韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2000, 5. 제 39권, 제 1호, 49-58.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2000, Vol. 39, No. 1, 49-58.

알고리즘, 어떻게 가르칠 것인가?

조 완 영 (청주남성중학교)

I. 서 론

알고리즘은 증명과 더불어 확실한 답에 이르는 수학적 방법으로 인식되어 왔다. 알고리즘이란 "일련의 문제를 해결하기 위한 유한번의 절차"로 정의할 수 있다. 여기서 일련의 문제란 하나의 알고리즘을 이용하여 해결할 수 있는 문제들의 집합을 의미한다. 알고리즘은 이러한 문제들에 알고리즘을 정확하게 실행하면 정확한 답을 구할 수 있다는 보장을 해 준다. 역사적으로 알고리즘은 계산술과 밀접한 관계가 있으며, 학교수학의 중요한 테마였다. "수학은 그리스이래 증명을 통해, 아라비아식의 계산법을 통해 진리탐구의 전형이자, 인간의 사고력 도야의 수단으로 인식되어 왔다"는 우정호(1998)의 표현이나, "세는 일, 계산하는 일은 두뇌의 모든 질서의 근원이다.", "계산 정신과 진리의 감각을 분리시키는 자는 신이 결합시킨 것을 분리하는 자다"(김정환, 1976)라는 Pestalozzi의 말은 계산술로서의 알고리즘적 수학의 중요성을 강조한 것으로 볼 수 있다.

그러나, NCTM(1989)의 '학교수학 교육과정과 평가의 새로운 방향'에서 지필 계산에 대한 지나친 의존을 경고하면서, 학교수학에서의 알고리즘의 위상에 대한 논란이 일고 있다(Morrow, 1999). NCTM은 문제해결, 수학적 개념, 수감각을 강조하고 여러 가지 표준 알고리즘을 약화시킬 것을 권고하고 있다. 이러한 권고는 학교수학에서의 알고리즘의 가치에 의문을 제기하게 만들었으며, 학생들이 만든 알고리즘, 암산 알고리즘, 수감각, 계산기나 컴퓨터의 이용 등으로 옮아가게 되었다(Carraher & Schliemann, 1985; McIntosh, 1999). Carrol과 Porter(1997)는 수학교육에서의 지난 10년간의 변화를 지필계산에서 문제해결과 개념적 이해로의 변화로 규정짓고, 표준화된 알고리즘보다 학생들 스스로 발명한 알고리즘에 의한 학습이 이해를 촉진할 수 있다고 주장한 것도 같은 맥락에서 이해할 수 있다.

NCTM(1989)에서 지루한 계산 즉, 계산을 위한 계산문제를 약화시키자는 주장에 따라 제기된 알고리즘의 중요성에 대한 논란을 다음 세 가지로 요약할 수 있다.

㉮ 표준화된 알고리즘과 학생들 스스로 개발한 알고리즘의 관계를 어떻게 볼 것인가? (Campbell, Rowan & Suarez, 1999)

㉯ 알고리즘적 수학이 개념적 수학, 문제해결로서의 수학에 어떻게 관련되는가?

㉰ 지필 알고리즘과 계산기·컴퓨터 사이의 관계는 무엇인가?(Usiskin, 1999)

표준화된 알고리즘의 강조에서 학생이 발명한 알고리즘을 강조로의 변화는 훈련과 연습에 의한 계산 중심에서 개념과 아이디어 중심으로 변화되어야 한다는 주장(NCTM, 1989)과 같은 맥락에서 이해될 수 있으며, 수학적, 인식론적, 심리적인 측면에서 종합적으로 다루어질 필요가 있다. 본 연구에서는 ㉮에 대한 논의는 다음 연구로 미루고 ㉯, ㉰의 논점을 중심으로 논의하였다.

전통적으로 학교수학에서 알고리즘의 이해보다 알고리즘의 실행을 강조해 왔다(Maurer, 1999). 즉, 알고리즘의 의미를 이해하기보다 표준화된 알고리즘을 '기계적'으로 적용해서 원하는 답을 구하는 데 초점을 맞추어 왔다. 따라서, 학생들은 알고리즘을 적용해서 정확한 답을 구하는 방법이 효과적이라는 것은 이해하지만 알고리즘의 절차가 왜, 어떻게, 그렇게 되는지를 이해하지 못하는 경우가 많다.

알고리즘의 절차가 왜 타당한 것인지 언제 그러한 절차를 이용할 수 있는지를 이해하는 것은 수학적 개념, 문제해결과 관련된다. 알고리즘 학습에서 이미 만들어진 알고리즘을 적용하여 정확한 답을 구하는 것도 중요하지만 알고리즘을 만들어 가는 과정을 의미 있게 이해함으로써 관련된 수학 개념과 연결하는 것이 더욱 중요하다. 또한 문제상황을 해결하는 과정에서 알고리즘을 만들게

되면 알고리즘은 문제해결과도 관련이 있다. 즉, 문제해결과정에서, 수학적 개념과 연결된 상황에서 알고리즘을 이해하는 것이 중요하다.

본 연구에서는 알고리즘을 문제해결, 개념적 이해, 수감각 등과 통합적인 측면에서 보아야 한다는 관점에서 알고리즘의 수학교육적 가치를 재해석하고 6차 교육과정에 나타나는 알고리즘에 대한 수업의 예를 비판적으로 고찰한다. 이를 위해 먼저, 알고리즘의 의미와 수학교육적 가치에 대해 논의하고, 알고리즘에 대한 최근의 논점을 분석한다. 다음에는 이러한 논의를 토대로 알고리즘의 대안적인 지도 방안을 탐색한다.

Ⅱ. 알고리즘의 수학교육적 가치

7차 교육과정에서의 수학과의 목표는 '수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다'(교육부, 1998)로 되어 있다. 이러한 수학과의 목표와 관련지어 볼 때, 알고리즘의 수학교육적 가치를 '수학의 기본적인 지식과 기능', '수학적 사고력', '문제해결 능력' 세 가지 측면에서 생각할 수 있다. 여러 가지 계산법 나아가 문제해결에 이르는 명확한 절차로서의 알고리즘은 수학의 기본적인 지식과 기능으로 볼 수 있고, 알고리즘을 개발하고 구사하는 능력은 수학적 사고의 중요한 한 부분이며, 문제해결에서 알고리즘은 중요한 역할을 한다. 즉, 알고리즘은 실행해야 할 계산법이라는 좁은 의미에서가 아니라 수학적으로 사고하고 문제를 해결하는 과정이라는 보다 넓은 의미에서 이해되어야 할 것이다.

본 장에서는 학교수학에서의 알고리즘의 가치를 보다 분명히 규명하기 위해 먼저, 학교수학에서의 알고리즘을 유형별로 정리해 보고, 알고리즘의 수학교육적 가치를 구체화한다.

1. 학교수학에서의 알고리즘

수학교육의 목적을 실용적, 도야적, 심미적, 문화적 인 측면으로 구분하여 생각할 수 있다. '학교수학에서 알고리즘을 가르치는 목적은 무엇인가'라는 문제도 같은 방법으로 접근할 수 있다. 계산술은 본래 실용적인 필요성에 의해 시작되었고, 증명과 더불어 진리 탐구의 전형이자 인간의 사고력 도야의 수단으로 여겨져 왔으며, 수학의 여러 가지 계산법은 인류의 소중한 문화 유산으로 과학 기술 문명의 원동력인 바, 이를 계승 발전시킬 필요가 있다.

실용적인 목적에서 출발한 계산술은 오늘날에도 여전히 수학의 바탕이 되고 있다. 개인적으로는 사회 구성원으로서 일상생활을 영위하는 데 필요하기 때문에, 고용주에게는 알고리즘을 신속하고 정확하게 수행하는 노동자들이 필요하기 때문에 알고리즘을 가르칠 필요가 있다. 그러나, 이러한 실용적인 목적과 관련된 알고리즘은 NCTM(1989)의 스탠다드에서 그 중요성이 약화되었다. 한편으로는 계산기·컴퓨터의 출현으로, 다른 한편으로는 문제해결과 개념적 이해에 대한 강조로 알고리즘의 유용성에 대한 시각이 달라졌다. 첫째, 복잡한 계산을 실행하는데 드는 시간을 절약하여 수학에 대한 토의와 실험 활동에 투자할 필요성이 있다. 둘째, 일반적으로 사회가 지필계산을 많이 요구하지 않는다. 사회적 변화로 기수법을 이해하고 암산 능력과 자신감, 적절한 연산의 선택 능력, 계산 도구의 선택 능력(전통적인 사회에서는 주판을 주로 이용했지만 이제는 계산기를 이용하는 경우가 많다.), 답을 해석하고, 논리적으로 확인하는 능력이 더욱 중요해진다. 이러한 변화를 신속한 계산과 정확한 답에서 수감각 기르기로의 변화로 요약할 수 있다. 이러한 상황의 변화로 알고리즘의 중요성에 대한 논란을 불러일으켰다.

계산술을 중심으로 하는 알고리즘은 산술계산에서 기호를 조작하는 계산법, 즉 대수로 발전되었으며, 17세기 말 Leibniz에 의해 미적분을 하는 계산법으로 발전되었다(우정호, 1998). 학교수학에는 수많은 계산 즉, 알고리즘이 포함되어 있다. 예컨대, 분수의 나눗셈에 대한 알고리즘처럼 무엇을 하기 위한 것인가에 따라 알고리즘을 기술하기도 하고, 세로 나눗셈(장제법)과 같이 알고리즘에 특별한 이름을 부여하기도 한다. 학교수학에서 다루어지고 있는 알고리즘의 유형을 구분하는 것은 간단한 문제가 아니지만, Usiskin(1999)은 알고리즘이 적용되는 내용에 따라 대체로 다음 세 가지로 구분하고 있다.

(가) 산술 알고리즘 : 거듭제곱근(제곱근 또는 세제곱근 등) 구

하기, 장-제법, 곱셈법, 여러 자리 수의 세로 덧셈과 뺄셈, 분수의 덧셈과 뺄셈, 평균과 표준편차의 계산 등.

(나) 대수와 미적분학 알고리즘 : 연립방정식과 부등식의 계산, 완전제곱식 만들기, 부분분수 분해, 정적분의 계산, 로그의 계산, 제곱근의 계산 등

(다) 그리기 알고리즘 : 막대그래프, 원 그래프 그리기, 좌표평면에서의 그래프, 함수와 관계의 그래프, 기하에서 자와 컴퍼스를 이용한 작도, 도형의 변환 작도.

위의 분류에서 (가)와 (나)는 계산술과 관련된 알고리즘으로 산술계산에서 대수와 미적분으로 알고리즘의 발달에 근거한 분류이며 (다)는 그래프 그리기와 작도에 관련된 알고리즘이다. 이러한 분류가 절대적인 것은 아니지만 학교수학에서의 알고리즘에 관한 문제들을 논의하는데 유용한 것으로 보인다.

2. 알고리즘의 수학교육적 가치

최근, 문제해결, 개념적 이해, 수감각 등이 강조되면서 학교수학에서 알고리즘이 소홀히 다루어지고 있다. 그러나 학교수학에서 알고리즘의 중요성을 간과할 수 없다. 예컨대, 학생들이 모든 이차 방정식을 완전제곱식과 제곱근의 정의를 이용하여 푸는 것은 비효율적이고 교육적이지도 않다. 따라서, 하나의 알고리즘으로 이차방정식의 일반해법(근의 공식)을 이해할 필요가 있는 것이다. 이차방정식의 근의 공식에 대한 이해로 이차방정식과 관련된 많은 문제들을 효율적으로 해결할 수 있다. 더욱이 이차방정식의 근의 공식은 실근과 허근을 판별하는 식으로도 이용될 수 있으며, 이차방정식의 두 근과 계수 사이의 관계를 탐구하는데도 이용될 수 있다. 알고리즘의 수학교육적 가치를 보여 주는 예를 캘리포니아에서 폭넓게 이용되고 있는 MathLand[1]에서도 찾을 수 있다(김수미, 1998). 여기서 4학년 학생들은 12×13을 다음과 같은 식으로 배운다고 한다.

> 10명의 회원을 갖는 모임 12개를 상상하라. 거기에 12+12+12을 더하라.

곱셈 알고리즘을 강조하는 대신 곱셈 개념이 들어 있는 문제상황을 제시하고 학생들이 전략을 이용할 것을 기대하고 있다. 김수미(앞의 책)에 의하면 이 과정에 구구단에 대한 암기가 누락되어 있다고 한다. 전통적인 수학을 배운 사람들은 암기한 구구법과 세로 곱셈법을 이용하여 쉽게 해결할 수 있다. MathLand의 방법이 곱셈에 대한 개념적 이해를 풍부하게 하고 전략을 개발하는데 도움이 되겠지만, 곱셈 문제 상황을 해결할 때마다 이러한 방법을 이용하는 것은 경제성과 효율성 측면에서 문제가 있다. 반면, 전통적인 곱셈 알고리즘은 경제적이고 효율적이기는 하지만 개념적 이해나 전략의 개발에는 부정적인 것처럼 보인다. 그러나 이러한 문제는 곱셈 알고리즘을 어떻게 가르치느냐에 따라 달라질 수 있을 것이다.

전통적으로 알고리즘은 암기해서 실행해야 할 대상으로 인식되어 왔으며, 이러한 인식은 알고리즘에 대한 최근의 논란의 빌미를 제공하고 있다. 그러나, 알고리즘은 정확한 계산을 보장해 주는 동시에 수학에 개념적 이해나 문제해결에도 도움이 되는 기술적 수단이기도 하다. 즉, 알고리즘의 수학교육적 가치를 성공적으로 수행했을 때, 정확한 답을 보장해주고 유사한 문제에 대해 같은 방법을 이용함으로써 효율적이고 경제적이라는 측면은 물론 문제해결, 개념적 이해와의 관계 속에서도 찾을 필요가 있는 것이다. 앞의 예에서 이차방정식의 근의 공식을 충분히 연습해서 숙달시키는 것도 중요하지만 완전제곱식과 제곱근의 정의를 이용하여 근의 공식을 만들어가는 과정을 이해함으로써 판별식이나 근과 계수와의 관계와 연결시키는 것도 중요하다. 마찬가지로 구구법을 단순히 암기를 시킬 것인지 의미있는 문제 상황을 제공하여 구구 알고리즘을 생성하는 과정과 의미를 강조할 것인지가 논쟁의 초점이 된다.

Usiskin(1999)은 알고리즘의 가치로 효율성, 신뢰성, 정확성, 신속성과 문자기록을 남기고, 정신적 표상을 만들며, 유익함을 제시하고 있다. 그 외에도 알고리즘은 다른 알고리즘에 이용될 수 있으며, 알고리즘 자체가 연구

1) 스탠다드가 1989년 발행된 이후 미국의 약 40개의 주에서 그 기준에 근거한 수학 프로그램을 공립학교 체계에 도입하고 있다. 그리고, 전국 과학 재단(National Science Foundation)은 포괄적인 학습교재 개발을 위해 매년 1천만 달러를 지출하고 있으며 그러한 프로그램 중의 하나가 'MathLand'라 불리는 최신 교육과정이다. 캘리포니아 주에서는 유치원에서 6학년까지 교육 현장의 약 60%가 이를 채택하고 있으며, 이 교재를 발행하는 출판사는 웹사이트까지 열고 있다고 한다(김수미, 1998).

의 대상이 될 수 있다는 점을 제시하고 있다. 처음 네 가지의 가치는 알고리즘에 대한 전통적인 관점에서 해석할 수 있으며, 다음 다섯 가지의 가치는 알고리즘이 수학적 개념과 수학을 하는 과정에 도움이 될 수 있음을 시사하고 있다.

자연수의 뺄셈에 관한 좋은 알고리즘을 알고 있는 학생들은 그 알고리즘을 이용하여 어떤 자리의 자연수의 뺄셈도 할 수 있다. 이차방정식의 근의 공식을 알면 계수가 실수가 아닌 경우까지 포함한 모든 이차방정식의 해를 구할 수 있다(일반해법). 코사인 법칙을 이용하면 두 변의 길이와 그 사이의 각을 알고 있는 모든 삼각형들의 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다. 이런 상황은 알고리즘의 효율성과 관계가 있다. 알고리즘이란 수학교육의 주요 목표 중의 하나인 일반화로 일련의 문제들을 해결하기 위한 방법을 찾기 위한 것이다. 알고리즘을 안다면 하나의 과제만이 아니라 그 알고리즘이 적용될 수 있는 모든 문제를 풀 수 있으며, 문제의 답이 옳음을 보장받는다. 알고리즘의 효율성은 알고리즘을 응용할 수 있는 범위에 의해 결정된다.

알고리즘이 옳게 실행되면 그 결과는 언제나 정답이 된다는 것은 알고리즘의 신뢰성과 관련이 있다. 지필 계산보다 계산기와 컴퓨터를 선호하는 이유도 바로 신뢰성에 있다. 즉, 계산기나 컴퓨터에 의한 알고리즘의 실행 결과가 지필에서 알고리즘의 실행 결과보다 더 정확하다는 것이 일반적인 생각이다. 포물선과 x축과의 교점을 찾기 위해, 그래프를 이용하여 어림하는 것보다 이차방정식을 푸는 것을 선호하는 것도 알고리즘의 신뢰성이라는 측면에서 해석할 수 있다.

정확성을 추구하는 것은 학생들의 자연스러운 성향이다. 학생들에게 어떤 실제 상황을 제시하지 않고 단순히 51×39을 어림하라고 요구할 때, 두 수를 곱해서 1989를 근사값이라고 답하는 학생들이 많다. 교사가 보기에 학생들이 어림을 이해하지 못하고 있는 것으로 보일 수도 있지만 학생들이 알고 있는 알고리즘의 영향일 수도 있다(Usiskin, 1999). 알고리즘은 막다른 길을 피하고 답에 직접 도달할 수 있는 길을 제공해 준다. 직접적인 알고리즘일수록 처리 속도가 더욱 빠르다. 알고리즘을 적용할 때의 속도의 문제는 배우기 쉬워야 하고 암기하기가 좋아야 한다는 두 가지 요인과 관련되어 있다. 빠르게 적용할 수 있지만 기억하기가 어렵다면 좋은 알고리즘이라 할 수 없다. 예를 들어 2×2 행렬의 역행렬을 구하는 알고리즘

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

은 기억하기는 어렵지만 알고리즘 자체는 좋은 알고리즘이다. 위의 공식은 알고리즘의 실행 속도는 빠른 반면, 암기하는 데 어려움이 있으며 많은 학생들이 공식을 쉽게 잊어버린다.

전통적으로 알고리즘의 수학교육적 가치는 지금까지 논의한 효율성, 신뢰성, 정확성, 신속성에 초점을 맞추어 왔다. 알고리즘에 따른 풀이 절차는 단순하고 형식적인 일련의 언어적 변환 과정으로, 형식을 일단 마스터하면 형식이 만들어지는 원리 또는 과정에 무관심하게 된다. 문제는 전통적인 교육 방식이 이러한 알고리즘의 숙달과 실행을 지나치게 강조해 왔다는 데 있다. 이러한 문제가 NCTM(1989)의 스탠다드에서 지필계산을 약화시켜야 한다는 주장을 하게 된 배경으로 작용한다. 결국, 문제해결, 수학적 개념의 이해가 강조되면서 알고리즘의 중요성이 상대적으로 소홀히 다루어지게 된 것이다.

그러나, 이러한 문제는 알고리즘의 형식적 적용과 숙달 일변도에서 벗어나 알고리즘의 원리 또는 의미를 계속적으로 확인하는 경험을 제공함으로써 해결될 수 있다. 즉, 알고리즘을 수학 개념과 원리의 이해, 문제해결 과정과 상호 보완적인 측면에서 받아들여야 한다. 따라서, 알고리즘의 가치가 오히려 강조되어야 할 것이다. Usiskin(1999)이 제시한 알고리즘의 가치 가운데 후반부 다섯 가지는 이러한 측면에서 해석할 수 있다.

알고리즘은 과정을 보여주고 정신적 이미지를 만드는데 도움이 된다. 학생들이 알고리즘의 과정을 기록하는 것은 답을 구한 과정을 검토하고 풀이를 서로 공유하며, 절차를 수정할 때 유용하다. 이러한 알고리즘의 기록은 알고리즘과 수학적 개념 사이를 연결해 줄 수 있다. 또한 알고리즘을 통해 정신적 이미지를 만들 수 있다는 것이다. 예를 들어 지필 알고리즘에 대한 정신적 이미지가 암산을 할 때 도움이 될 수 있다. 예를 들면, 24.4ℓ에 300㎞를 달린 자동차의 연비를 암산으로 구하는 과정에서 300을 24.4로 나누는 지필 나눗셈 알고리즘 상상한다. 대수의 경우도 마찬가지다. 8x-14=6x+88이라는 일차방

정식을 풀 때 머리 속에서 6x를 좌변으로 이항하고 -14는 우변으로 이항해서 2x=102를 얻는다. 다음에 양변을 2로 나누어 x=51이라는 답을 구할 수 있다(양변에서 6x를 빼고 14를 더할 수도 있다). 이러한 과정은 지필 환경에서 다루던 알고리즘이 암산 과정에서도 그대로 이용된 것임이 분명하다. 계산기를 이용하여 나눗셈을 공부한 학생들이 세로 나눗셈에 대한 정신적인 이미지를 형성할 수 없는 경우와 대조된다.

수학적 개념과 문제해결에 도움이 되는 또다른 경우로는 알고리즘이 주어진 정보와 구한 답 사이의 관계를 이해하는 데 도움이 되는 경우다. 예를 들면, 올림과 내림을 기록해 놓는 세로 덧셈 알고리즘은 자리값 개념을 더 깊이 있게 이해하는 데 역할을 할 수 있다. $(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2$과 같은 다항식의 곱셈 알고리즘에서도 분배법칙, 교환, 결합 법칙 등을 확인할 수 있다.

알고리즘은 결과를 구하는 방법은 물론 그 결과가 왜 참인지를 설명하는 데 도움이 되기도 한다. 이러한 예의 대표적인 경우가 작도 알고리즘이다. 주어진 한 선분을 세변으로 하는 정삼각형을 작도하는 알고리즘은 작도 결과가 정삼각형임은 물론 왜 정삼각형인지도 보여준다. 그러나, 선분 AB의 수직이등분선을 작도하는 다음 알고리즘은 직선 PQ가 선분 AB의 수직이등분선이라는 사실이 직관적으로 분명하지 않다. 그러나, 교사의 적절한 안내로 직선 PQ가 선분 AB의 수직이등분선이 되는 이유를 설명하게 할 수 있다. 따라서 이러한 알고리즘은 정당화와 연결될 수 있다.

① 선분 AB 작도
② 선분의 끝점 A, B를 중심으로 반지름이 같은 두 원을 그리고 교점 P, Q 작도
③ 직선 PQ 작도

한 알고리즘이 다른 알고리즘에 이용되기도 한다. 새로 나눗셈은 다항식의 나눗셈, 나머지 정리의 증명 등에도 이용된다. 최대값 또는 방정식의 해를 구할 때 함수의 그래프가 이용될 수 있다. 알고리즘의 효율성, 수학적 특징, 실행 속도 등을 비교해 볼 수 있다. 예를 들면, 다음은 분수의 나눗셈 방법으로 서로의 장단점을 비교할 수 있다. 이러한 과정을 통해 역수, 약분 등 다른 수학적 개념과 연결될 수 있다. 일반적으로 절차㉮가 ㉯에 비해 간단해 보이지만 이해하기는 더 어렵다. 그러나, 그 반대로 생각하는 학생도 있을 수 있다.

㉮ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

㉯ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times bd}{\frac{c}{d} \times bd} = \frac{ad}{bc}$

지금까지 알고리즘이 전통적인 의미에서 즉, 계산술로서의 알고리즘은 물론 문제해결 상황이나 개념 이해 장면에서도 중요한 역할을 할 수 있음을 논의하였다. 형식적이고 기계적인 실행으로 계산 결과를 만들어 내는 과정으로서의 알고리즘에 대한 지나친 강조로 알고리즘이 개념적 이해나 문제해결과는 직접적으로 관련이 없는 것으로 인식할 수 있다. 따라서 알고리즘 교수-학습에서 알고리즘을 문제해결, 개념이해 등과 관련지어 다룰 필요가 있다. 마찬가지로 알고리즘의 숙달 역시 중요하다. 알고리즘에 대한 이러한 두 시각이 상호작용하는 가운데 알고리즘의 지도가 이루어질 필요가 있다.

3. 지필 알고리즘과 계산기의 이용

알고리즘과 관련된 계산기의 활용에 대한 논란은 주로 문제해결과 연결되어 있다. 즉, 계산기를 활용하여 알고리즘의 반복 연습에 들어가는 시간을 줄여 문제해결 활동에 투입하자는 것이다. 여기에는 계산 원리와 알고리즘을 배우는 과정에서는 계산기의 이용을 제한하자는 단서가 따른다. 6차 초등학교 수학과 교육과정 해설서(교육부, 1994, p298)에서 문제해결과 관련지어 계산기의 활용을 다음과 같이 권장하고 있다.

> 학습의 보조 자료로서의 계산기의 활용은 중요한 학습 활동이다. 다만, 계산 원리와 알고리즘의 획득이 자연스럽게 이루어진 다음, 복잡한 계산을 절약하고 문제해결 활동에 도움을 주는 의미에서 이용해야 한다.

위의 기록에는 계산기와 지필 알고리즘 사이의 관계와 계산기의 활용 목적을 포함하고 있다. '계산 원리와 알고리즘의 획득' 이후에 계산기의 이용을 주장하여 계산기의 이용이 계산 원리와 알고리즘을 이해하는데 장애가 되지 않도록 해야하며, 계산기가 문제해결에 도움을

주는 의미로 이용되어야 함을 분명히 하고 있다. 그러나, 계산 원리를 이해하기 전에 계산기를 이용해서는 안된다는 주장은 설득력이 있지만 알고리즘을 먼저 이해해야 한다는 주장은 다소 문제가 있다. 즉, 알고리즘의 구성과 이해 과정에서도 계산기가 이용될 수 있다. Groves & Stacey(1998)은 유치원 아동을 포함한 어린 아동들을 대상으로 학생들이 계산기 이용법에 초점을 맞추지 않도록 하면서, 풍부한 탐구 상황을 제공하여 수감각을 기르는 데 초점을 맞추어, 계산기를 이용한 뛰어세기 활동, 자리값 활동, 계산 활동을 실시한 후, 그 결과를 분석한 연구를 수행하였다. 이 연구에서 아동들은 계산기를 이용하여 뛰어세기와 자리값의 의미를 더 잘 이해하였으며, 그 결과 알고리즘을 더욱 의미있게 이해한 것으로 나타났다. 또한 계산 능력이 감소되지도 않았으며, 계산기를 무조건 신뢰하지도 않았다. 특히, 음수, 큰 수의 자리값, 소수와 관련된 문제 해결 능력, 계산 도구의 선택 능력, 답을 해석하는 능력에서 연구 대상학생들이 비교집단 학생들보다 더 뛰어난 것으로 나타났다. 이러한 연구 결과는 지필계산에 쏟았던 시간을 절약하여 토의와 탐구에 집중해야 한다는 NCTM(1989)의 주장과 일치하며, 계산기가 '문제해결 활동에 도움을 주는 의미'로 이용될 수 있음을 보여주고 있다. 한편, 계산기가 계산의 원리나 알고리즘의 이해에도 도움이 될 수 있음을 시사하고 있다. 따라서, 이 연구 결과에 따르면, '계산의 원리나 알고리즘의 획득이 자연스럽게 이루어진 다음'에 계산기가 이용되어야 한다는 주장은 신중하게 해석될 필요가 있다.

지필 알고리즘과 계산기의 관계는 상보적으로 해석되어야 한다. 알고리즘의 이해와 숙달에 방해가 되지 않는 범위에서 계산기가 활용될 수 있으며, 더욱이 알고리즘의 의미를 이해하는 과정에서도 계산기가 이용될 수 있다. 중요한 것은 계산기를 이용할 것이냐의 여부가 아니라 무엇을 가르치고 배울 것인가, 어떻게 가르칠 것인가에 있다. 다음절에서는 개념적 이해, 문제해결에 도움이 될 수 있도록 알고리즘의 의미 있는 교수-학습 실제에 대해 논의한다.

Ⅲ. 대안적인 알고리즘 수업의 실제

지금까지의 논의를 알고리즘의 형식화와 숙달, 알고리즘의 실행에 의한 정확한 결과의 산출을 지양하고 관련된 개념적 이해, 문제해결 상황과 연결된 알고리즘 수업의 강조로 요약할 수 있다. 즉, 알고리즘의 기계적인 자동화가 아니라 알고리즘의 유의미한 이해가 강조될 필요가 있다. 본 장에서는 대안적인 알고리즘 수업의 원리를 먼저 정리하고 대안적인 알고리즘 지도에 대해 논의한다.

1. 대안적인 알고리즘 수업의 원리

알고리즘의 형식화와 숙달에 이은 알고리즘의 실행으로 이어지는 전통적인 알고리즘 수업의 대안으로 관련된 수학적 개념과의 연결, 문제해결 과정에서의 알고리즘의 구성을 통한 수업을 강조할 필요가 있다. 그러나, 이러한 주장이 알고리즘을 형식화하고 숙달할 필요가 없다라는 것을 의미하지는 않는다. 대안적인 알고리즘 수업의 원리를 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 수학내적 상황이든 외적 상황이든 학생들에게 의미있는 문제 상황을 해결하는 과정에서 알고리즘을 구성하는 활동을 해야 한다. 예컨대, 삼각형의 내심을 작도하는 알고리즘을 학습할 때, 알고리즘의 순서를 제시하는 대신 '삼각형에 내접하는 원의 중심을 찾는 과정'에 관한 문제를 제기함으로써 학생들에게 내심을 작도하는 과정을 구성할 기회를 제공할 필요가 있다. 이를 통해 학생들은 내심의 성질을 탐구, 추측하고 자신의 추측이 참인 이유를 설명하는 활동으로 자연스럽게 연결될 수 있을 것이다. 이러한 문제 상황으로부터 구성된 알고리즘은 학생들에게 의미있는 알고리즘이 될 수 있으며, 알고리즘과 수학적 개념과의 연결에도 유용하다.

이러한 원리는 학습자들이 능동적으로 지식을 구성한다는 구성주의 원리, Freudenthal(1973)의 수학화의 원리, 지식의 이해와 이용을 강조하는 NCTM의 Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft(1998), 자신의 활동에 대한 반영적 추상화를 통해 지식을 구성한다는 Piaget(1970)의 발생적 인식론(조완영, 1995) 등 많은 연구들에 함축되어 있다.

이 때 학생들이 다양한 알고리즘을 개발할 수 있도록 권장될 필요가 있다. 그러나, 다양한 알고리즘을 전체 학생들이 공유하고 논의함으로써 각각의 알고리즘 사이의

관련성을 조사해 보고, '더 좋은' 알고리즘을 이해하고 사용할 수 있도록 해야 한다. 또한 알고리즘을 구성한 후에 알고리즘에 대한 의미 있는 연습 상황이 어느 정도 반복해서 제공되어야 한다.

둘째, 계산기의 활용이 권장되어야 하지만 지필 알고리즘 역시 강조되어야 하며, 지필 알고리즘과 계산기의 관계는 상보적인 것으로 이해해야 한다. 계산기는 문제해결 과정 뿐 아니라 알고리즘의 의미 있는 이해에도 도움이 될 수 있다. 많은 연구들에서 계산기의 활용을 주장하고 있으며(NCTM, 1989; 남승인·김옥경, 1998; Usiskin, 1999), 계산기의 활용이 알고리즘의 의미 있는 이해에 도움이 된다는 연구도 있다(Groves & Stacey, 1998).

셋째, 알고리즘과 관련된 수학적 개념 사이의 연결이 강조되어야 한다. 알고리즘의 의미 있는 이해를 위해 알고리즘이 고립된 사실로 암기되기보다는 관련된 수학적 개념과의 연결 속에서 연습되어야 한다. 예컨대, 곱셈구구의 기계적인 암기로서가 아니라 동수누가 개념에 의한 의미 있는 연습을 통해 숙달되어야 한다. $x^2+x^2=x^4$,[2] $234_{(5)}=2\times5+3\times5+4\times1$[3]과 같은 학생들의 오류는 곱셈 개념, 자리값 개념에 대한 이해가 부족한 상태에서 알고리즘을 적용하려는 시도에서 나타난 것이다. 따라서, 알고리즘의 형식화, 자동화 과정에서 개념적 이해가 이루어질 수 있도록 해야 한다.

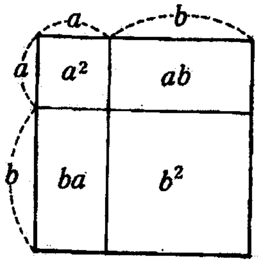
넷째, 알고리즘의 숙달도 중요하다. 계산능력이 부족하다고 해서 다른 수학적 내용을 배울 수 없는 것은 아니지만 계산능력은 그 자체로, 수학에 대한 자신감과 관련해서 중요하다. 기계적인 숙달이 아니라 의미 있는 문제 상황을 통해 알고리즘에 대한 통찰력을 기를 필요가 있으며, 알고리즘의 숙달을 위한 충분한 연습이 요구된다. 수학적 개념, 문제해결, 수감각 등에 대한 강조가 알고리즘(일단 유의미하게 구성된 알고리즘)의 자유로운 활용은 소홀히 해왔다.

2) 이러한 오류를 보이는 학생들은 단항식의 곱셈 개념의 의미를 생각하지 않고 기계적으로 알고리즘을 실행하는 경향을 보였다.

3) 오진법에서 이러한 오류를 보인 학생은 이진법에서도 같은 오류를 보인다. 즉 자신에게 의미가 있고 익숙해 있는 십진법에서는 자리값의 의미를 이해하고 있었다. 따라서, 이런 오류는 오진법과 이진법 개념을 이해하지 못한데서 오는 것으로 생각할 수 있다.

2. 대안적인 알고리즘 수업

6차 교육과정 중학교 3학년 교과서에 나오는 대표적인 알고리즘의 예가 전개, 인수분해, 근의 공식 등 대수 관련 알고리즘들이다. 이러한 대수 알고리즘 수업의 가장 큰 문제 중의 하나는 형식화와 자동화가 너무 성급하게 이루어지고 있다는 점이다. 예컨대, 전개하는 과정에서 많이 이용되는 알고리즘이 곱셈공식으로, 곱셈공식의 도입은 교과서마다 조금 다르기는 하지만 대체로 ㉮ 곱셈공식의 시각적 확인, ㉯ 교환, 결합, 분배 법칙 등을 이용한 증명이 이루어지고, ㉰ 그 결과를 공식으로 제시하고 있다. 다음에는 ㉱ 동일 공식이 적용될 수 있는 예와 문제를 제시하여 연습하게 한다.



<그림 1> 전개

전체적으로 학생들 스스로 알고리즘을 탐색하여 개발하고, 알고리즘이 참인 이유를 설명하며, 연습을 통해 자동화를 시도한다. 위와 같은 교과서의 흐름은 외형상, 학생들의 사고활동을 유발하고 있다는 점에서 일면 긍정적으로 생각할 수 있다. 특히, ㉮의 시각적 확인은 연산 법칙에 의한 대수적 설명(㉯)과 상호작용하여 곱셈법칙의 의미를 풍부하게 만드는 역할을 할 수 있다. 그러나, 결과를 미리 제시함으로써 학생들이 알고리즘을 발명 또는 발견할 수 있는 기회가 처음부터 주어지지 않는다. 예를 들어, <그림 1>은 곱셈공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$의 시각적 표현이다. 교과서에서는 "<그림 1>을 이용하여 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$이 성립함을 설명하여 보아라"라고 요구하고 있어(박배훈·정창훈, 1997) <그림 1>이 곱셈공식을 시각적으로 나타낸 것임을 미리 제시하고 있다. 따라서, 학생들은 사고활동의 기회가 줄어든다. 제시된 그림을 관찰하여 곱셈공식을 나름대로 만들어 보게 하는 활동이 요구된다. 또한 한 가지 일반적인 예를 이용할 것이 아니라 다양한 예,

예컨대 $(x+3)^2$, $(2y+1)^2$ 의 전개와 관련된 그림 등을 이용하여 비슷한 활동을 한 후, 자신의 활동들에 대한 반성적 사고를 통해 알고리즘을 개발할 수 있도록 수업 활동을 구성할 필요가 있다. 교과서의 지면, 제한된 수업 시간 등 제약이 따르겠지만 이러한 '안내된 발견 또는 발명' 활동이 학생들이 의미 있는 알고리즘을 구성하는 데 도움이 된다.

또 다른 문제는 ㉰의 알고리즘의 형식화가 성급하게 이루어진다는 점이다[4]. 형식화를 서두르면 학생들은 이미 만들어진 알고리즘을 수동적으로 받아들여 한다고 생각하기 쉽다. 즉, 알고리즘을 암기해야 할 대상으로 여기게 된다. 시각적 확인과 대수적 증명 과정의 상호작용으로 곱셈공식을 개발한 후, 시각적 확인 과정 없이 대수적 조작활동을 통해 충분히 연습을 할 필요가 있다. 이러한 활동이 이루어진 다음에 알고리즘의 형식화가 이루어져야 할 것이다. 즉, 교과서의 ㉱의 활동이 충분히 이루어진 다음 ㉰의 곱셈 공식을 추측하고, 곱셈 공식을 정당화하는 과정을 거쳐 다시 ㉱의 활동을 통해 알고리즘을 자동화하는 것이 좋다. ㉱의 활동은 학생들이 곱셈 패턴을 추측할 수 있는 기회를 제공한다는 점에서 의의가 있다. 추측에 대한 정당화는 학생들이 추측한 곱셈공식의 일반성을 확인하는 과정으로 시각적 정당화 또는 연산법칙을 이용한 형식적 정당화가 이용될 수 있다. 마지막으로 정당화된 알고리즘을 자동화시키기 위한 연습이 요구된다. 알고리즘의 학습은 학생들에게 의미 있는 장면에서 출발하여 다양한 구성활동을 통해 알고리즘의 일반화 또는 형식화가 이루어지고, 다음에 알고리즘의 타당성을 논리적으로 확인한 후, 알고리즘의 숙달이 이루어져야 할 것이다.

알고리즘 수업이 수학적 개념과 어떤 관련이 있는가의 좋은 예가 기수법에 관한 알고리즘이다. 기수법에서 학생들은 십진법에 익숙해 있고 십진법의 어떤 수를 전개식으로 나타내는 것도 비교적 어려워하지 않는다. 그렇지만 6차 교육과정 중학교 1학년 과정에서 다루고 있는 오진법과 이진법에서 수학적 구조가 십진법의 경우와 다르지 않음에도 불구하고 전개식 표현을 어려워하는 학생이 있다. 다음은 이러한 어떤 학생이 보이는 오류이다[5].

$$234_{(5)}=2\times5+3\times5+4$$
$$1101_{(2)}=1\times2+1\times2+1$$

위의 예에서 학생은 오진법과 이진법의 전개 알고리즘을 기계적으로 학습한 것으로 보인다. 전개식의 형태는 알고 있지만 자리값 개념이 없다[6]. 위의 예는 성급한 형식화에 의한 알고리즘 수업, 개념적 이해가 뒤따르지 않는 알고리즘의 기계적 적용 대신 수학적 개념과 연결된 알고리즘 수업의 필요성을 보여준다.

V. 결론 및 제언

본 논문은 수감각, 수학적 개념과 아이디어, 문제해결을 강조하는 NCTM(1989)의 주장으로 제기되어 온 알고리즘의 수학교육적 가치에 관한 최근의 논쟁에 관한 것이다. 본 논문에서는 학교수학에서 알고리즘이 변함없이 중요하다는 주장과 더불어 알고리즘의 의미 있는 수업을 강조하였다. 알고리즘의 형식화와 자동화를 강조한 전통적인 알고리즘 수업과 달리 본 연구에서는 알고리즘의 의미 있는 이해를 위한 수업을 제안하고 있는 바, NCTM(1989)의 주장과 같은 맥락이다. 그러나, 알고리즘의 중요성을 상대적으로 약화시킨 스탠다드의 주장과 달리 알고리즘의 의미 있는 연습의 중요성을 강조하였다. 이러한 논란은 전통적인 알고리즘 수업이 알고리즘의 형식화를 서두르고 숙달을 강조한데서 비롯된 것으로 보인다.

대안적인 알고리즘의 수업에서는 알고리즘의 의미 있는 구성과 연습, 수학적 개념, 문제해결 등과의 연결을 강조하였다. 대안적인 알고리즘 수업의 원리는 다음과

4) 이것은 교수학적 변환론의 형식적 고착의 전형적인 예이다. 형식적 고착이란 공식화된 지식의 논리적 표현으로서 메타-인지적 전략을 무시하고 지식의 은유적 사용을 억제하려는 시도이다(강완 · 백석윤, 1998). 곱셈공식의 교과서 전개는 시각적 확인 과정을 도입으로 다루고 있긴 하지만 곱셈 공식의 논리적 설명과 자동화 과정이 강조되고 있다.

5) 연구자의 수업 과정에서 발견된 오류이다.

6) 이 수업에서 교사는 십진법과 오진법, 이진법 사이의 관계를 강조하였지만 주로 구두 언어와 기호적 표현을 이용하였다. 묶는 과정과 단위 즉 '밑(base)'의 의미를 여러번 설명하였다. 그러나, 교사의 언어적, 기호적 설명은 학생과의 상호작용 수단으로서는 적절하지 않았으며, 구체물을 이용하여 묶는 활동(Dienes 참조)이 필요한 것으로 보인다.

같다.

첫째, 수학내적 상황이든 외적 상황이든 학생들에게 의미있는 문제 상황을 해결하는 과정에서 알고리즘을 구성하는 활동을 해야 한다.

둘째, 계산기의 활용이 권장되어야 하지만 지필 알고리즘 역시 강조되어야 하며, 지필 알고리즘과 계산기의 관계는 상보적인 것으로 이해해야 한다.

셋째, 알고리즘과 관련된 수학적 개념 사이의 연결이 강조되어야 한다.

넷째, 알고리즘의 숙달도 중요하다. 계산능력이 부족하다고 해서 다른 수학적 내용을 배울 수 없는 것은 아니지만 계산능력은 그 자체로, 수학에 대한 자신감과 관련해서 중요하다.

알고리즘적 사고는 수학적 사고의 중요한 한 부분으로 문제해결, 개념적 사고와 관련이 있으며, 수학적 힘의 근원이기도 하다. 알고리즘만을 강조하는 것도 문제가 있지만 알고리즘을 약화시키는 것 역시 문제가 있다. 알고리즘이 포함되어 있는 의미 있는 수학적 상황의 제공, 표준알고리즘의 재발견이든 독창적인 알고리즘의 구성이든 알고리즘의 개발 과정에서의 교사의 역할, 알고리즘의 숙달을 위한 유의미한 연습 상황의 제공에 대한 구체적인 자료 개발과 개발된 자료를 이용한 수업에 대한 사례연구가 요구된다.

참 고 문 헌

강완 · 백석윤 (1998). 초등수학교육론. 서울 : 동명사

교육부 (1994). 국민학교 교육과정 해설서(Ⅰ), p.298.

김수미 (1998). 미국 스탠다드 수학의 재조명. 대한수학교육학회논문집 8(1), pp.279-289.

김정환 (1976). 페스탈로찌의 수학교육원론 연구. 벽계 이인기 박사 고별 논문집 pp.347-371.

남승인 · 김옥경 (1998). 초등학교 수학교육에 있어서 계산기 활용에 관한 고찰. 대한수학교육학회논문집, 8(1) pp.251-268.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

Campbell, P.F.; Rowan, T.E. & Suarez, A. R. (1999). What criteria for student-invented algorithms? In L. J. Morrow(Ed.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics,* pp.49-55. Reston, VA: The National Council of Teachers Mathematics, INC.

Carraher, T.N. & Schliemann, A.D. (1985). Computation routines prescribed by schools: help or hindrance? *Journal for Research in Mathematics Education,* 16, pp.37-44.

Carroll, W. M. & Porter, D. (1999). Alternative algorithms for whole-number operations. In L. J. Morrow(Ed.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics,* Reston, VA: The National Council of Teachers Mathematics, INC, pp.106-114.

Carroll, W.M. & Porter, D. (1997). Invented strtegies can develop meaningful mathematical procedures. *Teaching Children Mathematics* 3, pp.370-374.

Dienes, Z.P. (1960). *Building up mathematics.*, London: Hutchinson Educatioal, LTD.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as educational task.* Dordrecht, The Netherland: D. Reidel Publishing Company.

Maurer, S.B. (1999). What is an algorithm? What is an answer? In L. J. Morrow(Ed.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics,* pp. 21-31. Reston, VA: The National Council of Teachers Mathematics, INC.

McIntosh, A. (1999). Teaching mental algorithms constructively. In L. J. Morrow(Ed.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics,* pp.45-48. Reston, VA: The National Council of Teachers Mathematics, INC.

Morrow, L.J. (1999). *The teaching and learning of algorithms in school mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers Mathematics, INC.

NCTM (1998). *Principles and standards for school mathematics : Discussion draft.* Reston, VA: The National Council of Teachers Mathematics, INC.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards* *for school mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers Mathematics, INC.

Piaget, J. (1970). Genetic epistemology, New York: Norton.

Usiskin, Z. (1999). Paper-and-pencil algorithms in a calculator-and-computer age. In L. J. Morrow(Ed.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics,* pp.7-20. Reston, VA: The National Council of Teachers Mathematics, INC.

How to Teach Algorithms?

Cho, Wan Young
Namseong Middle School, Bunpyoung, Heungdeok, Cheongju, Chungbuk, 360-151, Korea:
e-mail: matheduhead@yahoo.co.kr

The purpose of this study is to investigate how to teach algorithms in mathematics class.

Until recently, traditional school mathematics was primarily treated as drill and practice or memorizing of algorithmic skills. In an attempt to shift the focus and energies of mathematics teachers toward problem solving, conceptual understanding and the development of number sense, the recent reform recommendations de-emphasize algorithmic skills, in particular, paper-pencil algorithms.

But, the development of algorithmic thinking provides the foundation for student's mathematical power and confidence in their ability to do mathematics. Hence, for learning algorithms meaningfully, they should be taught with problem solving and conceptual understanding.