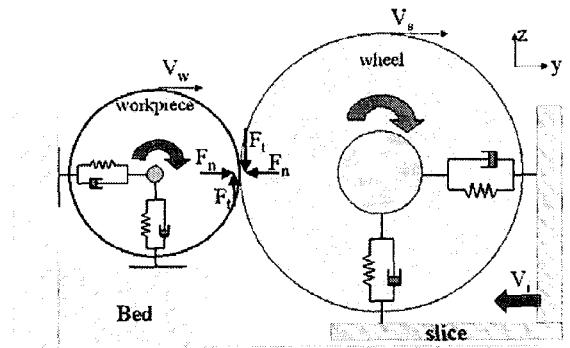


Fig. 2 Schematic of external plunge grinding process

### 2.2 동적 절삭력

Brown<sup>(10)</sup>의 해석 방법을 응용하여 동적 절삭력을 모델링 하였다. 프런지 연삭가공에서 연삭수들

과 공작물과의 상호작용을 단순화시켜 보면 Fig.2와 같다. 연삭수들의 이송속도를  $V_i$ 라 하면, 가공시간  $t$ 에 대한 연삭수들의 전체 이송된 길이는  $V_i t$ 가 된다. 가공물이 가공된 길이를  $W_w(t)$ , 연삭수들이 마모되어진 길이를  $W_s(t)$ 라 한다. 그리고 가공물과 연삭수들의 접촉으로 인한 탄성 변형을  $X_c(t)$ 라 하고 주축과 공작물 회전축 진동에 의한 연삭수들과 공작물간의 상대 변위를  $X_m(t)$ 라 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$V_i t = W_w(t) + W_s(t) + X_c(t) + X_m(t) \quad (3)$$

공작물과 연삭수들의 회전 주기를 각각  $T_w$ 와  $T_s$ 라 하고 공작물의 순간 가공량을  $\Delta W_w(t)$ , 연삭수들의 순간 마모량을  $\Delta W_s(t)$ 라 하면,

$$\begin{aligned} W_w(t) &= W_w(t-T_w) + \Delta W_w(t) \\ W_s(t) &= W_s(t-T_s) + \Delta W_s(t) \end{aligned} \quad (4)$$

이 성립한다. 수직 가공력을  $F_n$ 이라 하면,

$$\begin{aligned} \Delta W_w &= (F_n(t) - F_{n0})/G_w \quad (F_n \geq F_{n0}) \\ \Delta W_w &= 0 \quad (F_n < F_{n0}) \\ \Delta W_s &= F_n(t)/G_s \end{aligned} \quad (5)$$

이 성립한다. 식(5)에서  $F_{n0}$ 는 임계 절삭력이고,  $G_w$ 는 가공물의 절삭 강성이고,  $G_s$ 는 연삭수들의 마멸 강성이다.  $G_w$ 와  $G_s$ 는 다음과 같은 관계식으로부터 구한다.

$$\begin{aligned} G_w &= V_w a_p / \Lambda_w \\ G_s &= V_s a_p / \Lambda_s \end{aligned} \quad (6)$$

식(6)에서  $V_w$ 와  $V_s$ 는 각각 공작물과 연삭수들의 접촉점에서의 접선방향 속도이며  $a_p$ 는 가공폭이다.  $\Lambda_w$ 와  $\Lambda_s$ 는 각각 가공물 제거율과 연삭수들 마모율을 결정짓는 실험상수로서 임의의 가공조건에 대해서 일정한 값을 갖는다. 따라서 가공조건이 설정되면  $G_w$ 와  $G_s$ 는 이미 알려진 실험식<sup>(11,12)</sup>에 의해 구해진다. 접촉강성을  $G_c$ 라 하면 접촉변형은 다음과 같다.

$$X_c(t) = F_n(t)/G_c \quad (7)$$

$F_n$ 에 대해서는 식(3)에 식(4),(5),(7)을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{(V_i t - W_w(t-T_w) - W_s(t-T_s) - X_m + F_{n0}/G_w)}{(1/G_s + 1/G_w + 1/G_c)} \quad (F_n \geq F_{n0}) \\ F_n &= \frac{(V_i t - W_w(t-T_w) - W_s(t-T_s) - X_m)}{(1/G_s + 1/G_c)} \quad (F_n < F_{n0}) \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)에서  $G_c$ 와  $F_{n0}$ 는 가공물과 연삭수들 마다의

특정값으로서 이 연구에서는 각각 Hucker<sup>(13)</sup>와 Hahn<sup>(14)</sup>의 실험결과를 이용하였다. 그리고 접선 방향 가공력  $F_t$ 는 수직 가공력  $F_n$ 과의 다음의 관계식<sup>(15)</sup>으로부터 구할 수 있다.

$$F_t = e \frac{\Lambda_s}{\Lambda_w} F_n \quad (9)$$

식(9)에서,  $e$ 는 가공물의 비절삭 에너지이다.

### 3. 연삭가공 공정 시뮬레이션

유한요소로 모델링된 연삭기 시스템의 개략도는 Fig. 3과 같다. 연삭기 진동계 지배방정식에 동적 절삭력 모델링을 연결하면, 연삭수들과 공작물 간의 접촉점에서의 상대변위  $X_m$ 은 두 회전체 중심들의 변위  $q_s$ 와  $q_w$ 의 총합이 된다. 가공이 진행됨에 따라 연삭수들이 공작물 쪽으로  $V_i t$  만큼 이송이 되면, 식(8)과 식(9)에서와 같은 가공력이 발생된다. 이렇게 발생되는 가공력은 연삭수들 주축 및 공작물 들의 진동계에 다음과 같은 외력으로 작용하게 된다.

$$\{f_C\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & 2 \\ 0 & \vdots \\ F_t & 4(m_s - 1) + 1 \\ -F_n & 4(m_s - 1) + 2 \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \\ -F_t & 4(m_w - 1) + 1 \\ F_n & 4(m_w - 1) + 2 \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 4n \end{bmatrix} \quad (10)$$

식(10)에서  $n$ 은 전체 절점 수이고,  $m_s$ 와  $m_w$ 는 각각 연삭수들 및 공작물 위치의 절점 번호이다.

연삭수들과 가공물이 처음 접촉하는 시점부터 가공시간  $t$ 를 시작하여 가공이 진행됨에 따라  $\Delta t$  만큼씩 증가시키고,  $W_s(t-T_s)$ 와  $W_w(t-T_w)$ 는 각각  $T_s/\Delta t$ 와  $T_w/\Delta t$  번 전의 단계에서의 값을 기억하고 있다가 사용하였다. 수치적분은 Newmark 법을 사용하였으며 시간 증분  $\Delta t$ 는 0.0002 초로 하였다. 그 밖에 연삭가공 동특성 해석을 위해서 사용한

표준 가공조건은 Table 1 과 같다.

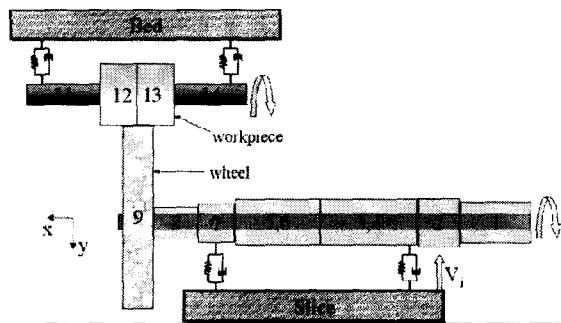


Fig. 3 Schematic of finite element modeling

Table 1 Standard conditions of grinding process

Condition	No. 1	No. 2	No. 3
Wheel speed (m/sec)	1.0	28	47
Workpiece speed (m/min)	72	7.8	72
Wheel Dia. (mm)	610	300	610
Workpiece Dia. (mm)	200	40	200
Wheel width (mm)	12.7	10	6.4
Depth of dress (μm)	12.7	6.5	12.7
Dress lead (μm)	76	100	76
Infeed speed (mm/min)	0.508	0.3302	0.508
Wheel specifications	A60L6VBE	A60K6VLE	A60L6VBE
Workpiece Hardness	Steel Rc42	Steel Rc45	Steel Rc42
Stiffness Coeff. (MN/m)	10, 100	1000	1000
Damping Coeff. (kN/ms)	10, 5	100	100

해석결과에 의하면, Table 1 의 조건.1 은 채터발생이 없는 안정적 조건이고 조건.2,3 은 채터가 발생되는 불안정한 조건들이다.

#### 4. 시뮬레이션 해석 결과 및 고찰

##### 4.1 베어링 특성에 따른 동특성 변화

회전체를 지지하는 베어링 특성에 따른 연삭 가공의 동특성을 살펴보았다. 해석에 사용된 가공 조건은 Table 1.의 조건.1 이다. 가공시간은 15 초이고, 그 후 4 초간은 스파크-아웃(Spark-out) 공정이다. Fig. 4 와 Fig. 5 는 베어링의 여러 스프링 강성( $k$ ) 및 감쇠계수( $c$ ) 조건에 대한 수직 가공력의 변화이다.

Fig. 4에서 보면, 강성이 변화되어도 가공력이 차이는 거의 없으며 대체로 가공력의 진동적 변동이 없는 상태이다. 처음 가공이 시작되고 5 초 동안 가공력이 증가하다가 가공력이 거의 일정한 정상상태에 도달된다. 정상 가공상태가 끝난 뒤의 스파크-아웃 공정 중에는 가공력이 서서히 감소되고 있다. 결국, 가공력의 채터가 거의 없는 안정된 가공조건에서는 베어링의 강성계수의 변화가 가공력에는 큰 영향을 미치지 않는다. 그러나 Fig. 5에서 보듯이, Fig. 4의 안정적 경우보다 감쇠계수가 작아지면 가공력의 진동현상이 발생된다. 감쇠계수의 경우 시스템의 안정성을 좌우하는 결정적인 역할을 한다.

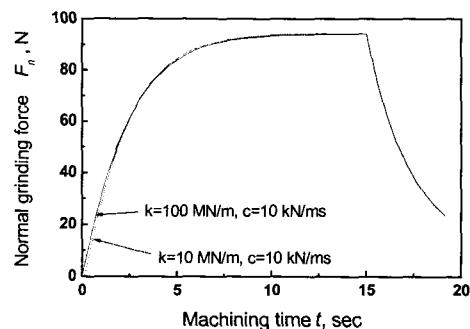


Fig. 4 Normal grinding force versus machining time.

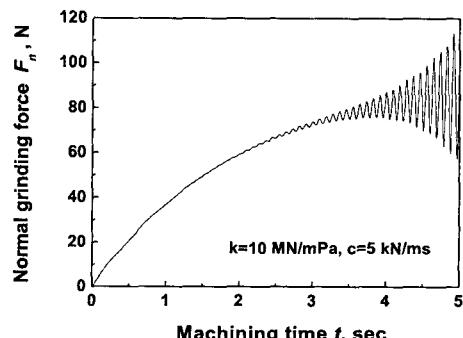


Fig. 5 Unstable grinding force versus machining time.

Fig. 6 은 베어링 강성( $k$ )이 10MN/m 이고 감쇠계수( $c$ )는 10kN/ms 일 때에 가공공정 중의 공작물과 연삭숫돌과의 접촉점에서의 상대 변위( $X_m$ )와 공작물의 회전축 중심의 변위( $q_w$ )와 연삭숫돌의 회전축 중심의 변위( $q_s$ )을 보여주고 있다.

Fig. 6 에서 보면, 공작물의 회전축 중심의 변위와 연삭숫돌의 회전축 중심의 변위가 가공 시작단계에서는 급격히 증가하다가 일정시간이 경과되면 서서히 감소하는 경향을 보이고 있다. 그리고 이들 변위들의 총합이 상대변위도 비슷한 양상을 보이고 있다. 따라서, 주축과 공작물 회전진동의 상대변위에 의한 가공오차는 가공시작 단계에서는 급격히 커지지만 가공시간이 길어짐에 따라 점차 작아질 것으로 예측된다.

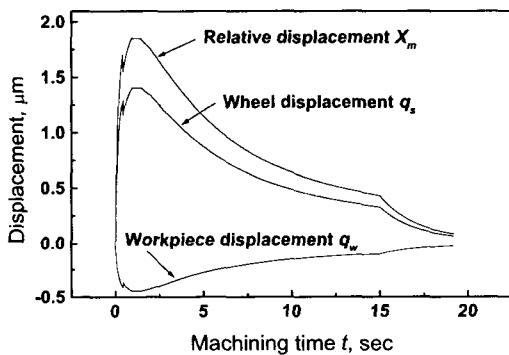


Fig. 6 Displacement versus machining time.

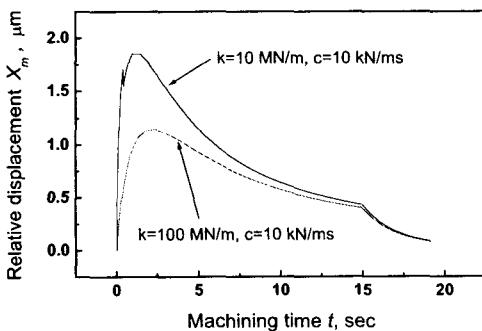


Fig. 7 Relative displacement versus machining time.

Fig. 7 은 베어링 강성이 연삭가공 중의 공작물과 연삭숫돌과의 상대변위에 미치는 영향을 나타내고 있다. 그럼에서 보면 베어링 강성을 경우에는 상대 변위가 감소가 되고 있다. 연삭기의 상대

변위가 변하면 절삭력이 변하고 그에 따른 공작물 가공율 및 연삭숫돌 마모율 등의 가공성능이 변화된다. 특히 상대변위 만큼의 공작물 양이 실제 가공이 되지 않으므로 가공 정밀도가 저하되게 될 것이다. 감쇠계수가 상대변위에 미치는 영향을 시뮬레이션 해석하여 본 결과 강성에 비해 그 영향이 적은 것으로 나타났다. 따라서 베어링의 감쇠계수보다는 베어링의 강성을 증가시키면 연삭숫돌과 가공물의 상대변위가 감소되어 어느 정도 가공정밀도에 향상이 있으리라 본다.

#### 4.2 채터 진동에 대한 안정성 해석

진동 발생에 따른 안정성 여부를 보다 효과적으로 해석하는 방법으로서 채터 성장률을 이용할 수 있다. 채터 성장률이 클수록 연삭기 시스템의 불안정성이 크다고 할 수 있다. Fig. 5 에서와 같은 연삭가공 중에 발생하는 채터에 의한 가공력의 급격한 변동은 다음과 같이 근사화 시킬 수 있다<sup>(5)</sup>.

$$F = F_0 e^{\alpha t} \sin \omega_c t \quad (11)$$

식(11)에서  $\omega$ 는 채터 진동주기이고  $t_c$ 는 채터 발생 후 부터의 가공시간이며  $F_0$ 는 채터가 발생될 ( $t_c=0$ ) 때의 가공력이다. 그리고  $\alpha$ 는 증가율을 지수로서 채터 진폭 성장률의 척도로 사용할 수 있다.

Srinivasan<sup>(6)</sup>은  $\alpha$ 를 스펙트럼 방식으로 간접적으로 추정하였다. 본 연구에서는 시뮬레이션으로 얻어진 수직 가공력 변화 곡선을 최소 제곱법으로 보간하여  $\alpha$ 를 직접 추정하였다. 연삭숫돌의 직경과 공작물의 속도 변화에 따른  $\alpha$ 값의 추정 결과가 각각 Fig. 8 와 Fig. 9 에 Srinivasan<sup>(6)</sup>의 해석결과(가공조건: Table 1, 조건.2)와 비교되어 있다.

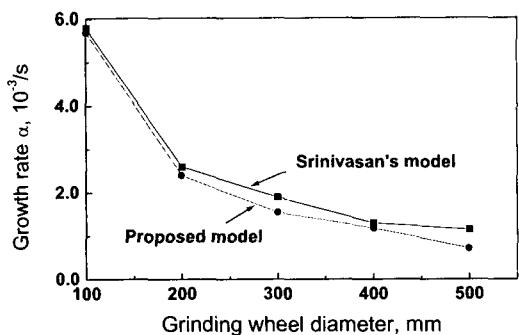


Fig. 8 Growth rate versus grinding wheel diameter.

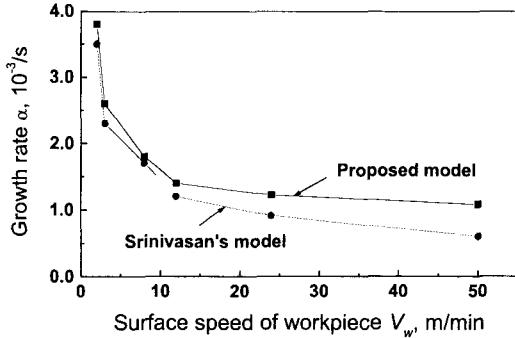


Fig. 9 Growth rate versus surface speed of workpiece.

시뮬레이션 해석에 의한 추정 결과가 기존의 연구결과와 잘 일치하고 있다. Fig. 8에서 보면, 연삭수들의 직경이 커짐에 따라 채터 성장률이 감소되고 있다. 그리고 공작물이 빠르게 회전될수록 채터 성장률이 감소되는 경향을 Fig. 9에서 보이고 있다.

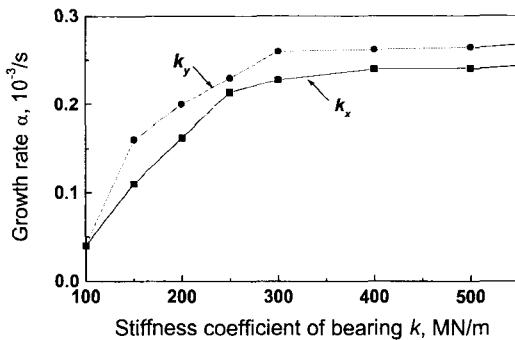


Fig. 10 Growth rate versus stiffness coefficient of bearing.

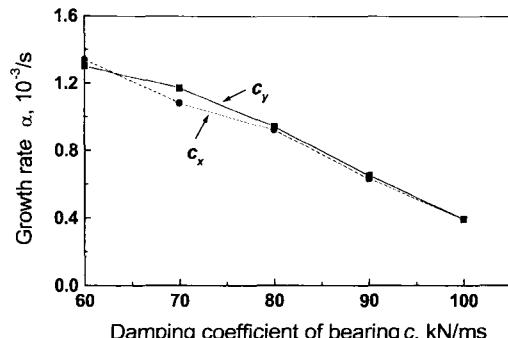


Fig. 11 Growth rate versus damping coefficient of bearing.

회전체 지지 베어링의 특성에 의한 가공력 증가율  $\alpha$ 의 변화를 살펴보았다. Table 1의 조건 3 가공조건을 기준으로 강성 및 감쇠계수를 축의 길이 방향( $k_y, c_x$ )이나 반경방향( $k_y, c_y$ )으로의 한 성분만을 변화시키면서 해석하였다.

Fig. 10에서 보면, 강성이 임계값(약  $3.0 \times 10^8 \text{ N/m}$ ) 이상에서는 베어링 강성의 증감에 대해  $\alpha$ 은 크게 변화되지 않는다. 그러나 임계값 이하에서는 강성이 감소함에 따라  $\alpha$ 도 작아지고 있다. 감쇠계수의 경우에는  $\alpha$ 에 대해서 큰 영향을 미치고 있음이 Fig. 12에서 보이고 있다. 감쇠계수가 증가함에 따라  $\alpha$ 가 민감하게 작아지고 있다. 따라서, 채터 발생을 억제하기 위해서는 베어링의 강성은 감소시키고 베어링의 감쇠계수는 증가시키는 것이 바람직하다. 그러나 베어링 강성의 감소는 연삭수들 주축과 공작물 회전축의 축진동 변위를 증가시켜 가공 정밀도를 감소시킬 수 있으므로, 연삭가공의 채터 증가율을 둔화시키기 위해서는 베어링 강성의 감소 보다는 감쇠계수를 증가시키는 것이 효과적일 것으로 해석된다.

## 5. 결론

원통외경 연삭가공 공정에서 연삭수들 주축과 공작물 회전축의 회전진동에 중요한 인자인 축지지 베어링의 강성과 감쇠계수의 크기가 가공성능 및 연삭기 시스템 안정성에 미치는 영향을 시뮬레이션 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

베어링 강성이 증가하면 연삭수들 주축 및 공작물 회전축의 회전 정밀도가 향상되어 가공성능은 좋아지지만 채터 발생시 진동량 성장율은 증가되는 경향을 갖게 된다. 베어링 감쇠계수는 강성에 비하여 주축 및 회전축의 회전 정밀도에 큰 영향을 미치지는 않지만, 감쇠계수 크기가 증가할수록 채터 발생 때의 진동진폭 성장율은 효과적으로 감소되게 된다.

연삭기 시스템의 안정된 상태에서 가공성능을 향상시키기 위해서는 베어링의 강성은 연삭수들 주축과 공작물 회전축의 회전 정밀도가 만족될 정도까지만 증가시키고 베어링의 감쇠계수는 가능한 크게 하는 것이 바람직하겠다.

## 후 기

이 논문은 1999년 한양대학교 교내연구비에 의해 연구되었으며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

1. Hahn, R.S., "On the Theory of Regenerative Chatter in Precision Grinding Operations," *Trans. ASME*, Vol. 76, No.1, pp. 593-597, 1954.
2. Snoeys, R., and Wang, I., "Analysis of the Static and Dynamic Stiffness of the Grinding Wheel Surface," *Proceedings, 9<sup>th</sup> International M.T.D.R. Conference*, pp. 1133-1148, 1968.
3. Bartalucci, B., and Lisini, G.G., "Grinding Process Instability," *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 91, No. 3, pp. 597-606, 1969.
4. Inasaki, I. And Yonetstu, S. "Regenerative Chatter in Grinding," *Proceedings, 18<sup>th</sup> International M.T.D.R. Conference*, pp. 423-429, 1977.
5. Thomson, R.A., "On the Doubly Regenerative Stability of a Grinder: The Theory of Chatter Growth," *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 108, No. 2, pp. 75-82, 1986.
6. Srinivasan, K., "Application of the Regenerative Spectrum Method to Wheel Regenerative Chatter in Grinding," *Trans. ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 104, No. 1, pp. 46-54, 1982.
7. Liao, Y.S., and Shiang, L.C., "Computer Simulation of Self-Exited and Forced Vibrations in the External Cylindrical Plunge Grinding Process," *Grinding Fundamentals and Applications – Winter Annual Meeting of ASME*, pp. 167-182, 1989.
8. Han, D.C., Choi, S.H., and Lee, Y.H., "Analysis of Vibration Characteristics for a Rotor-Bearing System Using Distributed Spring and Damper Model," *Int. J. of Rotating Machinery*, Vol. 1, No. 3-4, pp. 277-284, 1995.
9. Han, D.C., Choi, S.H., Lee, Y.H., and Kim, K.H., "The Nonlinear and Ball Pass Effects of a Ball Bearing on Rotor Vibration," *KSME International Journal*, Vol. 12, No. 3, pp. 396-404, 1998.
10. Brown, D., *Grinding Dynamics*, Ph.D. Thesis, University of Cincinnati, 1976.
11. Hahn, R.S. and Lindsay, R.P., "Principles of Grinding, part 2: the Metal Removal Parameter," *Machinery*, August, pp. 33-39, 1971.
12. Hahn, R.S. and Lindsay, R.P., "Principles of Grinding, part 3: the Wheel Parameter," *Machinery*, Sept., pp. 33-39, 1971.
13. Hucker, S.A., Farris, T.N., Chandrasekar, S., "Estimation of Contact Stiffness for Grinding of Hardened Steel," *Proc. Symp. on Contact Problems and Surface Interactions in Manufacturing and Tribological Systems - ASME WAM*, pp. 191-198, 1993.
14. Hahn, R.S., "The Influence of Threshold Forces on Size, Roundness and contour Errors in Precision Grinding," *Annals of the CIRP*, Vol. 30, No. 1, pp. 251-254, 1981.
15. Lindsay, R.P., "Principle of Grinding," *Metals Handbook 9<sup>th</sup> ed.*, Vol. 16, pp. 421-426, 1989.