

피로균열성장시험에서 하한계 응력확대계수의 결정

허성필[†] · 석창성 · 양원호

성균관대학교 기계공학부
(2000. 1. 25. 접수 / 2000. 8. 30. 채택)

Determination of the Threshold Stress Intensity Factor in Fatigue Crack Growth Test

Sung-Pil Heo[†] · Chang-Sung Seok · Won-Ho Yang

Department of Mechanical Engineering, SungKyunKwan University
(Received January 25, 2000 / Accepted August 30, 2000)

Abstract : In fatigue crack growth test, it is important not only to analyze characteristics of fatigue crack growth but also to determine the threshold stress intensity factor, ΔK_{th} which is the threshold value of fatigue crack growth. Linear regression analysis using fatigue test data near the threshold is suggested to determine the ΔK_{th} in the standard test method but the ΔK_{th} can be affected by a fitting method. And there are some limitations on the linear regression analysis in the case of small number of test data near the threshold. The objective of this study is to investigate differences of the ΔK_{th} due to regression analysis method and to evaluate the relative error range of the ΔK_{th} in same fatigue crack growth test data.

Key Words : fatigue crack growth test, threshold stress intensity factor, regression analysis

1. 서 론

피로균열성장시험은 재료의 피로파괴 특성을 분석하기 위한 시험으로, 하중 반복에 따른 균열 길이(a)와 반복수(number of cycle, N)를 측정하여 a-N 곡선을 작성하고, 이 곡선의 기울기(da/dN)와 곡선 각 점에서의 반복하중의 폭(ΔP)으로부터 응력확대계수의 폭(ΔK)을 구하여 da/dN- ΔK 선도를 얻는다. 이러한 da/dN- ΔK 선도에서 주어진 반복하중의 폭으로부터 응력확대계수의 폭을 구하여 그때의 균열성장속도(crack growth rate, da/dN)를 구할 수 있다. 또한, 이 선도로부터 안정성장영역에서의 피로균열성장거동을 규명할 뿐 아니라 피로균열성장의 임계값인 하한계 응력확대계수(threshold stress intensity factor, ΔK_{th})도 구할 수 있다. ΔK_{th} 는 본래 균열성장속

도가 0에 접근할 때의 ΔK 로 정의되고, ΔK_{th} 보다 작은 하중 조건에서는 균열이 성장하지 않음을 의미하며 시험법에서는 균열성장속도가 10^{-10} m/cycle에 대응되는 ΔK 로 규정하고 있다. 이러한 ΔK_{th} 를 결정하기 위한 방법으로 ASTM 시험법¹⁾에서는 하한계 근방의 피로시험 데이터에 대해 최소제곱법에 의한 선형 회귀분석(regression analysis) 방법을 제시하고 있으나 Bucci의 연구²⁾에서 제기된 것처럼 직선 적합(fitting)의 방향에 따라 ΔK_{th} 값에 차이가 발생할 수 있다. 또한, 하한계 근방의 데이터가 적을 경우에는 이러한 선형 회귀분석이 한계를 지니게 되며 이를 보완하기 위한 방안으로 전체 데이터에 대해 비선형 함수를 사용한 비선형 회귀분석을 고려할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 선형 및 비선형 회귀분석 방법에 따른 ΔK_{th} 의 차이를 고찰하고, 이를 통해 동일한 피로균열성장시험 데이터로부터 발생할 수 있는 ΔK_{th} 의 오차 범위를 평가하고자 한다.

[†]To whom correspondence should be addressed.
spheo@orgio.net

2. 하한계 응력확대계수의 결정 방법

ASTM 시험법에 규정된 하한계 응력확대계수의 결정 방법에서는 Fig. 1과 같이 피로균열성장 시험으로부터 작성된 $da/dN-\Delta K$ 선도³⁾에서 균열 성장속도가 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ m/cycle 사이에 있는 5개 이상의 데이터를 사용하여 선형 회귀분석을 수행하고, 이때 얻어진 적합 직선에서 균열성장속도가 10^{-10} m/cycle일 때의 ΔK 를 ΔK_{th} 로 규정하고 있다. 이 회귀분석에서는 횡축 변수인 ΔK 를 종속변수로 할 것을 제시하고 있다.

이러한 시험법에 따른 ΔK_{th} 의 결정 방법에는 다음과 같은 문제점을 내포할 수 있다. 먼저 시험법에서는 ΔK 를 종속변수로 하는 선형 회귀분석을 제시하고 있으나 이 방법으로 얻은 적합 직선이 주어진 데이터로부터의 가장 적합한 직선이라고 단정할 수 없다. 따라서, 종속 변수인 da/dN 을 종속변수로 하는 선형 회귀분석 및 적합 직선으로부터의 수직 거리의 제곱합(sum of the squares)을 최소화시키는 회귀분석과의 비교 평가가 필요하다. 또한, 실제 da/dN 과 ΔK 의 관계는 비선형이므로 하한계 근방의 데이터에 대해 선형 회귀분석을 수행하고 이로부터 결정된 ΔK_{th} 가 ΔK_{th} 의 본래의 정의를 가장 충실하게 표현하고 있다고 할 수 없다. 특히, 하한계 근방의 데이터가 많을 경우에는 선형 회귀분석을 통한 직선 적합도 타당할 것이나 데이터가 적을 경우에는 문제를 내포할 수 있다. 따라서, Weibull 함수와 같은 비선형 식으로 전체 $da/dN-\Delta K$ 의 거동을 표현하고, 이 곡선에서 균열성장속도가 10^{-10} m/cycle일 때의 ΔK 를 ΔK_{th} 로 정의하는 것이 이러한 경우에 대안이 될 수 있다.

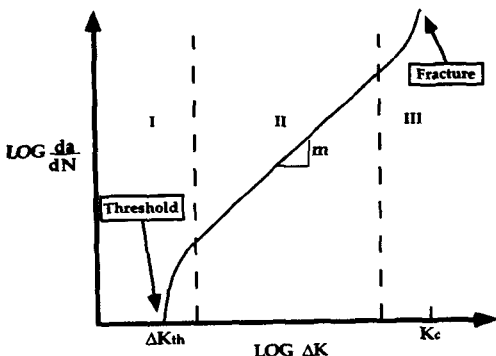


Fig. 1 Typical fatigue crack growth behavior in metals

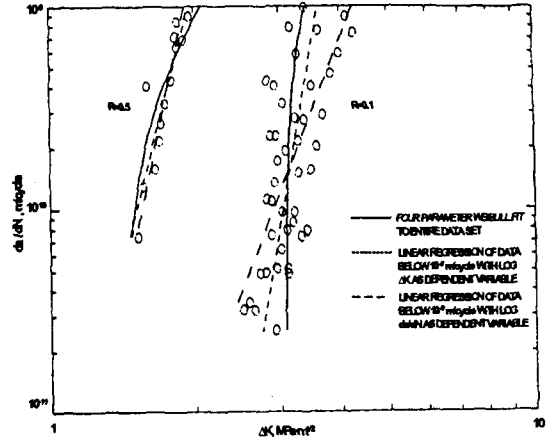


Fig. 2. Fits to near-threshold data for aluminum alloy by various approaches²⁾

Bucci는 이러한 회귀분석의 방법에 따라 ΔK_{th} 에 차이가 발생할 수 있다는 가능성을 제기하고, Fig. 2에서와 같이 ΔK 를 종속변수로 하여 선형 회귀분석을 수행한 경우와 da/dN 을 종속변수로 하여 선형 회귀분석을 수행한 경우, 그리고 전체 데이터를 Weibull 함수로 비선형 적합한 경우에 ΔK_{th} 에 상대적인 차이가 발생함을 보였다.²⁾ 본 연구에서는 이러한 오차 발생의 가능성을 바탕으로 피로균열성장시험 데이터에 대한 선형 및 비선형 회귀분석 방법에 따른 ΔK_{th} 의 차이를 정량적으로 평가하였다.

3. 회귀분석에 의한 하한계 응력확대계수 결정

3.1. 회귀분석

ΔK_{th} 의 결정에 포함될 수 있는 상대오차 범위를 평가하기 위하여 $da/dN-\Delta K$ 선도상의 데이터에 대해 다섯 가지 방법으로 선형 및 비선형 회귀분석을 수행하였다. 선형 회귀분석에서는 ASTM 시험법의 규정에 따라 $da/dN-\Delta K$ 선도에서 da/dN 이 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ m/cycle 사이에 있는 5개 이상의 데이터를 사용하여 직선 적합을 수행하였고, 비선형 회귀분석에서는 전체 $da/dN-\Delta K$ 선도상의 데이터에 대해 비선형 함수로의 적합을 수행하였다. 기존의 피로균열성장 시험 데이터^{2,4,5)}를 이용하였고 회귀분석을 수행한 후 ASTM 시험법의 규정에 따라 da/dN 이 10^{-10} m/cycle에 해당하는 ΔK 를 ΔK_{th} 로 결정하였다.

선형 회귀분석에서는 일반적인 수치해석의 절차⁶⁾를 따라 적합 직선으로부터 각각 횡축 방향, 종축 방향 및 수직 거리의 제곱합을 최소화시키는 직선 적합을 수행하였다. 비선형 회귀분석에서는 식 (1)과 같은 네 개의 계수를 갖는 Weibull 함수(four parameter Weibull function)와 식 (2)와 같은 쌍곡선형 함수로의 적합을 수행하였다.

$$\frac{da}{dN} = B_1 + (B_2 - B_1) \left\{ -\ln \left(1 - \frac{\Delta K}{B_4} \right) \right\}^{1/B_3} \quad (1)$$

$$\log \frac{da}{dN} = C_1 \sinh [C_2 (\log \Delta K + C_3)] + C_4 \quad (2)$$

여기서, 식 (1)과 (2)의 계수인 $B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4$ 는 주어진 곡선으로부터의 데이터에 이르는 거리의 제곱합을 최소화시키는 회귀분석으로부터 결정된다.

3.2. 하한계 응력확대계수 결정

Fig. 3과 같은 피로균열성장시험 결과⁴⁾에 대해 da/dN 이 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ m/cycle 사이에 있는 데이터를 사용하여 세 가지 방법으로 선형 회귀분석을 수행하고 그 결과를 Table 1에 나타내었다. Table 1에서 Linear 1은 ΔK 를 종속변수로 하여 적합 직선으로부터 횡축 방향으로의 거리의 제곱합을 최소화시키는 선형 회귀분석을 수행한 경우이고, Linear 2는 da/dN 을 종속변수로 하여 적합 직선으로부터 종축 방향으로의 거리의 제곱합을 최소화시키는 선형 회귀분석을 수행한 경우이다. 그리고, Linear 3은 적합 직선으로부터 수직 거리의 제곱합을 최소화시키는 선형 회귀분석을 수행한 경우이다. 세 번째 열은 회귀분석 방법에 따른 ΔK_{th} 의 상대오차이며, ASTM 시험법에 제시된 방법인 Linear 1의 경우를 기준으로 계산되었다. 네 번째 열의 r^2 은 회귀분석의 타당성을 나타내는 파라미터인 결정계수(coefficient of determination)로, 1에 가까운 값을 가질수록 회귀분석이 적합함을 나타낸다.

Table 1의 결과에서와 같이 Fig. 3의 피로시험 결과에서는 세 가지 적합 직선으로부터 결정된 하한계 응력확대계수가 거의 동일한 값을 나타내었다. 또한, 세 가지 회귀분석에서 결정계수가 모두 1에 근접한 값인 것으로 보아 회귀분석이

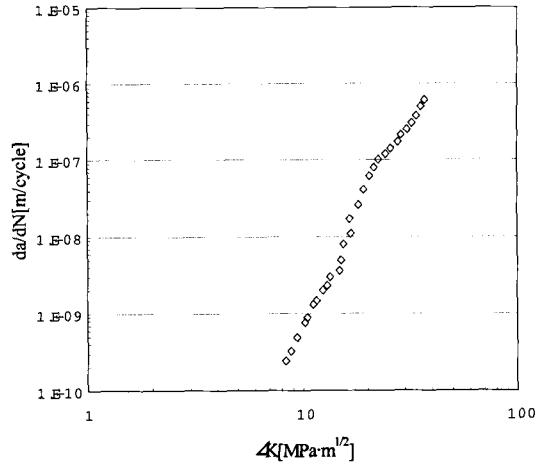


Fig. 3. Fatigue crack growth test data for determining the threshold stress intensity factor⁴⁾ (sample data 1)

Table 1. Linear regression analysis results for fatigue crack growth test data in Fig. 3

	ΔK_{th} [MPa · m ^{1/2}]	Relative Error[%]	r^2
Linear 1	7.196	-	0.999...
Linear 2	7.195	0.014	0.999...
Linear 3	7.196	0	0.999...

모두 우수함을 알 수 있다. 이는 Fig. 3의 결과에서는 da/dN 이 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ m/cycle 범위의 데이터가 거의 선형적인 관계를 가지고 있기 때문이며 이와 같은 시험 데이터의 경우에는 선형 회귀분석의 방법에 따른 상대오차는 고려하지 않아도 될 것이다.

Fig. 4와 같은 시험 결과²⁾에 대해 앞에서와 같은 세 가지 방법으로 선형 회귀분석을 수행하고 그 결과를 Table 2에 나타내었다. Fig. 4의 피로 시험 결과는 da/dN 이 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ m/cycle 범위에서 데이터의 분산이 큰 경우로, Linear 1과 Linear 3에 의해서는 거의 동일한 ΔK_{th} 가 나타났으나 Linear 2에 의해서는 큰 차이가 발생하였다. 결정계수는 Linear 1과 Linear 2가 같으나 데이터의 분산이 큰 관계로 1과 많은 차이를 보였고, Linear 3은 1에 가까운 값으로 나타나, 적합 직선으로부터 수직 거리의 제곱합을 최소화시키는 선형 회귀분석이 상대적으로 우수함을 알 수 있다. 그러나, Linear 1과 Linear 3이 거의 동일한

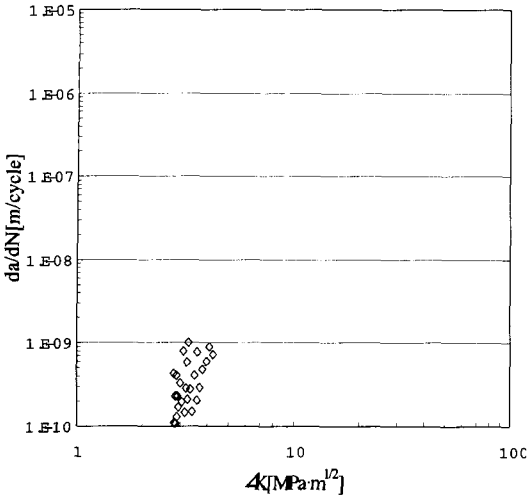


Fig. 4. Fatigue crack growth test data for determining the threshold stress intensity factor²⁾ (sample data 2)

Table 2. Linear regression analysis results for fatigue crack growth test data in Fig. 4

	ΔK_{th} [MPa · m ^{1/2}]	Relative Error[%]	r^2
Linear 1	2.907	-	0.310
Linear 2	2.247	22.7	0.310
Linear 3	2.899	0.26	0.946

ΔK_{th} 를 나타내므로 결정계수만으로 적절한 회귀분석임을 판단할 수는 없으며, 결정계수는 동일한 방향, 동일한 조건의 회귀분석일 경우에 그 적절성을 판단하는 파라미터가 될 수 있을 것으로 생각된다.

Fig. 5의 시험 결과³⁾에 대해서는 앞에서와 같은 선형 회귀분석을 수행한 결과와 비선형 회귀분석 결과를 Table 3에 함께 나타내었다. Table 3에서 Weibull은 식 (1)과 같은 Weibull 함수로의 적합을 수행한 경우이고, Sinh는 식 (2)와 같은 쌍곡선형 함수로의 적합을 수행한 경우이다. 선형 회귀분석을 통한 결과는 앞의 Table 2의 결과와 마찬가지로 Linear 1과 Linear 3에서 얻은 ΔK_{th} 가 거의 동일한 값을 가지며, Linear 2에서는 상대적으로 다른 값으로 나타났다. 또한, Linear 3에서의 결정계수가 가장 1에 가깝게 나타난 것으로 보아 이 방법이 가장 적합한 회귀분석임을 확인할 수 있다.

Weibull 함수와 쌍곡선형 함수를 사용한 비선형 회귀분석은 결정계수가 모두 1에 가까운 값이므로 전체 데이터를 잘 적합화 시켰다고 볼 수 있다. Fig. 5에 두 가지 적합 곡선을 시험 데이터와 함께 나타내었는데, 이 그림을 통해서도 비선형 회귀분석의 적합성을 알 수 있다. 이러한 비선형 회귀분석을 통해 전체 da/dN - ΔK 선도를 표현하고 이로부터 결정한 ΔK_{th} 는 ASTM 시험법에 제시된 선형 회귀분석을 통한 결과와 Weibull 함수에서 9.87%, 쌍곡선형 함수에서 2.14%의 차이가 있는 것으로 나타났다. 이로부터 피로균열성장시험에서 균열성장속도가 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ m/cycle인 범위의 데이터로부터 결정한 ΔK_{th} 와 전체 데이터로부터 결정한 ΔK_{th} 는 상대적으로

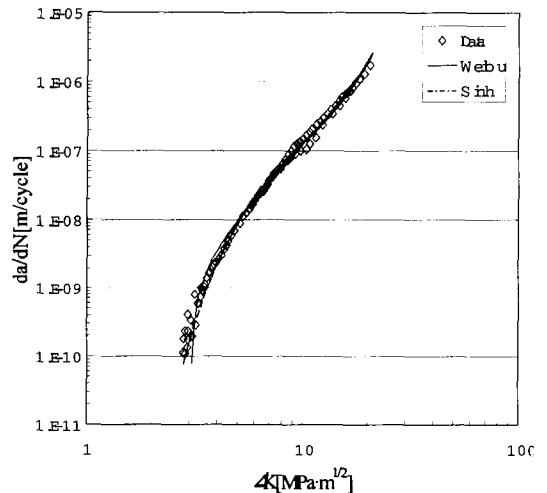


Fig. 5. Fatigue crack growth test data and fitting curves for determining the threshold stress intensity factor³⁾ (sample data 3)

Table 3. Linear and nonlinear regression analysis results for fatigue crack growth test data in Fig. 5

		ΔK_{th} [MPa · m ^{1/2}]	Relative Error[%]	r^2
Linear Regression	Linear 1	2.806	-	0.761
	Linear 2	2.726	2.85	0.761
	Linear 3	2.805	0.036	0.995
Nonlinear Regression	Weibull	3.083	9.87	0.992
	Sinh	2.866	2.14	0.994

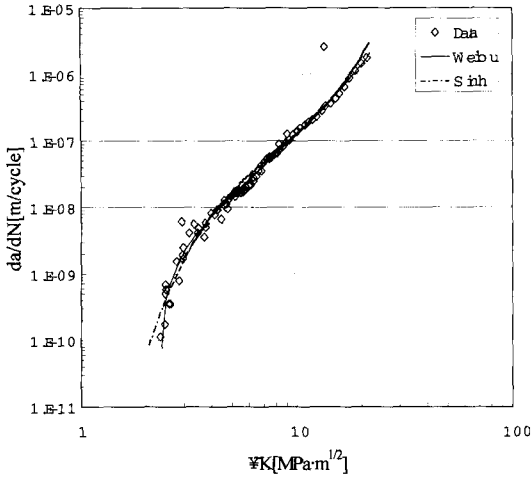


Fig. 6. Fatigue crack growth test data and fitting curves for determining the threshold stress intensity factor⁵⁾ (sample data 4)

Table 4. Linear and nonlinear regression analysis results for fatigue crack growth test data in Fig. 6

		ΔK_{th} [MPa · m ^{1/2}]	Relative Error[%]	r^2
Linear Regression	Linear 1	2.333	-	0.413
	Linear 2	2.097	10.12	0.413
	Linear 3	2.332	0.043	0.990
Nonlinear Regression	Weibull	2.364	1.33	0.942
	Sinh	2.096	10.16	0.957

최대 10%에 가까운 상대오차를 포함할 수 있을
을 알 수 있다.

Fig. 6과 같은 시험 결과⁵⁾에 대해 앞에서와 같
은 다섯 가지 방법으로 선형 회귀분석 및 비선
형 회귀분석을 수행하고 그 결과를 Table 4에 나
타내었다. 선형 회귀분석을 통한 결과는 앞의 결
과들에서와 같이 Linear 1과 Linear 3에서 얻은
 ΔK_{th} 는 거의 동일한 값을 가지며, Linear 3에서
의 결정계수가 1에 가장 가까운 값을 나타내었
다. 비선형 회귀 분석을 통한 결과에서는 앞의
Table 3의 결과와 유사하게 쌍곡선형 함수로 적
합한 경우에서 선형 회귀분석을 통한 결과와
10% 정도의 차이가 있는 것으로 나타났다.

Fig. 7과 같은 시험 결과⁵⁾에 대해서도 앞에서
와 같은 다섯 가지 방법으로 회귀분석을 수행하

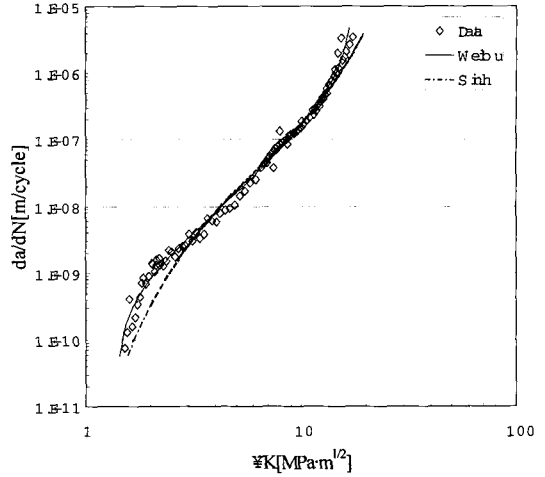


Fig. 7. Fatigue crack growth test data and fitting curves for determining the threshold stress intensity factor⁵⁾ (sample data 5)

Table 5. Linear and nonlinear regression analysis results for fatigue crack growth test data in Fig. 7

		ΔK_{th} [MPa · m ^{1/2}]	Relative Error[%]	r^2
Linear Regression	Linear 1	1.541	-	0.728
	Linear 2	1.471	4.54	0.728
	Linear 3	1.540	0.065	0.992
Nonlinear Regression	Weibull	1.472	4.48	0.994
	Sinh	1.676	8.76	0.979

고 그 결과를 Table 5에 나타내었다. 회귀분석방
법에 따른 상대오차의 경향이 앞의 결과들에서
와 유사하게 나타남을 알 수 있다.

4. 결 론

피로균열성장시험에서 적합한 하한계 응력확
대계수의 결정을 위하여 시험 데이터에 대해 여
러 가지 방법으로 회귀분석을 수행하고 그 결과
를 비교 고찰하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 하한계 응력확대계수를 결정하기 위하여
균열성장속도가 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ m/cycle 사이에 있는
데이터에 대한 선형 회귀분석에서는 적합 직선
으로부터 수직 거리의 제곱합을 최소화시키는

회귀분석이 상대적으로 가장 우수하다. 그러나, ASTM 시험법에 제시된 것처럼 ΔK 를 종속변수로 하여 적합 직선으로부터 횡축 방향으로의 거리의 제곱합을 최소화시키는 회귀분석을 통해서도 거의 동일한 결과를 얻을 수 있다.

(2) da/dN 을 종속변수로 하여 적합 직선으로부터 종축 방향으로의 거리의 제곱합을 최소화시키는 선형 회귀분석은 타당하지 않다.

(3) da/dN - ΔK 선도 전체를 비선형 회귀분석을 통해 적합한 비선형 함수로 표현하고 이로부터 결정한 하한계 응력확대계수와 균열성장속도가 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ m/cycle 사이에 있는 데이터에 대한 선형 회귀분석으로부터 결정한 값은 최대 10% 정도의 상대 오차를 포함한다.

감사의 글 : 본 논문은 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비 안전성평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참고문헌

- 1) "Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates", ASTM E647-93, 1993.
- 2) R. J. Bucci., "Development of a Proposed ASTM Standard Test Method for Near-Threshold Fatigue Crack Growth Rate Measurement", Fatigue Crack Growth Measurement and Data Analysis, ASTM STP 738, pp. 5~28, 1981.
- 3) T. L. Anderson, "Fracture Mechanics", CRC Press, 1995.
- 4) 우홍식, "Butt 용접재의 ΔK_{th} 와 피로균열 성장거동에 관한 연구", 성균관대학교 박사학위논문, 1989.
- 5) M. S. Miller and J. P. Gallagher, "An Analysis of Several Fatigue Crack Growth Rate(FCGR) Descriptions", Fatigue Crack Growth Measurement and Data Analysis, ASTM STP 738, pp. 205~251, 1981.
- 6) S. C. Chapra and R. P. Canale, "Numerical Methods for Engineers", McGraw Hill, 1988.