研究論文

출검품질 보증을 위한 베이지안 번인시험방식 설계

권 영 일
청주대학교 산업공학과

A Bayesian Burn-in Procedure Guaranteeing Outgoing Quality of a Product

Young Il Kwon
Dept. of Industrial and Systems Eng., Chongju University

Abstract

A Bayesian burn-in procedure is developed for imited failure populations in which defective items fail soon after they are put in operation and non-defective ones never fail during the technical life of the items. Sequential schemes guaranteeing pre-specified outgoing quality of a product are derived based on prior information on the quality of a product and accumulated failure information up to the decision point. A numerical example is also provided.

1. 서론

제품 또는 부품의 수명시험에서 흔히 접할 수 있는 초기고장 현상은 그 제품 집단이 둘 이상의 서로 다른 부 집단으로 혼합되어 있음을 의미한다. 이러한 혼합집단으로부터 수명이 짧은 제품들을 선별, 제거함으로써 출검품질 혹은 신뢰도를 제고시키기 위한 방법의 하나로 번인 시험이 널리 사용되고 있다. 특히 안전과 관련되는 자동차 에어백의 주요 부품 등과 같이 고 신뢰도가 요구되는 제품군에 대한 번인 시험은 필수적일 것이다. 평균 잔여 수명을 최대화하거나 임무 실패 확률이나 비용을 최소화, 또는 규정된 신뢰도를 달성하는 기준 등을 만족하는 많은 번인 방법들이 개발되어 왔는데 주요 연구로서 Dishon과 Weiss(1973, 1976), Marcus와 Blumenthal(1974), Nguyen과 Murthy(1982), Kuo (1984), Pantic(1986), Whitbeck과 Leemis (1989), Leemis와 Beneke(1990), Bai와 Kwon(1994), Mi(1997), 그리고

Chien과 Kuo(1997)의 연구 결과들이 있다.

한편 integrated circuits(ICs)와 같은 전자부품의 경우, 제조공정에서 오염된 불량품은 일찍 고장을 일으키는 반면 정상 품들은 수명이 충분히 길어 그 제품의 기술적 수명 내에는 전혀 고장이 나지 않는 특성을 지닌 제품들이 많다. 이러한 고장 집단을 한정고장집단(limited failure populations:LFPs) 이라 부른다. Mendenhall과 Harder(1958), Barlow 등(1968), Blumenthal과 Marcus(1975), Farewell(1982, 1986), Meeker(1987) 등이 한정고장집단에 대한 통계적 추론과 그 응용에 대해 연구하였으며 Marcus와 Blumenthal(1974)은 배치 내 불량품 수가 미지일 때 시험 종료 후 잔존불량개수가 특정 개수 이하일 확률을 보장하는 축차 번인 절차를 개발하였다. 그리고 Bai와 Kwon(1994)은 비용 모형을 사용한 경제적인 축차 번인 방식을 설계하였다.

한정고장집단에 대한 번인 시험에 있어서 시험 시간이 길어질수록 수명이 짧은 불량품들이 많이 제거되어 출검품질은 좋아진다. 또한 시험이 진행됨에 따라 제품 품질에 대한 정보도 누적되나 시험기간에 비례하여 시험에 소용되는 비용은 증가할 것이다. 만약 제품 품질에 대한 사전 정보를 활용할 수 있다면 이들 정보와 시험에서 누적되는 고장 정보를 사용함으로써 번인 시험시간을 효과적으로 단축시킬 수 있을 것이다.

본 연구에서는 시험이 종료된 후 배치(batch) 내 잔존 불량품 수가 특정 개수 이하일 확률을 보장하는 베이지안 번인 시험방식을 개발하였다. 크기 N의 배치 단위로 제품이 생산되고 번인 시험이 실시되는 상황을 고려하였으며, 사전 정보와 축적된 시험 정보를 활용하여 번인 시험의 계속 또는 종료 여부를 결정짓는 축차 시험방식을 설계하였다.

2. 모델

평균 불량률이 p인 공정으로 부터 크기 N의 배치 단위로 제품이 생산되는 상황을 생각한다. 여기서 불량률 p는 초기에 고장을 일으키는 제품의 비율을 의미한다. 정상품들은 수명이 충분히 길어 그 제품의 기술적 수명 내에 고장 날 확률은 0이라고 간주한다. 이때 배치 내 불량품 수 M은 모수가 N, p인 이항 분포를 따르게 된다. 불량품들의 수명분포 $F(t)$는 알려져 있다고 가정한다.

여기서 사용될 기호들은 다음과 같다.

기호

N	: 배치 크기
p	: 생산 공정의 평균불량률
M	: 크기 N의 배치에 포함된 불량품 수
$F(t)$	: 불량품의 수명 분포함수
t_k	: k번째 고장 시간
y_k	: $-\log\{1-F(t_k)\}$, 변환된 고장시간
단계 k	: 구간 $[y_k, y_{k+1}]$
ϕ	: 시험의 최종 단계
D	: 단계 k에서의 잔존 불량품 수

ED : 시험종료 후 배치 내 잔존불량품수의 기대치

ET : 번인 시험의 기대 시험 시간

고장시간변환

제안된 번인 시험에서는 사용의 단순화를 위해 변환된 고장시간을 사용한다. 관측된 고장 시간들이 $t_1 \le t_2 \le \cdot\cdot\cdot \le t_j$ 이고

$$y_j = -\log\{1-F(t_j)\} \tag{1}$$

라 하자. 이때 $y_1, y_2, \cdot\cdot\cdot, y_j$ 는 모수가 1인 다음의 확률밀도함수를 갖는 지수분포로부터의 순서통계량이 된다.

$$f_y(y) = \exp(-y), y>0 \tag{2}$$

예로써 $F(t) = 1-\exp(-\lambda t)$이면 $y = \lambda t$가 되고 $F(t) = 1-\exp\{(t/\theta)^\beta\}$이면 $y = (t/\theta)^\beta$가 된다.

Predictive 분포

크기 N의 배치 내 불량품 수 M이 모수가 N, p인 이항분포를 따르므로 $y_1, y_2, \cdot\cdot\cdot, y_m$ 은 모수가 1인 지수분포로부터 얻어진 크기m인 랜덤 샘플의 순서 통계량이 되며, y_k와 M의 결합 확률밀도함수는 다음과 같이 구해진다.

$$f(y_k, m) = \frac{N!}{(N-m)!(k-1)!(m-k)!}$$

$$\times (1-e^{-y_k})^{k-1}(pe^{-y_k})^{m-k}e^{-y_k} \times p^k q^{N-m} / \left\{\sum_{j=k}^{N}\binom{N}{j}p^j q^{N-j}\right\},$$

$$0<y_k<\infty,\ k \le m \le N. \tag{3}$$

그리고 y_k의 주변확률밀도함수는

$$f_1(y_k) = \frac{N!}{(N-k)!(k-1)!}e^{-y_k}$$

$$\times (1-e^{-y_k})^{k-1}(q+pe^{-y_k})^{N-k} \times p^k / \left\{\sum_{j=k}^{N}\binom{N}{j}p^j q^{N-j}\right\},$$

$$0<y_k<\infty \tag{4}$$

이다. 여기서 $q=1-p$를 뜻한다. 식 (3)과 (4)에서

$$g(m \mid y_k) = \binom{N-k}{m-k}\left(\frac{pe^{-y_k}}{q+pe^{-y_k}}\right)^{m-k} \times \left(\frac{q}{q+pe^{-y_k}}\right)^{N-m},$$

$$m = k, k+1, \cdot\cdot\cdot, N, \tag{5}$$

이 되고 단계 k에서 배치 내 잔존 불량품 수 $D = M-k$의 예측밀도함수(predictive density function)는 다음과 같이 얻어진다.

$$g(d \mid y_k) = \binom{N-k}{d}\left(\frac{pe^{-y_k}}{q+pe^{-y_k}}\right)^{d} \times \left(\frac{q}{q+pe^{-y_k}}\right)^{N-k-d},$$

$$d = 0, 1, 2, \cdot\cdot\cdot, N-k. \tag{6}$$

의사결정기준

여기서 사용될 의사결정기준은 시험 종료

후 잔존 불량품 수가 지정된 개수 d^*보다 작거나 같은 확률을 보장해 주는 방식으로서 다음과 같은 기준을 사용한다.

$$Pr(D \leq d^* \mid y_k) \geq 1 - \alpha \tag{7}$$

매 단계마다 위의 기준의 만족 여부에 따라 시험의 계속 또는 종료가 결정된다.

3. 시험 절차의 설계

앞 절에서 제시된 기준을 만족하는 번인시험 절차는 다음 정리들로부터 얻어진다.

정리 1. 단계 k에서 잔존 불량품 수가 d^*개 이하일 확률은

$$G_k(y_k) = \sum_{d=0}^{d^*} g(d \mid y_k) \tag{8}$$

이다. 만약 $G_k(0) < 1 - \alpha$이면 $\Pr(D \leq d^* \mid y^k) = 1\text{-}\alpha$를 만족하는 유일한 y_k^*가 존재한다.

증명. 먼저 $G_k(y_k)$를 y_k에 대해 미분하면

$$\frac{dG_k(y_k)}{dy_k} = (N\text{-}k)\left(\frac{N\text{-}k\text{-}1}{d^*}\right) \times \left(\frac{pe^{-y^*}}{q+pe^{-y^*}}\right)^{d^*+1} \times \left(\frac{q}{q+pe^{-y^*}}\right)^{N-k-d^*} > 0,$$

이 되어 $G_k(y_k)$가 y_k의 단조 증가함수임을 알 수 있다. 또한

$$0 < G_k(0) = \sum_{d=0}^{d^*} \binom{N\text{-}k}{d} p^d q^{N-k-d} < 1,$$

이고

$$G_k(\infty) = \Pr(D \leq d^* \mid y_k = \infty) = 1$$

이므로, 위 사실들로부터 $G_k(0) < 1 - \alpha$일 때 $\Pr(D \leq d^* \mid y_k) = 1\text{-}\alpha$를 만족하는 유일한 y_k^*가 존재함을 알 수 있다.

다음 정리는 y_k^*의 성질에 관한 것으로 시험절차나 기대시험시간 등을 구하는데 유용하게 이용될 수 있다.

정리 2. y_k^*는 k에 대해 감소한다. 즉 $y_1^* > y_2^* > \cdot \cdot \cdot > y_\phi^*$이다. 여기서

$$\phi = \max\{k \mid \Pr(D \leq d^* \mid y_k = 0) \leq 1 - \alpha\} \tag{9}$$

로서 번인 시험의 최종 단계를 의미한다.

증명. 정리 1의 결과와 다음의 사실로부터

$$G_{k+1}(y) - G_k(y) = \binom{N\text{-}k\text{-}1}{d^*}\left(\frac{pe^{-y}}{q+pe^{-y}}\right)^{d^*+1} \times \left(\frac{pe^{-y}}{q+pe^{-y}}\right)^{N-k-d^*-1} > 0, \tag{10}$$

y_k^*가 k에 대해 감소하며, $k > \phi$일 때는 모든

$y_k \geq 0$에 대해 기준 (7)이 만족됨을 알 수 있다. 이로부터 이 정리가 성립한다.

$$w_i^* = y_{i+1}^* (i=0,1,2,\cdot\cdot\cdot\cdot.\phi-1)$$

라 두면, 정리 1과 2의 내용은 다음과 같이 요약될 수 있다 : 최초 크기 N의 배치로 동시에 시험을 시작하여 w_0^*까지 고장이 발생하지 않으면 w_0^*에서 시험을 종료하고, 그렇지 않으면 다음 단계로 넘어간다. 단계 $k(k=1,2,3,\cdot\cdot\cdot)$에서, $y_k \geq w_k^*$이면 y_k에서 시험을 종료한다. 그렇지 않으면 y_{k+1}이나 w_k^*중 먼저 도달하는 시점까지 시험을 계속한다.

만약 w_k^*에 먼저 도달하면 그 시점에서 시험을 종료하고 그렇지 않으면 시험이 다음 단계 $k+1$로 넘어간다. 한편 시험에 들어가기 전

$$G_0(0) = \sum_{d=0}^{d^*} \binom{N}{d} p^d q^{N-d} \geq 1-\alpha$$

이면 시험 종료기준 (7)이 이미 만족되므로 시험 없이 배치를 수락한다.

기대시험시간

k번째 고장시간 y_k에서 시험이 종료될 때까지의 기대시간을 $E_k(y_k)$라 하자. 여기서의 시험 절차에 따르면 $y_k \geq w_k^*$인 경우 y_k에서 추가 시험시간은 0이다. $y_k < w_k^*$인 경우는 $y_{k+1} < w_k^*$이면 추가 시험시간이 $y_{k+1}-y_k+E_{k+1}(y_{k+1})$이 되고, $y_{k+1} \geq w_k^*$이면 추가 시험시간은 $w_k^* - y_k$가 된다. 따라서 제안된 번인 시험 방식의 기대 시험 시간은 다음의 후진 관계식 (backward relationship : $k=\phi-1,\cdot\cdot\cdot,2,1,0$)에서 $E_0(y_0)$로 구해진다.

$$E_k(y_k) = \begin{cases} \int_{y_k}^{w_k^*} [E_{k+1}(\chi) h(\chi \mid y_k) + \{1-H(\chi \mid y_k)\}] dx, & \text{for } y_k < w_k^* \\ 0, & \text{for } y_k \geq w_k^* \end{cases} \tag{11}$$

여기서 $E\phi(y\phi)=0$ 이고 x는 (k+1)번째 고장시간으로 확률밀도함수 $h(\chi \mid y_k)$와 누적분포함수 $H(\chi \mid y_k)$는 각각 다음과 같이 구해진다.

$$h(\chi \mid y_k) = \begin{cases} [(N-k)p \cdot \exp(-\chi) \times \{q+p \cdot \exp(-\chi)\}^{N-k-1}] / \{q+p \cdot \exp(-y_k)\}^{N-k}, & y_k < x < \infty, \\ q^{N-k} / \{q+p \cdot \exp(-y_k)\}^{N-k}, & x = \infty, \end{cases} \tag{12}$$

$$H(x \mid y_k) = 1-\left(\frac{q+p \cdot \exp(-x)}{q+p \cdot \exp(-y_k)}\right)^{N-k} \tag{13}$$

시험기간 중 제거되는 불량품 수의 기대치

위에서와 같은 방법으로 번인 시험이 종료되기까지 제거되는 불량품 수의 기대치는 다

음의 관계식에서 $M_0(y_0)$에 의해 구해진다.

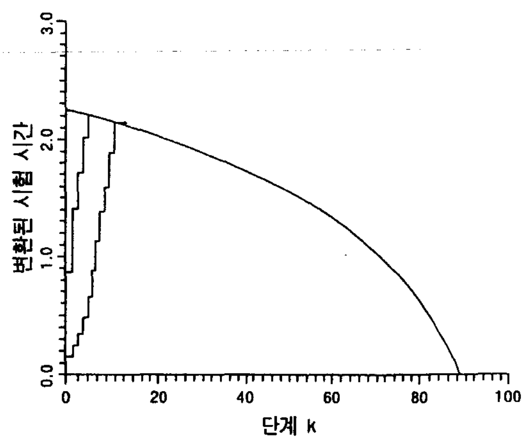
$$M_k(y_k) = \begin{cases} \int_{y_k}^{w_k^*}[1+M_{k+1}(\chi)]h(\chi \mid y_k)\,d\chi, & \text{for } y_k < w_k^* \\ 0, & \text{for } y_k \ge w_k^* \end{cases} \tag{13}$$

여기서 $M_\phi(y_\phi) = 0$이고 $M_k(y_k)$는 y_k에서 시험이 종료될 때까지 제거되는 불량품 수의 기대치를 말한다.

4. 예제

여기서는 예제를 통해 제안된 번인시험 방식의 사용 방법을 소개한다.

예제 : 공정 불량률이 p=0.05인 생산공정으로부터 크기 N=100의 배치 단위로 제품이 생산되는 경우를 생각해 보자. 시험 종료 후 배치 내 잔존 불량품 수가 1개 이하일 확률이 90% ($\alpha = 0.10$)가 되는 번인 시험을 설계코자 한다. 불량품의 고장시간은 와이블 분포를 따르며 분포함수가 $F(t) = 1 - \exp\{-(t/\theta)^\beta\}$로서 θ와 β 의 값은 알려져 있다고 가정한다. 이 예제에서 $\phi = 89$가 얻어지고, 요구되는 기준을 만족하는 번인시험 절차는 〈그림 1〉에서 w_k^* $(k=0,1,2,\cdot\cdot\cdot,\phi-1)$들을 연결하는 곡선으로 나타내었다.



〈그림1〉 N=100, p=0.05, $d^*=1$, α=0.10 일 때의 시험방식

구해진 시험 절차에서 k번째의 실제 고장시간을 t_k라 할 때, 단계 k에서의 의사결정(decision rule) 은 다음과 같다 :

만약 $(t_k/\theta)^\beta \ge w_k^*$이면 t_k에서 시험을 종료한다. 그렇지 않으면 다음 고장시간 t_{k+1}이나 $t_k^* = \theta\,(w_k^*)^{1/\beta}$중 먼저 도달하는 시점까지 시험을 계속한다. 만약 t_k^*에 먼저 도달하면 시험을 종료하고 그렇지 않으면 시험을 계속하여 다음 단계 k+1로 들어간다.

이러한 의사 결정 규칙을 〈그림 1〉에 예시하였다. 구해진 시험절차를 따를 경우 기대시험시간은 2.25이며 번인 시험 기간동안 제거되는 불량품 수의 기대치는 4.48개이다. 이는 번인 시험에 들어가기 전 배치 내 평균 불량품 수 5개가 시험을 마친 후 0.52개로 감소함을 뜻한다.

제안된 번인시험방식을 사용하기 위해서는 공정 불량률 p에 대한 정보가 필요하다. 번인

시험은 제조공정에서 모든 제품에 대해 일상적으로 수행하는 시험이므로 p를 추정하기 위한 고장 데이터는 일반적으로 충분히 확보될 수 있을 것이다. 만약 p에 대한 정보가 없을 때에는 사전 추정 값을 사용할 수 있다.

실제 공정 불량률이 p=0.05인 경우, 틀린 사전 추정 값 p'을 사용하였을 때의 결과가 <표 1>에 주어져 있다.

<표 1> 참값이 p=0.05일 때 잘못된 사전 추정 값 p'을 사용했을 때의 결과

p'	ED	ET
0.03	0.89	1.72
0.04	0.66	2.02
0.05	0.52	2.25
0.06	0.42	2.45
0.07	0.35	2.61

표에서 ED와 ET는 틀린 사전 추정 값 p'을 사용하여 설계한 번인시험방식을 실제 불량률이 p=0.05인 공정에 적용하였을 때의 잔존 불량품 수와 시험시간의 기대치를 각각 나타낸다. 이 표에서 p의 사전 정 값의 작은 오차에 대해서는 제안된 번인시험방식이 크게 영향을 받지 않는다는 사실을 알 수 있다.

5. 결론

제조 공정에서 오염된 불량품만 가동 후 초기에 고장을 일으키는 한정고장집단에 대한 번인시험방식을 개발하였다. 의사결정기준으로 시험 후 배치 내 잔존 불량품 수가 특정 개수 이하로 보장되는 방식을 사용하였으며 이 기준을 만족하는 번인시험방식을 설계하고 기대 시험시간과 시험 후 잔존 불량품수의 기대치를 구하였다. 예제를 통해 개발된 번인시험방식의 사용을 예시하고, 잘못된 p의 사전 추정 값 사용에 대해 민감도 분석을 실시하였다. 예제에서의 시험절차 설계 및 각종 계산은 펜티엄 PC를 사용하여 수행하였으며 연산 시간은 수초에서 수십초 정도밖에 소요되지 않았다. 현장에서도 쉽게 프로그램하여 제안된 번인시험방식을 활용할 수 있을 것으로 생각한다.

참 고 문 헌

[1] Bai, D.S., and Kwon, Y.I. (1994). "An economic sequential screening procedure for limited failure population", *Naval Research Logistics*, 41, pp.523-535.

[2] Barlow. R., Madansky, A., Proschan, F., and Scheur, E. (1968). "Statistical estimate procedures for the burn-in process", *Technometrics*, 10, pp.51-62.

[3] Blumenthal, S., and Marcus, R. (1975). "Estimating population size with exp onential failure", *J. Amer. Statist. Ass.*, 70, pp.913-922.

[4] Chien, W.K., and Kuo, W. (1997). "Anonparametric Bayes Approach to decide system burn-in time", *Naval Rese arch Logistics*, 44, pp.655-671.

[5] Dishon, M, and Weiss, G.H. (1973). "Burn-in

programs for repairable systems", *IEEE Trans. On Reliability*, R-22, 5, pp.265-267.

[6] Dishon, M, and Weiss, G.H. (1976). "A model for burn-in programs for components with eliminateable defects", *IEEE Trans. On Reliability*, R-25, 4, pp.259-260.

[7] Farewell, V.T. (1982). "The use of mixture models for the analysis of survival data with long term survivors", *Biometrics*, 38, pp.1041-1046.

[8] Farewell, V.T. (1986). "Mixture models in the survival analysis : Are they worth the risk?", *Cana. J. Statist.*, 14, 3, pp.257-262.

[9] Kuo, W. (1984). "Reliability enhancement through optimal burn-in", *IEEE Trans. on Reliability*, R-33, 2, pp.145-156.

[10] Leemis, L.M., and Beneke, M. (1990). "Burn-in models and methods : A revi ew", *IIE Trans.*, 22, 2, pp.172-180.

[11] Marcus, R., and Blumenthal, S. (1974). "A sequential screening procedure", *Technometrics*, 16, 2, pp.229-234.

[12] Meeker, W.Q. (1987). "Limited failure population life tests : Applicationto Integrated Circuit reliability", *Technometrics*, 29, 1, pp.51-65.

[13] Mendenhall, W., and Hader, R.J. (1958). "Estimation of parameters of mixed exponentially distributed failure time distribution from censored life test data", *Biometrica*, 45, pp.504-520.

[14] Mi, J. (1997). "Warranty policies and burn-in", *Naval Research Logistics*, 44, pp.199-209.

[15] Nguyen, D.G., and Murthy, D.N.P. (1982). "Optimal burn-in time to minimize cost for product sold under warranty", *IIE Trans.*, 14, 3, pp.167-184.

[16] Pantic, D. (1986). "Benefits of Integrated Circuit burn-in to obtain high reliability parts", *IEEE Trans.*, on Reliability, R-35, 1, pp.3-6.

[17] Whitbeck, C.W. and Leemis, L.M., (1989). "Component vs. System burn-in techniques for electronic equipment", *IEEE Trans. on Reliability*, R-38, pp.206-209.