韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2000, 5. 제 39권, 제 1호, 37-47.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2000, Vol. 39, No. 1, 37-47.

교사의 무한개념 이해도 조사 연구

박 임 숙 (단국대학교 대학원)

I. 서 론

수는 수학의 기본이며 우리 생활과 밀접한 관계를 가지고 있다. 그러면서도 수는 매우 복합적인 개념이다. 우리는 학교에 입학하기 전부터 이미 수와 더불어 생활하며 초등학교에서는 셈수로부터 수를 다루게 된다. 셈수란 자연수의 수열로 수세기와 계산 활동의 기초(우정호, 1997)가 되는데 이 과정에서 우리는 수의 무한을 경험하게 된다.

수의 무한에 대한 구체적인 인식은 이미 16세기에 갈릴레이로부터 싹이 튼다. 그는 자연수의 개수는 완전제곱수의 개수와 같다고 주장하였는데 갈릴레이의 이러한 주장은 실무한을 최초로 언급하였다는 역사적 의미를 갖는다. 그러나 그는 실무한에 대한 생각을 거부하였다(박세희 역, 1984). 무한집합을 실무한의 개념으로 생각하여 무한집합에서의 크기 개념을 유한집합에서의 그것과 구별한 사람은 Cantor이다. 즉, 두 집합의 원소가 일대일대응이 되면 두 집합의 크기는 같다고 한다. 그러나 이러한 무한집합에 대한 크기를 비교하는 것은 무한에 대한 우리의 직관과 잘 맞지 않는 경우가 많다. 실제로 중·고등학교 학생들은 자연수의 집합과 짝수의 집합의 원소의 개수가 같은가 하는 질문에 대하여 28.5%만이 같다고 답하였다(김현정, 1990). 직관에 의한 무한 개념은 후에 수학적으로 정의된 무한 개념을 학습한 후에도 학생들에게 그대로 남아 있다.

제 6차 교육과정의 중학교 수학 교과서에서는 1학년에서 양의 유리수를 확장하여 유리수 개념을 도입하고, 2학년에서는 유리수의 소수 표현을 통해 수의 무한 표현을 보이며, 3학년에는 무리수 개념을 도입하여
유리수와 더불어 실수 개념을 완성하고 그것을 수직선위에 나타내며 실수의 무한 개념을 제시한다. 물론 여기에서 Cantor 식의 무한 집합에 대한 지식을 학생들에게 제공하는 것은 아니다. 그렇지만 교사들은 중학교 교과서 내용을 학생들에게 전하기 위해 학습환경을 구성하여야 하며 그러기 위하여서는 그 내용을 수학적으로 정확히 알고, 그것을 학교수학으로 변환한 교과서 내용을 재구성해야 할 것이다. 그러나 수학교육과 대학생을 상대로 한 연구(김현정, 1990)에서도 알 수 있듯이 실수의 근간이 되는 무한 개념은 그것을 수학적으로 배운 후라도 이해가 잘 되지 않음을 알 수 있다. 이와 같은 결과는 그들이 수학 교사가 되었을 때 교수활동에 영향을 미칠 것이다. 이에 본고에서는 실수의 무한개념에 관한 선행연구를 살펴보고, 중학교 교육과정을 지도하는데 바탕이 되는 실수의 무한개념에 대한 수학 지식을 살핀 후, 이를 대학에서 다룬 수학적인 언어가 아니라 수학 교과서에서 다루는 바와 같은 일상적인 언어로 재구성하여 그것에 대한 교사들의 이해 정도를 살펴보고자 한다.

II. 문헌연구

김현정(1990)은 학생들의 무한에 대한 사고 상태를 알아보기 위하여 중, 고등, 대학교 학생들을 대상으로 설문조사를 하였다. 그 내용은 무한 불가분성, 초한수, 무한소, 연속체, 실무한과 잠재적 무한, 보존원리와 관련된 무한, 무한적 사고, 수에 관한 무한개념으로 나뉘어 22문항으로 구성되었다. 여기에서 무한에 관한 이해 정도는 무한 개념의 표현을 수학적으로 배운 사람과 배우지 않은 사람 사이에 큰 차이를 보인다. 이는 무한에 대한 직관과 수학적 표현이 잘 일치하지 않음을 보이는 것이다. 수학교사는 직관적으로 무한을 이해하고 있는 학생들에게 수학을 통하여 무한을 이해할 수 있도록 하여야 하는데, 이를 위하여서는 현장의 수학교사들의 실수의 무한개념에 관한 이해정도에 관한 자료가 필요하다.

Fischbein(1981)은 무한 개념에 대한 학생들의 직관을 측정하기 위한 연구를 하였다. 연구대상 학생들은 8~9

학년이었고, 연구 문제는 8개로 거의 실수의 무한에 관한 문제였다. 여기서의 주안점은 대상 학생들이 문제의 정답을 아느냐가 아니라, 자기의 직관에 대하여 신뢰(confidence)정도와 분명함(obviousness)정도를 측정하기 위한 것이다. 그 결과 자신의 답이 수학적으로는 맞지 않는다 하더라도 무한 개념에 관한 자신의 직관에는 확신을 갖는 경우가 많다. 수학이 순수한 구조를 지닌다 해도, 우리가 수학적 상황에 직면했을 때 그에 대한 해석이 직관에 의해 방해를 받는 것을 피할 수는 없는 것이다. 이러한 무한 개념은 교수의 영향을 그다지 받지 않는다. 무한의 직관에 대한 모순적인 면은 근본적으로 유한한 실체에만 적합한 우리의 일상적인 논리적 구조에 기인하는 것이며, 수학적 훈련은 학교에서 즉각적으로 가르쳐지고 있는 개념에 의해서만 무한의 어려움을 극복할 수 있게 할뿐이다(Fischbein, 1979, 김현정, 1990에서 재인용). 이 논문에는 실수의 연속성을 설명하는 설문이 있다. 본 논문에서 그 설문을 인용하여 교사들에게 제공하여 수학적 훈련으로 무한의 어려움이 극복될 수 있는가를 설명하고자 하였다.

박선화(1993)는 수학의 개념 중에서 학생들의 자연스런 직관과 가장 크게 어긋나고 그래서 오개념이 생기기 쉽고 학생들에게 수학은 실생활에서 필요 없는 어려운 학문이라는 인상을 주는 개념 중의 하나가 무한 개념이라 하며 무한 개념의 발달에 대하여 시대적으로 고찰하였다. 여기에서 아리스토텔레스는 무한을 '완성감으로 존재하는 것'이지 '현실태로 존재하는 것'이 아니라 하여 가능한 무한(potential infinity)의 출발점이 되었다. 이후 시대의 변화에 따라 무한에 대한 연구가 계속되었으며 갈릴레이는 유한적인 개념이 무한의 경우에는 통하지 않는다는 것을 알고 '같다', '더 작다', '더 크다'라는 말은 무한에는 적용시킬 수 없고 유한한 양에만 사용할 수 있다고 주장하였는데 이는 실무한(actual infinity)을 최초로 다루었다는 역사적인 의미를 지닌다. 무한 개념은 칸토르에 이르러 수집합을 가능한 무한이 아니고 현실적인 무한, 즉 잠재적 무한이 아닌 실무한 혹은 완결된 무한으로 다루어져 집합론이 완성된다. 이러한 무한 개념의 역사를 통해서 알 수 있는 것은 무한 개념은 자연스러운 논리적인 귀결도 아니고 현실 세계에 모델을 가진 개념도 아닌 순수한 인간정신의 창조물이며, 다른 어떤 개념보다도 수학적 개념의 기본 특징인 추상성과 논리성이 강한 인간의 적극적인 의지의 산물이라는 것이다. 그러므로 이는 받아들이기 어려운 개념이므로 학습이나 교수방법에 대한 많은 연구가 필요할 것이다. 본 논문에서는 가능한 무한과 실무한에 관한 위의 설명을 바탕으로 그 이해정도를 알아보기 위한 설문을 제시하였다.

Ⅲ. 중등 교과 과정에 나타나는 실수의 성질

중학교 3학년 교과서에는 다음과 같은 내용이 있다.

수직선 위에 유리수에 대응하는 점이 무수히 많이 있다. 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있게 되므로, 이들 유리수에 대응하는 수직선 위의 점들도 무수히 많이 있음을 알 수 있다. 또 순환하지 않는 무한소수인 무리수도 수직선 위의 점에 대응시킬 수 있으므로, 수직선 위에는 무리수에 대응하는 점이 무수히 많이 있음을 알 수 있다. 실제로, 수직선은 유리수와 무리수에 대응하는 점으로 메워져 있고, 그 이외의 수에 대응하는 점은 없다는 것이 알려져 있다 또 수직선 위의 점 전체의 집합과 실수 전체의 집합 사이에는 일대일대응이 이루어짐도 알려져 있다(김연식 외, 1997).

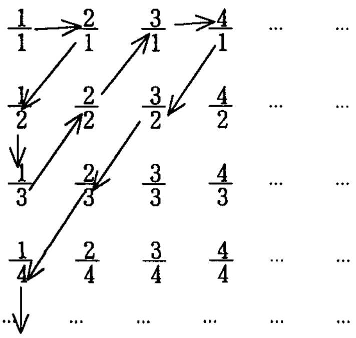
위의 내용은 실수 집합을 완성시키는 것인데, 그 과정은 다음과 같이 교과서에 나타난다. 자연수 1과 2 사이에는 다른 자연수가 없다. 그러나 유리수 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$사이에는 $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{12}$와 같은 유리수가 반드시 존재한다. 이와 같은 방법으로 유리수의 조밀성을 설명하고 그것을 수직선 위에 나타낸다. 그리고 유리수 이외에 수직선 위에 수를 나타낼 수 있음을 보이기 위해 단위 길이의 정사각형의 대각선을 수직선 위에 작도함으로써 무리수 $\sqrt{2}$를 표현한다. 또 무리수가 무수히 많음을 보이고, 순환소수의 분수 표현이나 무리수의 무한소수 표현을 제시하여 실무한 개념을 보인다. 이러한 교과서의 내용은 모두 실수의 무한 개념을 바탕으로 하여 전개된 것이다. 물론 교과서 저자들이 그 내용을 엄밀하게 학생들에게 보이지는 않지만, 교사들은 교과서 내용을 재구성하여 학생들이 학습할 환경을 만들어야 하므로 그것에 관한 수학적 내용을 잘 이해하고 있어야 할 것이다. 이

에 실수의 무한 개념의 기초가 되는 Cantor의 초한기수, 실수의 연속성, 수직선 표현, 실무한과 잠재적 무한 등에 대하여 간단히 살펴본다.

1. 초한기수

기수로서의 자연수는 Cantor의 접근법이다. 두 집합 A와 B 사이에 일대일대응이 존재할 때 A와 B를 서로 동치라 하고 기호 A~B로 나타낸다. 서로 동치인 두 집합은 같은 기수(cardinal number)를 갖는다고 말한다. Cantor는 무한(infinite)이라는 표현 대신에 초한(transfinite)이라는 개념을 도입하여 무한집합을 더 자세히 분류하였으며, 이와 같은 개념으로 유리수의 집합과 실수의 집합의 크기를 다음과 같이 설명한다.

유리수의 집합은 조밀하므로 자연수의 집합보다 훨씬 큰 것처럼 보이지만, 이 집합 역시 자연수의 집합과 같은 셀 수 있는 집합이다. 아래의 그림과 같은 대각선 방법을 사용하면 유리수 전체와 자연수 전체 사이에는 일대일 대응이 생기므로 유리수 전체의 집합은 셀 수 있는 집합임을 알 수 있다.



또 실수 전체의 집합은 조밀하지만 유리수의 집합과는 달리 셀 수 없는 집합이라는 것을 보이기 위하여 다음과 같은 귀류법을 사용한다.

0과 1사이의 실수 집합이 셀 수 있는 집합이라고 가정해 보자. 여기서 모든 수를 무한 소수 꼴로 나타내면 다음과 같이 차례로 번호를 붙일 수 있다.

$a_1 = 0.\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots a_{1k} \cdots$

$a_2 = a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots a_{2k} \cdots$

.
.
.

$a_k = a_{k1}\ a_{k2}\ a_{k3} \cdots a_{kk} \cdots$

.
.
.

(단, a_{ij} 는 0과 1부터 9까지의 자연수)

그런데 0과 1사이의 실수 중에서 위의 무한 소수에 포함되지 않는 것이 존재한다. 예를 들면, $a_{kk}=1$일 때 $b_k \neq 1$, 그리고 $a_{kk} \neq 1$일 때는 $b_k = 1$라 하면 무한소수 $b = 0.\ b_1\ b_2\ b_3 \cdots b_k \cdots$는 0과 1 사이에 존재하면서 위의 어떤 무한소수 a_i 와도 다르며, 따라서 위의 열의 0과 1 사이의 모든 수를 포함한다고 한 가정에 모순된다. 그러므로 실수의 집합은 셀 수 있는 집합이 아니다.

2. 실수의 연속성

실수의 연속성은 유리수와 실수를 구분하는 중요한 성질이다. 우리의 교과서에서 수의 집합을 확장할 때 자연수로부터 정수, 유리수를 차례로 구성한다. 그리고 유리수를 확장하여 실수 체계를 구성한다. 이 때 유리수가 조밀함에도 불구하고 수직선을 채울 수 없음을 알고 그것을 메우기 위해 무리수를 도입한다. 이와 같이 실수의 연속성을 설명하기 위하여 유리수에서 실수를 도입하는 방법은 유리수 집합의 Dedekind Cut(허민 역, 1995)을 이용하거나 유계인 단조수열의 수렴을 이용하는 것이다. 이들 내용은 실수의 연속성에 관한 교과서 내용의 배경지식으로, 수학 교사가 그 내용을 알고 있어야 할 것이다.

3. 실수와 수직선

수직선은 학교 수학에서 중요한 도구이자 모델이다. 수직선은 초등학교 수학 교육의 초기부터 사용되어 자연수, 분수, 소수, 음수, 무리수 등의 순으로 수를 채워가며

실수와 일대일대응이 됨을 보이게 된다. 실제로 수직선은 실수체계와 동형이다.

4. 잠재적 무한과 실무한

실무한이란 집합은 집합의 원소들이 모두 실제로 존재한다고 생각하는 경우이고, 잠재적 무한이란 집합은 계속 커질 수 있으나 그 총체를 가지지 않는다는 생각이다. Cantor에 의한 집합론은 수집합을 실무한으로 다루었으므로 가능했다.

교과서에서 자연수의 집합을 $\{1, 2, 3, \cdots\}$과 같이 표현하는 것은 잠재적 무한으로 생각한 것이고, $\{x \mid x$는 자연수$\}$와 같이 조건제시법으로 표현함은 집합을 실제로 완결되어 존재하는 것으로 생각하는 것이다. 그리고 수집합의 연산에 대하여 닫힌 성질들을 살펴보는 것도 집합을 실무한으로 보고 다루는 것이다. 중학교 2학년 과정에서 나오는 순환소수를 보면 $\frac{2}{3} = 0.666\cdots$이라는 표현에서 끝없이 숫자가 반복하여 나오는 수를 완결된 것으로 간주하여 $\frac{2}{3} = 0.\dot{6}$과 같이 실무한의 개념으로 취급하였다. 또한 무리수 $\sqrt{2}$도 소수 표현에 의하면 1.4142135623⋯와 같이 무한히 수가 확장되어 가는 경우가 되지만 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 되는 수로써 완결되어 존재하는 실무한(박세희 역, 1984)으로 취급되어지고 있다. 이와 같이 수에 대한 개념은 수학을 배워감에 따라 잠재적 무한에서 실무한으로 옮겨갈 수 있다.

Ⅳ. 연구 과제 및 연구 방법

교사는 그 학생들을 위해 지식을 재생산하는 일에 종사하는 배우이다. 이 때 수학 지식을 재구성하는 것이 교사가 해야 할 필수적인 활동이며 동시에 그것은 교수학적이고 수학적인 본질이다. 그것이 교수학적 변환을 구성하게 된다 (Brousseau, 1997). 그러므로 교사가 지식을 사용해서 좋은 질문을 제기하고 논쟁을 형성시키는 경제적인 방법이 되게 하고, 용어가 형식화의 상황에 숙달되는 도구가 되게 하고, 수학적 증명이 학생들을 납득시키는 방법이 되게 하려면, 그는 자신의 수업에서 과학적 작은 사회를 흉내내야 한다. 그러기 위하여 교사의 수학 지식에 대한 이해는 매우 중요하며 그것의 일상 언어로의 변환 또한 중요하다고 하겠다. 이에 본고에서는 다음과 같은 내용을 연구 과제로 삼아 연구하고자 한다.

1. 연구 과제

수는 학교 수학에서 다루는 여러 개념 중에서 가장 먼저 만나는 개념이다. 초등학교에서 자연수를 알고 그것을 전개해 나가면서 학생들은 자연히 무한과 만나게 된다. 그 후 오랜 기간에 걸쳐 수의 영역은 점차 확대되어 분수, 소수, 정수, 유리수, 무리수로 확장되어 가고, 중학교 3학년에 이르러서는 실수의 개념을 획득하도록 교과서는 구성되어 있다. 물론 학생들이 무한 집합인 실수가 지니는 연속성이나 기수 개념을 중·고등학교에서 접하지는 않는다. 그러나 무한 집합인 실수를 재구성하여 학생들의 학습 환경을 설정하여야 하는 교사들은 그 내용을 잘 이해하여야 할 것이다. 예를 들면, NCTM은 "무리수 공부를 확장함에 따라 학생들은 유리수와 무리수 사이의 차이를 깊고 올바르게 이해해야 한다. 예를 들어, 학생들은 e, $\sqrt{2}$ 외에도 수많은 무리수가 존재함을, 그리고 무리수는 사실상 유리수보다 훨씬 수가 많음을 깨닫게 되어야 한다"고(NCTM, 1998)하였는데 이를 위하여서는 실수의 기수와 유리수의 기수가 다름을 알고 있어야 한다. 그러나 무한 개념은 직관에 많은 영향을 받으므로, 교사들이 비록 대학에서 수학을 전공하여 무한 개념을 학습하였다 할지라도 그 지식을 잘 이해하였는지는 알기 어렵다.

또 대학에서는 수학적인 표현을 통하여 학습하였으나 중등학교 교과서에서는 앞의 인용문에서 살펴본 바와 같이 일상 언어로 설명하고 있다. 그러므로 그런 수학적 표현을 일상 언어로 바꾸었을 때에 그것이 의미하는 수학적 내용을 잘 이해하였는지도 알기 어렵다. 이에 본고에서는 실수의 기수, 연속성, 수직선과의 관계 그리고 실무한 등 실수에 관한 무한 개념을 일상 언어로 표현하였을 때 교사들이 어느 정도 이해하는지를 알아보고자 한다.

2. 연구 방법

위의 연구 과제를 객관식 설문으로 작성하여 조사하였다. 설문 문항은 김현정(1990)의 논문 중 실수에 관한 내용을 수정하지 않고 옮겼는데 이는 그 결과를 비교하기 위한 것이며, Fischbein(1981)의 논문 중에서는 수직선 위에는 유리수 또는 무리수를 나타낼 수 있다는 내용을 우리말로 번역하여 사용하였다. 또 유리수의 기수에 관한 문항을 첨가하여 전체 설문의 내용은 자연수, 유리수, 무리수, 실수 집합의 크기 비교, 실수의 연속성, 수직선 위의 실수 표현, 실무한과 잠재적 무한에 관한 것이다. 이 때 그 표현은 수학적 언어가 아니라 앞의 인용에서 살펴본 바와 같이 우리의 교과서 저자들이 사용하는 일상 언어로 구성하여 제공되었다(부록 참조).

3. 연구 대상 및 절차

연구 대상은 전국의 수학 교사들을 대상으로 2000년 1월 4일부터 6일 까지 실시된 학교수학교육학회 워크숍 참가자들 중 연구자의 활동에 참가한 사람들이다. 대상 인원은 38명이었고, 그 구성은 중학교 교사, 고등학교 교사, 기타(수학교육 전공 대학원생 또는 강사)들이다. 이들은 모두 대학에서 수학이나 수학교육을 전공한 사람들이다. 이들을 대상으로 워크숍 활동 중의 시간을 활용하여 설문을 실시하였다. 설문의 분석은 백분율로 하였다.

V. 연구 결과 분석

1. 연구 대상 분석

설문에 응답한 사람들은 모두 대학에서 수학 또는 수학교육을 전공하였다. 또 교육경력이 20년 이상인 사람들 중 3명이 수학 또는 수학교육전공으로 대학원을 수학하였다. 그러므로 이들은 모두 대학에서 현대수학을 배운 사람들이라 할 수 있다. 교육 현장에는 대학에서 수학을 부전공으로 선택하였거나, 혹은 수학이 아닌 교과목을 가르치는 현직 교사 중 방학 중 부전공 연수 과정을 통하여 수학 교사 자격을 획득하고 수학을 가르치는 경우가 종종 있다. 그러므로 이번의 연구 대상이 일반적인 현장 수학 교사를 대표한다고는 할 수 없다. 연구 대상에 대한 분석은 다음 <표 1>과 같다. 결과를 분석할 때 남, 녀의 경우를 구분하지는 않았다.

<표 1> 연구 대상 분석(단위 : 명)

분류 \ 학교 급별		중학교교사	고등학교교사	기타	합
총인원		14	14	10	38
대학원 (수학 또는 수학교육)		5	12	10	27
성별 (남자: 여자)		4 : 10	11 : 3	2 : 8	17 : 21
교육 경력	10년 미만	10	4	10	24
	10년 이상 20년 미만	4	6		10
	20년 이상		4		4

2. 설문 문항 분석

설문은 실수의 성질에 관한 내용이며 9문항으로 구성하였다. 각 문항별로 응답 수를 살펴보면 다음 <표 2>와 같다.

<표 2> 설문 문항당 응답수(단위 : 명)

보기번호 \ 문항번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2			7	22	25	35	32	1
2	1	11	25	14	6	11	1	4	21
3	35	27	12	12	10	1	2	2	13
4			1	3					3
정답번호	3	3	2	3	3	2	1	1	2
정답률	0.921	0.719	0.657	0.316	0.263	0.289	0.921	0.842	0.553

각 설문을 구체적으로 분석하면 다음과 같다.

이때 김현정(1990)의 결과와 비교가 가능한 문항은 대학생의 결과와 비교 분석하였다. 왜냐하면 본 연구 대상자들은 대학에서 수학 또는 수학교육을 전공한 사람들이

므로 일반 중, 고등학생들과는 무한에 대한 이해가 다를 것이며, 김현정의 대상 대학생들이 수학교육과 학생들이었으므로 그들도 지금은 현직교사로 재직할 수도 있어서 이러한 비교가 의미가 있으리라 생각하기 때문이다.

먼저 Cantor에 의한 초한기수 개념에 대한 설문인 1번, 2번, 3번, 9번을 살펴본다.

1번 자연수의 집합과 짝수의 집합 원소의 개수를 비교하는 설문에서 두 집합의 원소의 개수가 '같다'고 답한 사람은 35명(92.1%)이었다. 이는 김현정(1990)에서 대학생들이 집합론을 배운 후에 보인 정답률(92.6%)과 차이가 없다. 그러므로 이 개념은 직관적으로도 이해할 수 있는 개념으로 이해가 잘되었다고 할 수 있다.

2번 자연수의 집합과 유리수의 집합에서 두 집합의 원소의 개수를 비교하는 설문에서는 27명(71%)이 두 집합의 원소의 개수가 '같다'고 답하였으나, 11명(29%)이 유리수 집합의 원소의 개수가 많다고 답하였다. 이는 유리수의 조밀성에 의한 직관으로 인하여 오류를 범함을 알 수 있다.

3번 자연수의 집합과 0과 1 사이에 존재하는 모든 실수의 집합에서 두 집합의 원소의 개수를 비교하는 설문에서는 '0과 1 사이에 존재하는 모든 실수 집합의 원소의 개수가 더 많다'고 답한 사람이 25명(65.7%)이고 두 집합의 원소의 개수가 같다고 답한 사람이 12명(31.6%)이었다. 이는 김현정(1990)에서 대학생들이 집합론을 배운 후에 보인 정답률(69.2%)과 비교할 수 있는데, 이는 실수의 개수에 관한 집합론적 수학 지식이 그것을 배운 직후의 상태와 비슷하거나 약간 잊혀졌다고 볼 수 있다. 2, 3번의 결과로 미루어 보다 실수 집합의 초한기수적 성질이 이해되는 것이 쉬운 것이 아님을 보인다고 할 수 있다.

9번 유리수와 무리수의 개수를 비교하면 어느 것이 더 많을까? 라는 설문에 대한 정답 '무리수가 더 많다.'를 선택한 사람은 21명(55.3%)이다 그런데 '똑같다.' 답한 사람도 13명(34.2%)이나 되어 유리수의 집합은 셀 수 있고 실수의 집합은 셀 수 없음이라는 무한에 관한 수학적 지식이 잘 이해되지 못했음을 알 수 있다.

이상에서 살펴본 바에 의하면 실수의 초한기수 개념은 대학에서 그것을 학습한 후에도 약 30%의 사람들이 이해하지 못하였으며, 현재 교사인 사람들도 별반 차이가 없다. 반면 집합론을 배우지 않은 중·고등학생들의 경우는 60%이상이 이를 이해하지 못하였다. 이는 무한 개념을 기수 개념을 통하여 수학적으로 학습을 하여 이해도를 높일 수는 있으나 그것을 충분히 이해하는 것이 쉽지 않음을 보인다고 할 수 있다. 하지만 직관에 의한 인식론적 장애이든지 아니면 지식의 이해가 잘 이루어지지 않은 것이든 간에, 교사가 잘 이해하지 못한 무한 개념은 교과서의 내용을 학습상황으로 구성하여 학생에게 전달해야 하는 교수활동에서 분명 장애가 될 것이다.

실수의 연속성에 대한 설문인 4번과 5번을 살펴보면 다음과 같다.

4번 '선분 AB가 있고 이 선분 위의 임의의 점 P가 존재한다. 선분 위의 점 P의 바로 옆에 있는 점이 존재하겠는가?' 라는 설문에 대하여 12명(31.6%)만이 '없다'라고 맞는 답을 지적하였는데 이는 김현정(1990)에서 대학생들이 집합론을 배운 후에 보인 정답률(31.9%)과 별 차이가 없다. 그리고 '무수히 많다'라고 답한 사람은 14명((36.8%)으로 이는 김현정(1990)에서 대학생들이 집합론을 배운 후에 보인 정답률(34.9%)과 비교할 수 있다. 이는 실수의 조밀성에 대한 이해가 부족할 수도 있지만, '바로 옆'이라는 표현을 잘 이해하지 못할 수도 있고 또 '바로 옆에 있는 점이 존재하는가?'에서 '있다'와 '존재하다'라는 용어를 일상 언어로 표현할 때 이중으로 쓰는 오류가 있을 수도 있다고 생각된다. 그러므로 이 내용 역시 수학적 이해 또는 표현이 쉽지 않다고 할 수 있다.

5번 '폐구간 [0, 1]을 선분 AB라 하자. 선분 AB위에 임의의 점 C를 정한다. 선분 AB를 이등분하여 점 D를 정한다. 또 선분 AD와 선분 DB를 이등분하여 점 E, F를 정한다. 선분 AE, ED, DF, FB를 각각 이등분하여 그 점을 정한다. 이와 같이 계속 반복하였을 때, 이들 중의 한 중점이 바로 점 C가 될 수 있을까?' 라는 설문은 수직선 위의 점이 유리수일 수도 있고 무리수 일 수도 있음을 묻는 내용이다. 이 설문의 내용을 보충 설명하면 점 C는 수직선 위의 임의의 점이므로 유리수일 수도 있고 무리수일 수도 있다. 그런데 폐구간을 계속 이등분하여 나갈 때 수직선 위에 나타나는 점들은 유리수를 나타낸다.

예를 들면 $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots$로 나타낼 수 있다. 이 설문에 대하여 정답인 '될 수 있을

때도 있고, 될 수 없을 때도 있다.' 라는 답을 선택한 사람은 10명(26.3%)으로 주어진 설문 중 가장 낮은 정답률을 보이고 있다. 이 설문에 '반드시 된다'라고 답한 사람이 22명(57.9%)이었다. 8-9학년을 대상으로 했던 Fischbein (1981)의 연구에서는 정답률이 6.5%에 불과하고 '반드시 된다'라고 답한 사람이 무려 77.6%가 되었다. 이와 비교하면 교사들의 이해 정도가 낫다고 할 수 있지만 70%이상의 교사들은 그 내용을 이해하지 못하고 있다. 이는 수직선 위의 점에 대응하는 수가 반드시 있는 것은 알지만 그것을 유리수와 무리수로 구별하여 생각할 줄은 모르는 것으로 설명할 수 있을 것이다. 이는 실수의 조밀성, 연속성에 대한 수학적 개념의 이해가 어려운 것일 수도 있고, 또 그것을 수학적 언어로가 아닌 일상언어로 나타냈을 때 이해가 어려운 것일 수도 있지만, 결국 대학에서 실수의 연속성을 배운 후에도 많은 사람들이 그 내용을 이해되지 못했음을 보여주는 것이다. 이는 무한 개념이 수학적 훈련으로 많이 향상되지 못함을 보인다 하겠다.

이제 수에 대한 실무한 혹은 잠재적 무한의 관점을 설문 6번, 7번, 8번에서 살펴보면 다음과 같다.

6번 자연수의 집합 N={1, 2, 3,⋯}을 생각해 보자. 자연수 집합은 그 원소가 계속 무한히 확장되어 가는 집합인가? 아니면 자연수 집합은 모든 자연수가 포함된 완결된 집합인가? 라는 설문에 대하여 11명(29%)은 '모든 자연수가 포함된 완결된 집합이다'라고 답하였고 25명(65.7%)은 '자연수 집합은 끝없이 확장되어 가는 집합이다'라고 답하였다. 초등학교 학생들은 수집합을 잠재적 무한으로 보는 것이 타당할 것이다. 그러나 이미 대학에서 집합론을 배우고 또 중학교 1학년 교과서에서 집합을 조건제시법으로 표현하는 법을 학생들에게 가르치며, 집합의 닫힌 성질들을 다루는 교사의 입장이라면 우리는 수를 실무한의 입장, 즉 완결된 집합으로 볼 수 있어야 할 것이다. 그러나 이 결과는 김현정(1990)에서 대학생들이 집합론을 배운 후에 보인 정답률(24.8%)과 비교해 볼 만 하다. 이는 교사들도 실무한을 바탕으로 하는 집합론의 입장보다는 역시 직관적인 이해를 바탕으로 하는 잠재적 무한의 개념을 선호함을 보여주는 것이라 할 수 있다. 실무한 개념이야말로 수학의 추상성과 독창성을 보여주는 실례라고 할 수 있고 학생들에게 이러한 것이 수학이다라고 설명할 수 있는 좋은 소재가 될 수 있는데, 수학 교사들도 그에 대한 이해가 부족한 듯 하다.

7번 0.666⋯ 은 무한 소수이다. 0.666⋯은 완결된 형태가 아니므로 어떠한 길이를 나타내는 수로 생각할 수 없지 않겠는가? 라는 설문에 대한 답으로 '0.666⋯은 무한소수 형태이지만 어떤 일정한 길이를 나타내는 수로 생각할 수 있다.'라고 답한 사람은 35명(92.1%)으로 이는 김현정(1990)에서 대학생들이 집합론을 배운 후에 보인 정답률(77.8%)보다 훨씬 높았다.

8번 무리수 $\sqrt{2}$의 근사값은 다음과 같은 비순환 소수이다. $\sqrt{2}$ = 1.414235623⋯ , $\sqrt{2}$는 실제로 어떠한 길이를 나타내는 수로 생각할 수 있는가? 라는 설문에 대하여는 32명(84.2%)이 '$\sqrt{2}$는 어떤 길이를 나타내는 수이다.'라고 답하였으며, 이는 김현정(1990)에서 대학생들이 집합론을 배운 후에 보인 정답률(74.3%)과 비교할 수 있다. 이 문항은 설문의 보기에서 표현이 약간 적절하지 못하였는데, 그것이 7번의 결과와 차이를 보인 원인일 수도 있을 것이다.

실무한과 잠재적 무한의 개념은 그것의 표현 형태에 따라 직관의 영향을 받는 듯하다. 우리가 학교 수학을 지도하는데 '실무한' 또는 '잠재적 무한'이라는 용어를 사용하는 것은 아니다. 하지만 대학에서 무한 개념을 다루는 것 자체가 실무한을 바탕으로 이루어진 것이다. 그러므로 교사들은 그 개념에 보다 익숙할 필요가 있을 것이다.

이상의 설문 분석 결과를 종합하면 다음과 같다.

본 연구의 대상이 38명으로 많지 않았음에도 불구하고, 김현정(1990)의 연구와 비교가 가능한 문항을 살펴보면 정답률이 유사함을 알 수 있다. 초한기수에 관한 개념은 김현정(1990)의 연구와 비교할 때 대학교 때 형성된 지식의 구조가 거의 변화하지 않음을 알 수 있다. 약 30%의 교사들이 그 수학적 지식을 이해하지 못하였으며, 이는 직관에 의해 이해하고 있는 무한을 수학의 개념으로 이해하도록 학생들을 가르치는데도 영향을 미칠 것으로 생각된다. 실제로 유리수 집합, 실수 집합의 수를 센다는 것은 수학에서 만날 수 있는 경이로운 경험이다. 그러나 이를 잘 이해하지 못한 교사는 그 경험을 학생들에게 제공할 수 없을 것이며, 수학이 단지 계산뿐이라고 생각하는 많은 학생들에게 수학의 참 모습을 알릴 수 있

는 기회도 갖지 못할 것이다. 실수의 연속성에 관하여서는 본 연구의 결과나 김현정의 연구 결과 모두 매우 낮은 정답률을 보이는데, 이는 직관적으로 이해하고 있는 실수의 연속성을 수학으로 표현하여 이해하는 것이 어려운 것임을 보인다. 특히, 수직선 위에 유리수와 무리수를 모두 나타낼 수 있다고 말한 중학교 3학년 교과서의 내용을 일상 언어로 표현한 5번의 경우에는 그 정답률이 현격히 낮았다. 교사들 자신도 그 사실을 수직선 위에서 직관적으로만 이해할 뿐, 수학적 표현은 이해하지 못했음을 나타낸다고 할 수 있다. 집합 자체를 실무한 개념으로 표현하는 방법에서의 정답률은 김현정(1990)의 대학생의 경우와 크게 차이가 나지 않으나, 실수를 표현하는 방법에서 실무한 개념은 대학생들의 결과보다 훨씬 높은 정답률을 보인다. 이는 수를 계속 다룸으로써 완결된 실체로 파악하게 된다고 할 수 있을 것이다.

이와 같이 실수는 무한 개념이 바탕이 되어 수학적으로 정리되었지만, 무한 개념은 직관의 영향을 많이 받을 수 있기 때문에 대학에서 수학을 배우고 현재 수학을 가르치는 사람들에게조차도 그 개념 형성이 완전하지 못하다는 것을 살펴보았다. 이러한 교사들이 실수에 관하여 학습 상황을 잘 구성하고 그 내용을 교수학적 변환을 통하여 학생들에게 전하는 일도 쉬운 일이 아닐 것이다.

Ⅵ. 결론 및 제한점

수는 수학의 기본 도구이며, 일상에서도 우리와 늘 함께 하는 개념이다. 그 수는 아주 초보적인 자연수로부터 시작하여도 금방 무한임을 알 수 있다. 무한은 실제로 확인할 수 없는 개념이므로, 그것의 이해는 직관에 의존할 수 있다. 우리의 교과서 저자들이 중학교 3학년 교과서에 '유리수는 조밀하나 수직선을 모두 메울 수는 없고, 무리수와 더불어 수직선이 완전히 메워질 수 있다. 수직선과 실수는 일대일대응함이 알려져 있다'라고 서술한 것은 실수에 관한 무한 집합의 기수법, 연속성 등을 함축하여 표현한 것이라고 볼 수 있다. 물론 수의 무한에 관한 깊은 내용을 중·고등학교의 학생들에게 모두 전하고자 하는 것은 아니다. 그러나 수학 교사들은 대학에서 배운 집합론의 개념을 사용하여 무한을 유한처럼 다룰 수 있다. 그러므로 우리가 중학교 교육과정에서 실수의 개념을 구성하려면 교사는 실수에 관하여 우리가 앞에서 살펴본 것과 같은 내용들을 재구성하여 학생들이 학습할 수 있는 환경을 조성할 수 있어야 한다. 그러나 앞에서 살펴본 결과로 미루어 보면 실수의 무한 개념을 수학적으로 이해하는 것은 수학 교사에게도 그리 쉽지 않은 일이고, 그러한 상황에서 학생들에게 그 개념을 다시 전하여야 하는 일 또한 쉬운 일이 아닌 것이다. 예를 들면, 무리수가 무수히 많음을 교과서에서는 유리수의 경우와 같이 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ 으로 새로운 무리수를 만들거나, 또는 $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{2}+2$, …과 같은 방법을 사용하여 설명한다. 이것은 NCTM(1998)에서 말한 '무리수는 유리수보다 훨씬 많다'는 것을 보이는 내용이라 할 수 있다. 그러나 교사가 실수의 기수 개념을 잘 이해하지 못하고 있다면 위의 예를 제시한 교과서 저자들의 의도는 학생들에게 잘 전달되지 않을 수 있다.

교사는 학습상황에서 의사소통을 통하여 학생들에게 지식을 전달한다. 그 의사소통의 수단은 수학적 언어일 수도 있고 우리의 일상언어일 수도 있다. 그러나 위에서 살펴본 바와 같이 어떤 사람이 실수의 무한개념을 수학적으로 엄밀하게 배웠을지라도 그것을 일상의 언어로 이해하지 못하는 경우가 있으며, 이러한 상황은 그가 교사가 되었다 할지라도 달라지지 않음을 알 수 있다. 물론 이해와 의미의 지도에 대한 교사들의 협의는 진정한 교수학적 문제로서 교수학적 계약에서 기술적이고 이론적인 문제이다(Brousseau, 1997). 그러나 어떤 환경 상황도 교사의 수학 지식의 한계를 벗어나지는 않을 것이다. 그러므로 대학에서 배운 수학 지식이 교과서 저자에 의해 학생들에게 전달하고자 하는 내용으로 한 번의 교수학적 변환이 일어나고 그 교과서 내용을 다시 변환시켜 학생들에게 수학 내용을 전해야 하는 것이 우리 교사들의 할 일이라면, 우리 수학 교사들은 그 변환해야 할 수학 지식과 구성해야 할 환경 상황을 위하여 어떠한 준비를 하여야 할 것인지 깊이 생각해야 할 것이다.

본 연구는 설문에 참가한 사람의 수가 많지 않고 그들이 모두 수학 또는 수학교육을 전공한 사람들이었으므로 일반적인 현장 수학 교사들의 이해도를 대표한다고 할 수는 없다. 또 설문의 내용이 실수의 성질에 관한 모든 내용을 일상 언어화하지는 못했으며 설문의 용어 사

용에 있어 기존의 논문과 결과를 비교하기 위하여 그대로 사용한 때문에 다소 적절하지 못한 표현이 있었다. 이런 제한점을 고려하면서 이 연구의 결과를 바탕으로 앞으로 더 다양한 교사들을 대상으로, 실수의 무한 개념에 관해 더 많은 내용을 조사되어 현장 수학 교사들의 자기 개발 및 교수 활동에 도움이 될 수 있기를 바란다.

참 고 문 헌

김연식 · 김흥기(1997). 중학교 수학 3. 두산동아.

김현정(1990). 무한 개념의 수학교육학적 고찰, 교육학 석사학위 논문, 서울: 서울대학교 대학원.

박선화(1993). 무한 개념의 발달, 1993 대한수학교육학회 추계발표대회 논문집 pp.383-403, 서울: 대한수학교육학회.

박세희 역(1984). Kline, M. 수학의 확실성. 서울: 민음사.

우정호(1997). 학교 수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부.

허민 · 오혜영 역(1995). Eves, H. 수학의 기초와 기본개념, 서울: 경문사.

Brousseau, G.(1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics,* Kluwer Academic Publisher. Netherland.

Fischbein(1981). Is It Possible to Measure the Intuitive Acceptance of a Mathematical Statement? *Educational Studies in Mathematics,* Reidel Publishing Co. Dorchrecht, Holland, 12 pp.491-512.

NCTM(1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft.* NCTM. Reston. VR.

A Research on Teacher's Understanding of Infinity

Park, Im Sook

Dankook University Graduate, Seoul, Korea; e-mail: pimsook@hanmail.net

Number concept is basic in mathematics education. But it is very complex and is not easy to understand real number concept, because of its infinity.

This study tried to show that what percents of secondary school mathematics teachers in Korea understood the properties of real number, such as cardinality, continuity, relation with real line, and infinity, which were written by verbal language.

<부록)> 설문지

* 본 문제지는 실수에 대한 선생님들의 생각과 교수법에 대한 자료를 얻어 교수법 향상에 조금이나마 도움을 드리고자 합니다. 여러분의 솔직한 답변은 실수의 학습 지도를 개선하려는 노력에 크게 도움이 될 것입니다. 여러분의 협조를 부탁드립니다. * 본 문제지는 연구 자료로만 사용할 것이고, 다른 목적으로는 이용하지 않을 것입니다. * 경기기계공업고등학교 수학담당교사 박임숙 올림

1. 소속학교 : 초등학교( ) 중학교( )
고등학교( ) 기타( )
2. 성 별 : 남 ( ) 여( )
3. 대학전공 : 수학 또는 수학교육( )
다른 교과( ).
다른 교과이면 전공을 적어주세요( )
4. 대학원전공교과: ( )
5. 교육경력 :
10년 미만( ) 10년 이상 ~ 20년 미만( )
20년 이상 ~ 30년 미만( ) 30년 이상( )
6. 수학교과 교육경력 :
10년 미만( ) 10년 이상 ~ 20년 미만( )
20 년 이상 ~ 30년 미만( ) 30년 이상( )
7. 중학교 교사인 경우 현재 학교에서 사용하고 있는 수학 교과서
출판사( ) 저자 ( )

실수에 관한 설문

1. 자연수의 집합 N={1, 2, 3,…}과 짝수의 집합 E={2, 4, 6,…}이 있다. 두 집합의 원소의 개수를 비교해 보자.
① N의 원소의 개수가 더 많다.
② E의 원소의 개수가 더 많다.
③ 두 집합의 원소의 개수는 같다.
④ 모르겠다.

2. 자연수의 집합과 유리수의 집합에서 두 집합의 원소의 개수를 비교해 보자.
① 자연수 집합의 원소의 개수가 더 많다.
② 유리수 집합의 원소의 개수가 더 많다.
③ 두 집합의 원소의 개수가 같다.
④ 모르겠다.

3. 자연수의 집합과 0과 1 사이에 존재하는 모든 실수의 집합이 있다. 두 집합의 원소의 개수를 비교해 보자
① 자연수 집합의 원소의 개수가 더 많다.
② 0과 1 사이에 존재하는 모든 실수 집합의 원소의 개수가 더 많다.
③ 두 집합의 원소의 개수가 같다.
④ 모르겠다.

4.. 선분 AB가 있고 이 선분 위의 임의의 점 P가 존재한다. 선분 위의 점 P의 바로 옆에 있는 점이 존재하겠는가?
① 오직 하나 존재한다.
② 무수히 많다.
③ 없다.
④ 모르겠다.

5. 폐구간 [0,1]을 선분 AB라 하자. 선분 AB위에 임의의 점 C를 정한다. 선분 AB를 이등분하여 점 D라 한다. 또 선분 AD와 선분 DB를 이등분하여 점 E, F를 정한다. 선분 AE, ED, DF, FB를 각각 이등분하여 그 점을 정한다. 이와 같이 계속 반복하였을 때, 이들 중의 한 중점이 바로 점 C가 될 수 있을까?
① 반드시 된다.
② 안 된다.
③ 될 수 있을 때도 있고, 될 수 없을 때도 있다.
④ 모르겠다.

6. 자연수의 집합 N={1, 2, 3,…}을 생각해 보자
여러분은 자연수 집합을 그 원소가 계속 무한히 확장되어 가는 집합으로 생각하는가?
아니면 자연수 집합을 모든 자연수가 포함된 완결된 집합으로 생각하는가?
① 자연수 집합은 끝없이 확장되어 가는 집합이다
② 모든 자연수가 포함된 완결된 집합이다
③ 모르겠다

7. 0.666… 은 무한 소수이다.
0.666…은 완결된 형태가 아니므로 어떠한 길이를 나타내는 수로 생각할 수 없지 않겠는가?
① 0.666…은 무한 소수 형태이지만 어떤 일정한 길이를 나타내는 수로 생각할 수 있다.
② 0.666…은 무한 소수이므로 계속 증가 상태에 있으며 따라서 어떤 일정한 길이를 나타내는 수가 아니다.
③ 0.666…은 어떠한 길이로 나타낼 수 없다.
④ 모르겠다

8. 무리수 $\sqrt{2}$의 근사값은 다음과 같은 비순환 소수이다.
$\sqrt{2}$ = 1.414235623…
$\sqrt{2}$는 실제로 어떠한 길이를 나타내는 수로 생각할 수 있는가?
① $\sqrt{2}$는 어떤 길이를 나타내는 수이다.
② 비 순환 소수 꼴이므로 어떠한 길이도 나타낼 수 없다.
③ 수열 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …의 극한값에 접근해 가고 있는 수이다.
④ 모르겠다.

9. 유리수와 무리수의 개수를 비교하면 어느 것이 더 많을까?
① 유리수가 더 많다.
② 무리수가 더 많다.
③ 똑같다.
④ 모르겠다.